

Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2018/19 - 08/07/19 - Docente: prof. Fabio Zuddas

- * Si diano le seguenti definizioni: *applicazione lineare*; *rango* di una matrice A ; *paraboloide ellittico*
- * Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ x - y + kz = -5 \\ 2x + ky - z = -1 \end{cases}$$

- * Data

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si dica se A è invertibile e, se sì, si calcoli l'inversa; si calcolino poi autovalori e autovettori di A (precisando le relative molteplicità algebriche e geometriche), si dica se esiste una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ è diagonale e, in caso affermativo, si determini M .

[+22]

- ** Date le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x + z, x - y - z), \quad g(x, y) = (x + y, x + 2y, x - ky)$$

si calcolino le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ [+1], si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ tali composizioni sono invertibili e nel caso se ne determini l'inversa [+2]

- *** Date le due rette di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ e $r' :$

$\begin{cases} y + z = -1 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$, si determini (se esiste) il piano π che contiene r e r' [+2]; dopo aver quindi determinato il piano π' parallelo a π e passante per l'origine, si scriva la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su π' [+2] e si calcoli la distanza di $P_0 \equiv (1, 1, 1)$ da π' [+1]

- **** Si dimostri che l'autospazio relativo a un autovalore di un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ è un sottospazio vettoriale di V [+Lode]