Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2020/21 - 23/09/21 - CORREZIONE

* Si diano le seguenti definizioni: *coordinate* in uno spazio vettoriale generico; *prodotto scalare* su uno spazio vettoriale reale generico; *matrice ortogonale e matrice ortogonale speciale*

Dato uno spazio vettoriale V e una sua base $v_1, \dots, v_n$, le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base sono date dai coefficienti $x_1, \dots, x_n$ per cui è verificata l'uguaglianza $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una forma bilineare simmetrica definita positiva, ovvero una funzione f che associa a ogni coppia (v, w) di vettori di V un numero reale e tale che $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v,' w)$, $f(v, w + w') = f(v, w) + f(v, w')$, $f(cv, w) = cf(v, w)$, $f(v, cw) = cf(v, w)$ (forma bilineare), $f(v, w) = f(w, v)$ (simmetrica) e $f(v, v) \geq 0$ per ogni vettore v, con $f(v, v) = 0$ solo per v uguale al vettore nullo (definita positiva).

Una matrice ortogonale è una matrice reale quadrata tale che vale l'uguaglianza $A^T A = I_n$ (ovvero, equivalentemente, tale che la sua inversa coincide con la sua trasposta ${}^T A$). Una matrice ortogonale si dice speciale se $\det(A) = +1$.

* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = k - 1 \\ 3x + ky + 4z = 3 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & k-1 \\ 3 & k & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Riduciamo tale matrice a gradini: iniziamo con l'effettuare le operazioni elementari $R_2 \to 2R_2 - R_1$, $R_3 \to 2R_3 - R_1$, $R_4 \to 2R_4 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2k-3 \\ 0 & 2k+3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo $R_3 \to R_3 + R_2$ e $R_4 \to 3R_4 - (2k+3)R_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 2k & -6k \end{pmatrix}$$

Allo scopo di rendere più evidente l'avvenuta riduzione a gradini della matrice possiamo scambiare terza e quarta riga

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2k & -6k \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

Ora, sulla diagonale della matrice così ridotta compaiono i valori $2, 3, 2k, 2k$: gli ultimi due valori si annullano per $k = 0$, quindi dobbiamo distinguere solo $k = 0$ e $k \neq 0$.

Per $k \neq 0$ l'ultima riga della matrice corrisponde all'equazione $0 = 2k$, che non ha soluzioni: quindi per $k \neq 0$ il sistema è incompatibile.

Per $k = 0$ la matrice si riduce invece a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde a sistema ridotto

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$$

Posto $z = t$, dalla seconda equazione si ottiene subito $y = \frac{1}{3}t + 1$; sostituendo nella prima equazione si ottiene $2x - (\frac{1}{3}t + 1) + 3t = 1$, che si risolve facilmente con $x = 1 - \frac{4}{3}t$.

Quindi, per $k = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni date da tutte le terne del tipo $\left(1 - \frac{4}{3}t, 1 + \frac{1}{3}t, t\right)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

* Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_1 + 2x_2)$$

Si determinino nucleo, autovalori e autovettori di f e si dica se f è iniettivo, suriettivo o biiettivo.

[21 punti]

Il nucleo di f, essendo per definizione l'insieme dei vettori mandati dall'applicazione nel vettore nullo, si ottiene risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice (incompleta) del sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando le operazioni $R_2 \to 2R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 + R_1$ la matrice si riduce a

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per semplificare ulteriormente, possiamo dividere entrambe le righe per 2 e ottenere la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde al sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$ dalla seconda equazione otteniamo $x_2 = -\frac{1}{2}t$, che sostituito nella prima equazione ci dà subito $x_1 = -\frac{1}{2}t$. Le soluzioni del sistema, ovvero il nucleo della funzione, è dato quindi da tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ del tipo $\left(-\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, t\right)$.

Dal momento che il nucleo non contiene il solo vettore nullo, la funzione non è iniettiva; essendo un endomorfismo, essa non è neanche suriettiva[1]. Non essendo né iniettiva né suriettiva, la funzione non è biiettiva.

Determiniamo ora gli autovalori di f: usando la matrice associata A già scritta sopra, il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = 0$ della funzione è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

ovvero, svolgendo i calcoli, $(2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = (2-\lambda)\lambda(\lambda - 1)$.

Vediamo allora che gli autovalori di f sono $\lambda = 2$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Per determinare gli autovettori relativi a $\lambda = 2$, sostituiamo tale valore nella matrice $A - \lambda I$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Con l'operazione elementare $R_3 \to R_3 + 2R_2$ e scambiando poi prima e seconda riga otteniamo la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Questo fatto si può verificare indipendentemente notando che il rango della matrice associata, che coincide con la dimensione dell'immagine della funzione, è 2, e quindi l'immagine non può coincidere con il codominio $\mathbb{R}^3$.

che corrisponde al sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che $x_2 = 0$, che sostituito nella prima equazione, dove poniamo $x_3 = t$, ci dà $x_1 = -x_3 = -t$. Gli autovettori relativi a $\lambda = 2$ sono quindi dati da tutte le terne del tipo $(-t, 0, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Per determinare gli autovettori relativi a $\lambda = 0$, sostituiamo tale valore nella matrice $A - \lambda I$ ottenendo la matrice di partenza

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema omogeneo associato a tale matrice è già stato risolto per calcolare ill nucleo: quindi gli autovettori relativi a $\lambda = 0$ coincidono con i vettori del nucleo già calcolati sopra, che come abbiamo visto sono tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ del tipo $\left(-\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, t\right)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Infine, per determinare gli autovettori relativi a $\lambda = 1$, sostituiamo tale valore nella matrice $A - \lambda I$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Con le operazioni elementari $R_2 \to R_2 - R_1$ e $R_3 \to R_3 + 2R_1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Eseguendo infine $R_3 \to R_3 + R_2$ otteniamo la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde al sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$, la seconda equazione ci dice che $x_2 = -\frac{1}{2}t$, che sostituito nella prima equazione ci dà $x_1 = -t$. Gli autovettori relativi a $\lambda = 1$ sono quindi dati da tutte le terne del tipo $(-t, -\frac{1}{2}t, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

* Si trovi una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = \langle (1,1,1,1),\ (1,1,0,0),\ (2,0,0,0) \rangle$$

Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale w_1, w_2, w_3 a partire dalla base generica $v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,1,0,0),\ v_3 = (2,0,0,0)$ è il seguente:

$$w_1 = v_1 = (1,1,1,1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (1,1,0,0) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 =$$

$$= (2,0,0,0) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (1,-1,0,0)$$

Per ognuno di tali vettori calcoliamo la norma:

$$\|w_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|w_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Dividendo allora ogni vettore per la sua norma otteniamo finalmente la base ortonormale richiesta:

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

[3 punti]

Sia r la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y - 2z = -1 \end{cases}$

- Si determinino equazioni cartesiane e parametriche del piano che la contiene e passa per il punto di coordinate $(1, 1, 0)$. [+ **2 punti**]
- Si trovi l'angolo tra r e il piano di equazione cartesiana $2x+y+z = 5$ [+ **2 punti**]
- Si trovi la distanza tra r e l'asse y. [+ **2 punti**]

Il generico piano che contiene la retta data ha equazione cartesiana

$$\lambda(x + y - z - 3) + \mu(2x - y - 2z + 1) = 0$$

Imponendo la condizione di passaggio per il punto $(1, 1, 0)$ si trova

$$\lambda(1 + 1 - 0 - 3) + \mu(2 - 1 + 1) = 0$$

ovvero $-\lambda + 2\mu = 0$. Sostituendo allora $\lambda = 2\mu$ nell'equazione generica, troviamo

$$2\mu(x + y - z - 3) + \mu(2x - y - 2z + 1) = 0$$

ovvero, svolgendo i calcoli, $4\mu x+\mu y-4\mu z-5\mu = 0$. Dividendo per μ , otteniamo infine l'equazione cartesiana cercata $4x+y-4z = 5$. Per l'equazione parametrica, è sufficiente risolvere tale equazione cartesiana ponendo $y = t$, $z = s$ e ottenendo quindi

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

L'angolo tra una retta e un piano è dato per definizione da $\frac{\pi}{2} - \alpha$, essendo α l'angolo formato tra il vettore v direttore della retta e la normale n al piano.

Il vettore direttore della retta può essere ottenuto dalle sue cartesiane passando a parametriche: riducendo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ del sistema dato dalle sue cartesiane (mediante l'operazione elementare $R_2 \to R_2 - 2R_1$) si trova $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ che corrisponde al sistema ridotto $\begin{cases} x+y-z=3 \\ -3y=-7 \end{cases}$ La seconda equazione ci dà $y = \frac{7}{3}$; sostituendo nella prima e ponendo $z = t$ si ottiene $x = 3 - \frac{7}{3} + t = \frac{2}{3} + t$.

Le parametriche della retta sono quindi $\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{7}{3} \\ z = t \end{cases}$ Il vettore direttore (dato dai coefficienti di t) è quindi $v = (1, 0, 1)$.
L'angolo α tra tale vettore e il vettore $n = (2, 1, 1)$ normale al piano si ottiene mediante la formula

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot n}{\|v\|\|n\|} = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^1 + 1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e l'angolo tra la retta e il piano è $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{3}$.

Infine, per calcolare la distanza tra la retta e l'asse y, useremo il procedimento per la distanza tra due rette, con l'asse y dato dalle parametriche $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ (infatti, è la retta che passa per l'origine $(0, 0, 0)$ e ha direzione $(0, 1, 0)$, cioè le coordinate del secondo vettore della base).
Come sappiamo, il procedimento prevede innanzitutto di scrivere il vettore PQ che unisce due generici punti P sulla prima retta e Q sulla seconda: tali punti sono dati proprio dalle parametriche, quindi poniamo $P = (\frac{2}{3} + t, \frac{7}{3}, t)$ e $Q = (0, t', 0)$ (si ricordi che i parametri vanno denotati in modo diverso, a significare che possono variare sulle due rette indipendentemente l'uno dall'altro).
Il vettore PQ ha allora coordinate

$$(0, t', 0) - \left(\frac{2}{3} + t, \frac{7}{3}, t\right) = \left(-\frac{2}{3} - t, t' - \frac{7}{3}, -t\right)$$

Ora dobbiamo imporre che PQ sia ortogonale ai vettori direttori di entrambe le rette, ovvero al vettore $v = (1, 0, 1)$ di r e al vettore $(0, 1, 0)$ dell'asse y:

$$\left(-\frac{2}{3} - t, t' - \frac{7}{3}, -t\right) \cdot (1, 0, 1) = -\frac{2}{3} - 2t = 0$$
$$\left(-\frac{2}{3} - t, t' - \frac{7}{3}, -t\right) \cdot (0, 1, 0) = t' - \frac{7}{3} = 0$$

da cui otteniamo $t = -\frac{1}{3}$ e $t' = \frac{7}{3}$, ovvero i valori di t e t' per cui si ottengono sulle due rette i punti P e Q di minima distanza.
Per tali valori il vettore PQ è dato da

$$PQ = \left(-\frac{2}{3} - t, t' - \frac{7}{3}, -t\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

e la sua norma, ovvero la distanza tra le due rette, è data da

$$\|PQ\| = \sqrt{\frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$