# Chapter 1

# Esercizi tipo 10

(1) Fissata una base $\{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3\}$ nello spazio tridimensionale $V_O^3$ dei vettori applicati, si considerino i due insiemi di vettori seguenti

$$B = \{\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2, \vec{OP}_1 - \vec{OP}_3, 2\vec{OP}_2\}$$
$$B' = \{\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2, \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2 - \vec{OP}_3, \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + 2\vec{OP}_3\}$$

Dopo aver dimostrato che $B$ e $B'$ sono ancora basi di $V_O^3$, si calcolino le matrici di cambiamento di coordinate $M_{BB'}$ e $M_{B'B}$.

(2) Fissata una base $\{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2\}$ ortonormale dello spazio $V_O^2$ bidimensionale dei vettori applicati, si dimostri che

$$B = \{2\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2, \vec{OP}_1 - 2\vec{OP}_2\}$$

è ancora una base di $V_O^2$ e si calcoli la matrice $M_B(F)$ associata alla rotazione attorno a $O$ di angolo $\frac{\pi}{6}$ rispetto a $B$.

(3) Dopo aver dimostrato che

$$f(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$, si determini una base di $\mathbb{R}^2$ che sia ortonormale rispetto a tale prodotto.

(4) Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} k-1 & k & 0 \\ -k & -k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$