Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - 10/07/18 - Docente: prof. Fabio Zuddas

* Si diano le seguenti definizioni:

applicazione lineare; vettori linearmente indipendenti; autovettore

* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + kx_4 = 4 \\ kx_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

* Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

si dica se A è invertibile e in caso affermativo se ne calcoli l'inversa, si determinino autovalori e autovettori di A, si dica se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determini una matrice M tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

** Dopo aver determinato basi per nucleo $N(F)$ e immagine $Im(F)$ dell'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \;\; F(x_1, x_2, x_3) = (x_1+2x_2+x_3, x_1+3x_3, x_1-x_2+4x_3, x_2-x_3)$$

a aver detto se essa è iniettiva, suriettiva o biiettiva, si trovi infine una base di $Im(F)$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

*** Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine O, si determini la matrice che rappresenta la rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ attorno alla retta per O e di direzione $(1, -1, 1)$.

**** Si dimostri che, data un'applicazione lineare $f : V \to W$ con $\dim(V)$ finita, si ha $\dim(N(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$

LO SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI (*) È NECESSARIO PER SUPERARE L'ESAME E VALE 22 PUNTI; L'ESERCIZIO (**) AGGIUNGE ULTERIORI 3 PUNTI; L'ESERCIZIO (***) AGGIUNGE ULTERIORI 3 PUNTI; SVOLGENDO TUTTI GLI ESERCIZI COMPRESO (****) , SI OTTIENE 30 E LODE.