Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2020/21 - 13/07/21 - CORREZIONE

* Si diano le seguenti definizioni: *vettori indipendenti*; *autovettore*; *prodotto scalare*

Dei vettori $v_1, \dots, v_n$ in uno spazio vettoriale V si dicono linearmente indipendenti se nessuno di loro può essere scritto come combinazione dei rimanenti, o, equivalentemente, se l'unica loro combinazione lineare $c_1v_1 + \dots + c_nv_n$ uguale al vettore nullo è quella con coefficienti $c_1, \dots, c_n$ tutti uguali a zero

Un autovettore di un endomorfismo $f : V \to V$ è un vettore v non nullo tale che $f(v) = \lambda v$ per un certo scalare λ (detto autovalore associato a v).

Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V è una forma bilineare (ovvero $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w),\ f(v, w + w') = f(v, w) + f(v, w'), f(cv, w) = f(v, cw) = cf(v, w)$) simmetrica (ovvero $f(v, w) = f(w, v)$) e definita positiva (ovvero $f(v, v) \geq 0$ e $f(v, v) = 0$ solo se v è il vettore nullo).

* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + kx_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ kx_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

Mediante operazioni elementari la matrice completa del sistema si trasforma facilmente nella matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-2k & 4-2k & 2k-4 \end{pmatrix}$$

Per $k = 2$, si annulla tutta la terza riga, la matrice ha rango 2 e il sistema ammette ∞^2 soluzioni, date da tutte le 4-uple del tipo $(-2 + t - 2s,\ 1 - 3t,\ s,\ t)$ al variare di $t, s \in \mathbb{R}$.

Per $k \neq 2$ la matrice ha rango 3 e il sistema ammette ∞^1 soluzioni date da tutte le 4-uple del tipo $(3t,\ 1-(k+1)t,\ 1-t,\ t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

* Data

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

si dica se A è invertibile (determinando in caso affermativo la sua inversa) e se è diagonalizzabile (determinando in caso affermativo una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori).

Calcolando il determinante di A (e più precisamente mostrando che $\det(A) \neq 0$) o il rango di A (e più precisamente mostrando che il rango di A è massimo uguale a 3) si mostra che la matrice risulta invertibile, e la sua inversa (ottenuta mediante metodo dei cofattori o mediante operazioni elementari) risulta essere

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ è

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = 1$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda = 2$ (con molteplicità algebrica 1).

L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo con matrice dei coefficienti $A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ che si riduce al sistema con una sola equazione $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, con ∞^2 soluzioni date da tutte le terne del tipo $(t - \frac{1}{2}s,\ t,\ s) = t(1, 1, 0) + s(-\frac{1}{2}, 0, 1)$ al variare di $t, s \in \mathbb{R}$. La molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è quindi 2 (uguale alla molteplicità algebrica) e possiamo già dire che la matrice è diagonalizzabile.

Allo scopo di determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori determiniamo anche l'autospazio relativo al secondo autovalore $\lambda = 2$, dato dalle soluzioni del sistema omogeneo con matrice dei coefficienti $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ che si riduce al sistema di due equazioni

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, con ∞^1 soluzioni date da tutte le terne del tipo $(t, t, t) = t(1, 1, 1)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori è quindi data da

$$(1, 1, 0), \quad \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right), \quad (1, 1, 1)$$

[21 punti]

Si trovi una base ortonormale (rispetto al prodotto standard di $\mathbb{R}^4$) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni del seguente sistema omogeneo
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Risolvendo il sistema mediante riduzione a gradini si trovano le ∞^2 soluzioni $(-t,\ s - t,\ t,\ s) = t(-1, -1, 1, 0) + s(0, 1, 0, 1)$ al variare di $t, s \in \mathbb{R}$. Una base del sottospazio è quindi data dai due vettori $v_1 = (-1, -1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.

Applicando il procedimento di ortogonalizzazione a v_1 e v_2 si ottiene la base ortogonale

$$w_1 = v_1 = (-1, -1, 1, 0)$$
$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (0, 1, 0, 1) - \frac{-1}{3}(-1, -1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}, 1\right)$$

Una base ortonormale si ottiene quindi dividendo w_1 e w_2 per le rispettive norme:

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1, 0)$$
$$\frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{3}{\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}, 1\right)$$

[+ 3 punti]

Dopo aver determinato equazioni parametriche e cartesiane della retta r che passa per i punti $P_0 \equiv (-1, 1, 2)$, $P_1 \equiv (2, 0, 3)$,

- Si trovi il piano che contiene r ed è perpendicolare al piano di equazione cartesiana $x + y + z = 10$
- Si trovi la distanza tra r e la retta $r' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 1 + 4t \end{cases}$
- Si mostri che la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$ rappresenta una rotazione attorno alla retta parallela a r e passante per l'origine, determinando anche l'angolo di rotazione

[+ **6 punti**]

La retta r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ e equazioni cartesiane $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

Il generico piano che contiene r è dato al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ da $\alpha(x + 3y - 2) + \beta(y + z - 3) = 0$ ovvero

$$\alpha x + (3\alpha + \beta)y + \beta z - (2\alpha + 3\beta) = 0 \tag{1}$$

con normale $(\alpha, 3\alpha + \beta, \beta)$.

Affinché questo piano sia perpendicolare al piano di equazione $x + y + z = 10$ è necessario e sufficiente che il prodotto scalare tra le rispettive normali sia nullo:

$$1 \cdot \alpha + 1 \cdot (3\alpha + \beta) + 1 \cdot \beta = 0$$

da cui $4\alpha + 2\beta = 0$, ovvero $\beta = -2\alpha$. Sostituendo nella (1) si ottiene

$$\alpha x + (3\alpha - 2\alpha)y - 2\alpha z - (2\alpha - 6\alpha) = 0$$

ovvero (svolgendo i calcoli e dividendo per α) $x + y - 2z + 4 = 0$.

Dalle parametriche trovate sopra, il generico punto di r è $P = (-1 + 3t, 1 - t, 2 + t)$, mentre il generico punto di r' è dato da $Q = (1 + 2s, 2, 1 + 4s)$. Il segmento PQ che unisce i due punti generici ha quindi coordinate $(-2+3t-2s,\ -1-t,\ 1+t-4s)$. Affinchè tale segmento sia perpendicolare sia al vettore direttore di r $(3,-1,1)$ sia al vettore direttore di r' $(2,0,4)$ devono essere soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} (-2+3t-2s,\ -1-t,\ 1+t-4s)\cdot(3,-1,1)=0 \\ (-2+3t-2s,\ -1-t,\ 1+t-4s)\cdot(2,0,4)=0 \end{cases}$$

ovvero, svolgendo i conti,

$$\begin{cases} 11t-10s=4 \\ 10t-20s=0 \end{cases}$$

da cui si trova facilmente la soluzione $t=\frac{2}{3},\ s=\frac{1}{3}$.

Il segmento PQ per tali valori è dato da $\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$ e la sua norma $\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{25}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$ è la distanza tra le due rette.

La matrice A data è, come è facile verificare, ortogonale (ovvero verifica la condizione $A\cdot{}^TA=I$) e ha determinante $+1$, quindi rappresenta sicuramente una rotazione attorno a una retta che passa per l'origine; tale retta ha direzione coincidente con l'autovettore di A relativo all'autovalore 1, che si trova risolvendo il sistema omogeneo che ha come matrice $A-I=\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0-1 & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$, che si riduce alla matrice $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e corrisponde al sistema omogeneo $\begin{cases} -x_1-3x_2=0 \\ -x_2-x_3=0 \end{cases}$ con le ∞^1 soluzioni $(3t,-t,t)=t(3,-1,1)$: questa è esattamente la direzione di r, il che conferma che si tratta di una rotazione attorno alla retta parallela a r e passante per l'origine.

Per determinare l'angolo di rotazione, determiniamo i restanti autovalori della matrice: il suo polinomio caratteristico è

$$\det\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\lambda \end{pmatrix}=-\lambda^3+\frac{4}{5}\lambda^2-\frac{4}{5}\lambda+1=(\lambda-1)\left(-\lambda^2-\frac{1}{5}\lambda-1\right)$$

Le soluzioni di $-\lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - 1 = 0$ sono date, come si verifica facilmente mediante la nota formula risolutiva, da

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-99}}{10} = -\frac{1}{10} \pm \frac{\sqrt{99}}{10} i$$

e deduciamo che l'angolo di rotazione è quindi il θ tale che $\cos\theta = -\frac{1}{10}$, ovvero $\theta = arccos\left(-\frac{1}{10}\right)$.