

**Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - 18/06/18 - Docente: prof. Fabio Zuddas**

\* Si diano le seguenti definizioni:

coordinate in uno spazio vettoriale  $V$ ; autovettore di un endomorfismo;  
prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$

\* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di  $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y - kz = 2 \\ 2kx - 3y + z = -1 \end{cases}$$

\* Data

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

si calcolino autovalori e autovettori di  $A$  e si dica se  $A$  è diagonalizzabile.

\*\* Date le due applicazioni lineari,

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

si trovino basi per nucleo e immagine di  $F$  e di  $G$  e si dica se esse sono iniettive, suriettive o biiettive; si scrivano poi le funzioni composte  $F \circ G$  e  $G \circ F$  e, se esistono, le funzioni inverse  $(F \circ G)^{-1}$  e  $(G \circ F)^{-1}$ .

\*\*\* Dopo aver determinato il piano  $p$  che contiene le due rette di equazioni cartesiane  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$  e  $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ , si scriva la matrice che rappresenta la riflessione rispetto al piano  $p'$  parallelo a  $p$  e passante per l'origine.

\*\*\*\* Si dimostri che gli autospazi relativi a autovalori diversi di una matrice simmetrica reale  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sono tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^n$

*LO SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI (\*) È NECESSARIO PER SUPERARE L'ESAME E VALE 20 PUNTI; L'ESERCIZIO (\*\*) AGGIUNGE ULTERIORI 4 PUNTI; L'ESERCIZIO (\*\*\*) AGGIUNGE ULTERIORI 4 PUNTI; SVOLGENDO TUTTI GLI ESERCIZI COMPRESO (\*\*\*\*), SI OTTIENE 30 E LODE.*