Esercizi Geometria e Algebra Biomedica per Nicola (Esercitazione 28/05/19)

(1) In ciascuno dei seguenti casi si determini una rototraslazione che pone la curva in posizione canonica (ovvero un cambiamento di coordinate che trasforma l'equazione in forma canonica); si dica quindi di che tipo di conica si tratta e, in caso abbia un centro o degli assi di simmetria li si determini; infine, si disegni approssimativamente la curva.

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + x - \sqrt{3}y + \frac{1}{8} = 0$$
$$6x^2 - 24xy - y^2 + 10x + 1 = 0$$
$$3x^2 + 8xy + \frac{16}{3}y^2 + \frac{1}{4}x = 0$$

(2) Si determini l'equazione dell'ellissoide E che si ottiene riflettendo rispetto al piano $x+y+z = 0$ e poi traslando del vettore $v = (1, 0, -1)$ l'ellissoide rappresentato dall'equazione $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$. Esiste una retta r tale che E è invariante per rotazioni rispetto a r? se sì, la si determini scrivendo le sue equazioni parametriche.

(3) Si scriva l'equazione di un iperboloide a due falde con asse di simmetria che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ rispetto all'asse x

(4) Si scriva l'equazione di un elissoide di rotazione avente per asse di rotazione la retta $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$

RISOLUZIONE DI (4): Per ottenere l'ellissoide richiesto basta prendere un ellissoide di rotazione attorno all'asse z, ad esempio $x^2+y^2+2z^2 = 1$ e poi applicare una isometria lineare (non necessariamente una rotazione, basta anche una matrice ortogonale qualunque) e una traslazione che mandino l'asse z nella retta data.

La retta data ha, come si ricava subito, equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, ovvero ha direzione $v \equiv (1, -1, 1)$ e passa per il punto $P_0 \equiv (0, 3, 2)$.

Per ottenere una matrice ortogonale che mandi la direzione dell'asse z (cioè $(0, 0, 1)$) nella direzione $(1, -1, 1)$ basta costruire una matrice ortogonale A che abbia $(1, -1, 1)$ normalizzato (cioè $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$) come ultima colonna (infatti, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è chiaramente uguale alla terza colonna di A).

Allo scopo di costruire una tale matrice A basta costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che abbia $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ come terzo vettore (infatti, abbiamo visto che una matrice è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard).

Questo si fa facilmente: il sottospazio dei vettori ortogonali a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ è dato dall'equazione $x - y + z = 0$, ovvero è dato da tutti i vettori del tipo $(t - s, t, s)$: una base di tale sottospazio è quindi ad esempio $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$. Una base ortogonale si ottiene applicando Gram-Schmidt

$$w_1 = v_1 = (1, 1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

Normalizzando e mettendo insieme a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ si ottiene la matrice ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Quindi la trasformazione $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è un'isometria lineare che sposta l'asse z nella direzione della retta data. Invertendo otteniamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^{T}A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x'+y'+2z'}{\sqrt{6}} \\ \frac{x'-y'+z'}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

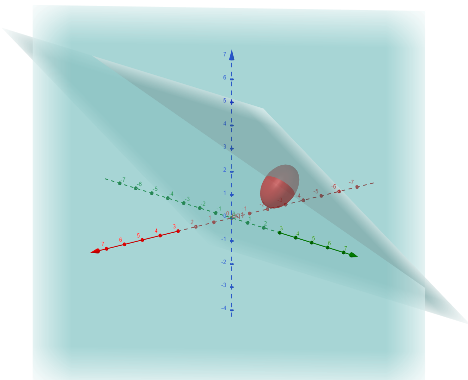
Eseguendo tale sostituzione nell'equazione dell'ellissoide otteniamo

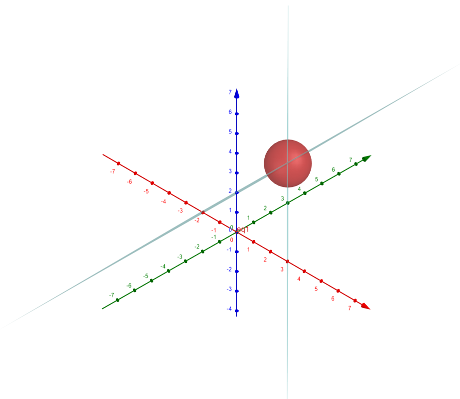
$$4x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 - 2x'y' + 2x'z' - 2y'z' = 3 \tag{1}$$

che è l'equazione di un ellissoide di rotazione con asse avente direzione $(1, -1, 1)$, ma passante per l'origine. Perchè l'asse di rotazione sia proprio la retta data basta traslare tutto per portare l'origine sul punto $(0, 3, 2)$ per cui passa la retta, ovvero applicare la traslazione $x'' = x', y'' = y' + 3, z'' = z' + 2$. Sostituendo nella (1) le relazioni inversa $x' = x'', y' = y'' - 3, z' = z'' - 2$ otteniamo

$$4x''^2 + 4y''^2 + 4z''^2 - 2x''y'' + 2x''z'' - 2y''z'' + 2x'' - 20y'' - 10z'' = -37$$

cioè l'ellissoide cercato.





(il secondo disegno è per mettere in evidenza come la retta data sia asse di rotazione dell'ellissoide)