Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2018/19 - 08/07/19 - Docente: prof. Fabio Zuddas

* Si diano le seguenti definizioni: *base* di uno spazio vettoriale V; *immagine* di un'applicazione lineare; *paraboloide iperbolico*

* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 2x - 2y + kz = 2 \\ kx + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

* Data

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si dica se A è invertibile e, se sì, si calcoli l'inversa; si calcolino poi autovalori e autovettori di A (precisando le relative molteplicità algebriche e geometriche), si dica se esiste una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ è diagonale e, in caso affermativo, si determini M.

[+**22**]

** Date le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 3x - z), \quad g(x, y) = (kx - y, x + 2y, x - 2y)$$

si calcolino le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ [+**1**], si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ tali composizioni sono invertibili e nel caso se ne determini l'inversa [+**2**]

*** Date le due rette di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$ e $r' : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -4y + 5z = 2 \end{cases}$, si determini (se esiste) il piano π che contiene r e r' [+**2**]; dopo aver quindi determinato il piano π' parallelo a π e passante per l'origine, si scriva la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su π' [+**2**] e si calcoli la distanza di $P_0 \equiv (1, 2, 0)$ da π' [+**1**]

**** Si dimostri che se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, c'è un unico modo di scrivere ogni $v \in V$ come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. [+**Lode**]