Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - 18/06/18 - Docente: prof. Fabio Zuddas

* Si diano le seguenti definizioni:

base di uno spazio vettoriale V; nucleo di un'applicazione lineare; norma in uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare

* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 4x + 3ky + z = 1 \end{cases}$$

* Data

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si calcolino autovalori e autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

** Date le due applicazioni lineari,

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3)$$
$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad G(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -2x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

si trovino basi per nucleo e immagine di F e di G e si dica se esse sono iniettive, suriettive o biiettive; si scrivano poi le funzioni composte $F \circ G$ e $G \circ F$ e, se esistono, le funzioni inverse $(F \circ G)^{-1}$ e $(G \circ F)^{-1}$.

*** Dopo aver determinato il piano p che contiene le due rette di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$, si scriva la matrice che rappresenta la riflessione rispetto al piano p' parallelo a p e passante per l'origine.

**** Si dimostri che gli autospazi relativi a autovalori diversi di una matrice simmetrica reale $A \in M_n(\mathbb{R})$ sono tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$

LO SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI (*) È NECESSARIO PER SUPERARE L'ESAME E VALE 20 PUNTI; L'ESERCIZIO (**) AGGIUNGE ULTERIORI 4 PUNTI; L'ESERCIZIO (***) AGGIUNGE ULTERIORI 4 PUNTI; SVOLGENDO TUTTI GLI ESERCIZI COMPRESO (****) , SI OTTIENE 30 E LODE.