

**Esercizi Geometria e Algebra per Ingegneria Biomedica (Esercizio 07/05/21)**

- (1) Si determinino nucleo e immagine delle seguenti applicazioni lineari, e si dica se esse sono iniettive, suriettive o biiettive

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - 4x_3, 2x_1 + 3x_2 - 7x_3)$$

$$f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3 + x_5, x_1 + x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_3)$$

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_3 - x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4)$$

$$f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad f(x, y) = (x + iy, 2x - y, ix, y)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + 2y + 3z, 3x - y + 4z, -4x + y + 2z)$$

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_3 + x_4, x_1 - x_2)$$

- (2) Si dica per quali valori di  $k$  le seguenti applicazioni lineari sono iniettive, suriettive o biiettive, determinando dimensioni di nucleo e immagine al variare di  $k$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (2x + y + kz, x - y + 2z, -x + 4y - kz, kx + 5z)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + ky + 3z, 2kx + y + z, (2k + 1)x + 3y - 2z)$$

$$f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad f \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 + z_2 + (k - 1)z_3 \\ (i + 1)z_1 + 2z_2 + iz_3 + z_4 \\ (i + 2)z_1 + (2 - i)z_2 - kz_3 + z_4 \end{pmatrix}$$

- (3) Si eseguano i seguenti prodotti di matrici, ove possibile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 - i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & 0 \\ 3 + 2i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & 0 \\ 3 + 2i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 - i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3$$

(4) Si scriva la matrice associata alle seguenti trasformazioni dello spazio:

- (i) Una rotazione nello spazio di  $\frac{\pi}{3}$  attorno all'asse  $x$  seguita da una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  attorno all'asse  $z$ , e viceversa
- (ii) Una rotazione nello spazio di  $\frac{\pi}{2}$  attorno all'asse  $x$ , seguita da una rotazione di  $\frac{\pi}{4}$  attorno all'asse  $y$  seguita da una rotazione di  $-\frac{\pi}{2}$  attorno all'asse  $x$ : riconoscete di che trasformazione si tratta?
- (iii) nel piano, una riflessione rispetto alla retta che forma un angolo di  $\frac{\pi}{6}$  con l'asse  $x$  seguita da una riflessione rispetto alla retta che forma un angolo di  $\frac{\pi}{3}$  rispetto all'asse  $x$ : riconoscete che trasformazione si ottiene?