

**Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2018/19 - 08/07/19 - Docente: prof. Fabio Zuddas**

- \* Si diano le seguenti definizioni: *sottospazio vettoriale* di uno spazio  $V$ ; *autovettore* di un endomorfismo  $f$ ; *iperboloide a due falde*
- \* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di  $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 2y + kz = 1 \\ x + z = -1 \\ 4x + ky - 2z = -1 \end{cases}$$

- \* Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si dica se  $A$  è invertibile e, se sì, si calcoli l'inversa; si calcolino poi autovalori e autovettori di  $A$  (precisando le relative molteplicità algebriche e geometriche), si dica se esiste una matrice  $M$  invertibile tale che  $M^{-1}AM$  è diagonale e, in caso affermativo, si determini  $M$ .

[+22]

- \*\* Date le seguenti applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x + y - z, y + z), \quad g(x, y) = (x - y, kx + 3y, x + y)$$

si calcolino le composizioni  $f \circ g$  e  $g \circ f$  [+1], si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali composizioni sono invertibili e nel caso se ne determini l'inversa [+2]

- \*\*\* Date le due rette di equazioni cartesiane  $r : \begin{cases} 4x - z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$  e  $r' :$

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + 2z = -1 \end{cases}$ , si determini (se esiste) il piano  $\pi$  che contiene  $r$  e  $r'$  [+2]; dopo aver quindi determinato il piano  $\pi'$  parallelo a  $\pi$  e passante per l'origine, si scriva la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su  $\pi'$  [+2] e si calcoli la distanza di  $P_0 \equiv (1, -1, 0)$  da  $\pi'$  [+1]

- \*\*\*\* Si dimostri che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico [+Lode]