Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2020/21 - 28/07/21 - CORREZIONE

* Si diano le seguenti definizioni: *generatori* di uno spazio vettoriale; *applicazione lineare*; *nucleo* di un 'applicazione lineare

  Dei vettori $v_1, \dots, v_n$ di uno spazio vettoriale V si dicono generatori di V se ogni vettore di V può essere scritto come loro combinazione lineare (ovvero se per ogni $v \in V$ si ha $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ per opportuni coefficienti $c_1, \dots, c_n$)

  Un'applicazione lineare è una funzione $f : V \to W$ tra due spazi vettoriali V e W con le due seguenti proprietà: (1) per ogni $v, v' \in V$ si ha $f(v + v') = f(v) + f(v')$; (2) per ogni $v \in V$ e ogni scalare c si ha $f(cv) = cf(v)$.

  Il nucleo di un'applicazione lineare $f : V \to W$ è l'insieme dei vettori $v \in V$ tali che $f(v) = \bar{0}$.

* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x - y + kz = 7 \\ 2x - ky + 5z = k \end{cases}$$

  La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 7 \\ 2 & -k & 5 & k \end{pmatrix}$$

  In seguito alle operazioni elementari $R_2 \to R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & k-1 & 5 \\ 0 & -k-1 & 4 & k-2 \end{pmatrix}$$

  In seguito all'operazione elementare $R_3 \to 2R_3 - (k+1)R_2$ la matrice diventa la matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & k-1 & 5 \\ 0 & 0 & 9-k^2 & -3k-9 \end{pmatrix}$$

Distinguiamo allora i casi $9-k^2=0$ e $9-k^2\neq 0$, ovvero $k=3$, $k=-3$, $k\neq\pm 3$.

Per $k=3$ l'ultima riga della matrice diventa $(0\ 0\ 0\ -18)$ (corrispondente all'uguaglianza $0=-18$) e il sistema risulta incompatibile.

Per $k=-3$ tutta la terza riga della matrice ridotta si annulla e la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

corrispondente al sistema ridotto

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -2y-4z=5 \end{cases}$$

Posto $z=t$, si ricava facilmente $y=-2t-\frac{5}{2}$ e $x=\frac{9}{4}+\frac{1}{2}t$: il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni date da tutte le terne del tipo $(\frac{9}{4}+\frac{1}{2}t,\ -2t-\frac{5}{2},\ t)$ al variare di $t\in\mathbb{R}$.

Per $k\neq\pm 3$, il sistema corrispondente alla matrice ridotta è

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -2y+(k-1)z=5 \\ (9-k^2)z=-3k-9 \end{cases}$$

Essendo $9-k^2\neq 0$, possiamo ricavare dall'ultima equazione $z=\frac{-3k-9}{9-k^2}=\frac{-3(k+3)}{(3+k)(3-k)}=\frac{-3}{3-k}=\frac{3}{k-3}$.

Sostituendo nella seconda equazione si trova facilmente $y=\frac{6-k}{k-3}$, e sostituendo nella prima equazione si trova $x=\frac{3k-15}{2(k-3)}$.

In conclusione, per ogni $k\neq\pm 3$ il sistema ha un'unica soluzione, data dalla terna $\left(\frac{3k-15}{2(k-3)},\ \frac{6-k}{k-3},\ \frac{3}{k-3}\right)$.

* Data

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si dica se A è invertibile (determinando in caso affermativo la sua inversa) e se è diagonalizzabile (determinando in caso affermativo una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale).

Allo scopo di determinare se A è invertibile e nello stesso tempo calcolarne l'eventuale inversa, procediamo mediante operazioni elementari sulla matrice

$$(A|I_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito alle operazioni $R_2 \to 2R_2 - R_1$, $R_4 \to R_4 - 2R_1$, otteniamo

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la matrice è quindi invertibile in quanto la parte a sinistra data da A si è ridotta a a una matrice a gradini senza righe nulle).

Applicando ora le operazioni elementari $R_2 \to R_2 - R_4$ e $R_1 \to R_1 - R_4$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ancora, applicando ora l'operazione elementare $R_2 \to R_2 - 6R_3$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine, applicando $R_1 \to -\frac{1}{2}R_1$, $R_2 \to \frac{1}{4}R_2$, $R_3 \to -R_3$, otteniamo la matrice nella forma

$$(I_4|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ci dice che l'inversa richiesta è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allo scopo di determinare se A è diagonalizzabile, calcoliamone autovalori e autovettori: il suo polinomio caratteristico è dato da

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppando secondo Laplace rispetto alla seconda colonna)

$$= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppando secondo Laplace rispetto alla seconda riga)

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (2-\lambda)(-1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Gli autovalori della matrice sono quindi $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$, entrambi con molteplicità algebrica due.

Calcoliamo gli autospazi corrispondenti: per $\lambda = 2$ l'autospazio è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo con matrice dei coefficienti

$$A - 2I_4 = \det \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si riduce facilmente alla matrice a gradini

$$A - 2I_4 = \det \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo tale matrice di rango 3, il sistema avrà $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni, quindi la molteplicità geometrica dell'autospazio corrispondente è 1: essendo questa minore della molteplicità algebrica di $\lambda = 2$, possiamo già concludere che la matrice non è diagonalizzabile (anche senza calcolare l'autospazio relativo all'altro autovalore) e quindi la matrice M richiesta non esiste.

[21 punti]

Dopo aver determinato il piano p passante per il punto $P_0 \equiv (1, 1, 1)$ e perpendicolare alla retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$

- Si scriva una base ortonormale della giacitura di p. **[+ 3 punti]**
- Si trovi l'angolo tra p e il piano p' di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2 + t - s \\ z = 5 - t + s \end{cases}$ **[+ 2 punti]**
- Si trovi tra i piani paralleli a p quelli che distano $\sqrt{2}$ dal punto $Q \equiv (1, 1, 0)$ **[+ 2 punti]**

- Si scriva la matrice che rappresenta la riflessione rispetto al piano parallelo a p e passante per l'origine [+ **2 punti**]

Dal momento che p e la retta sono perpendicolari, la normale n del piano coincide con la direzione della retta, data dai coefficienti di t nelle sue parametriche, ovvero $n = (-1, 2, 1)$.

In cartesiane, il piano avrà quindi equazione del tipo $-x + 2y + z = k$: imponendo ora il passaggio per il punto $P_0 \equiv (1, 1, 1)$ si ottiene $-1+2+1 = k$, ovvero $k = 2$ e l'equazione del piano è $-x+2y+z = 2$.

Per ottenere una base qualunque della giacitura di p, convertiamo l'equazione cartesiana $-x + 2y + z = 2$ appena trovata in parametriche: posto $y = t$ e $z = s$, si ha $x = -2+2t+s$ e le parametriche sono quindi

$$\begin{cases} x = -2 + 2t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

La giacitura di p è quindi data dai vettori $v_1 = (2, 1, 0)$ (dato dai coefficienti di t) e $v_2 = (1, 0, 1)$ (dato dai coefficienti di s).

Per ottenere da questi due vettori una base ortogonale della giacitura applichiamo a v_1 e v_2 il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

$$w_1 = v_1 = (2, 1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w1 \cdot w_1} w_1 = (1, 0, 1) - \frac{2}{5}(2, 1, 0) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$$

Per agevolare il calcolo della base ortonormale, possiamo sostituire il vettore w_2 con il suo multiplo $5w_2 = (1, -2, 5)$.

Dividendo i due vettori per le loro norme, otteniamo allora la base ortonormale richiesta.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, 5)$$

Per definizione, l'angolo tra i due piani è dato dall'angolo tra le loro normali: allo scopo di determinare la normale n' di p', possiamo convertire le parametriche date in cartesiana o più velocemente calcolare il prodotto vettoriale tra i due vettori $(1,1,-1)$ e $(1,-1,1)$ della sua giacitura (ottenuti guardando i coefficienti di t e s): si ha

$$n' = (1,1,-1) \wedge (1,-1,1) = (0,-2,-2)$$

L'angolo tra i piani (ovvero l'angolo tra $n = (-1,2,1)$ e $n' = (0,-2,-2)$) è dato da

$$\cos\theta = \frac{n \cdot n'}{\|n\|\|n'\|} = \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui deduciamo che $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

I piani paralleli a p sono dati dalle cartesiane $-x+2y+z=k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Utilizzando la formula $\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ per la distanza di un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ da un piano di equazione cartesiana $ax+by+cz=d$, e imponendo la condizione data, troviamo

$$\frac{|-1+2-k|}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$$

ovvero $|1-k| = \sqrt{12}$, che ci dà i due valori $k = 1 \pm \sqrt{12}$ e quindi i due piani $-x+2y+z = 1+\sqrt{12}$ e $-x+2y+z = 1-\sqrt{12}$.

Il piano parallelo a p e passante per l'origine ha equazione cartesiana $-x+2y+z=0$, con normale $n = (-1,2,1)$.

Usando la formula $v \mapsto v - 2\frac{v \cdot n}{n \cdot n}n$ per la riflessione rispetto a un piano per l'origine di normale n, otteniamo

$$(x,y,z) \mapsto (x,y,z) - 2\frac{-x+2y+z}{6}(-1,2,1)$$

ovvero, svolgendo i conti,

$$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z,\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z,\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$$

La matrice della riflessione richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$