

Esercizi Geometria e Algebra per Ingegneria Biomedica (Esercizio 30/04/21)

- (1) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le due seguenti rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + kt \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

sono complanari e, per tali valori, si determini il piano che le contiene.

- (2) Dopo aver trovato le equazioni cartesiane del piano p che passa per i punti $P_0 = (1, 1, 2)$, $P_1 = (0, 3, 2)$, $P_2 = (-1, 1, -2)$ e del piano p' che passa per i punti $P'_0 = (1, 0, 1)$, $P'_1 = (2, 1, 4)$, $P'_2 = (-1, 0, -5)$, si trovi la direzione della retta che si ottiene intersecando p e p' .
- (3) Si calcoli il rango della seguente matrice al variare di $k \in \mathbb{R}$ usando il principio dei minori orlati

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & k & k \\ 3 & k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- (4) Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ la seguente terna è una base di \mathbb{R}^3 e, per tali valori, si trovino le coordinate del vettore $(1, 1, -1)$ rispetto alla base

$$v_1 = (1, 1, k), \quad v_2 = (0, k, 2), \quad v_3 = (-1, k, 1)$$

- (5) Si mostri che, fissata una base ortonormale B del piano formata dai due vettori \vec{OP}_1, \vec{OP}_2 e data una retta r per O , la matrice associata alla riflessione rispetto alla retta r è

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

se l'angolo formato da r con \vec{OP}_1 è $\alpha = \frac{\theta}{2}$ (si confronti con la matrice di rotazione).

Si scriva quindi l'espressione esplicita in coordinate rispetto a B della riflessione e si calcoli l'immagine del vettore v dato dai casi seguenti (dandone anche un'interpretazione grafica del risultato)

$$- \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad v = \sqrt{3}\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$$

$$- \alpha = \frac{3}{4}\pi, \quad v = O\vec{P}_2, \quad v = O\vec{P}_1 + O\vec{P}_2$$

- (6) Fissata una base ortonormale B dello spazio formata dai tre vettori $O\vec{P}_1, O\vec{P}_2, O\vec{P}_3$, si chiamino *asse x* la retta che passa per O e ha direzione $O\vec{P}_1$, *asse y* la retta che passa per O e ha direzione $O\vec{P}_2$ e *asse z* la retta che passa per O e ha direzione $O\vec{P}_3$.

Si scrivano le matrici che rappresentano (rispetto alla base B) le rotazioni di angolo θ attorno all'asse x , all'asse y e all'asse z .