

**Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in  
Ingegneria Biomedica A.A. 2018/19 - 10/06/19 - Docente: prof.  
Fabio Zuddas**

- \* Si diano le seguenti definizioni: *generatori* di uno spazio vettoriale; *molteplicità geometrica* di un autovalore; *matrice ortogonale*
- \* Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di  $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 1 \\ -3x - y + kz = -1 \\ 2x + ky + 4z = -1 \end{cases}$$

- \* Data

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

si dica se  $A$  è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli l'inversa; si calcolino poi autovalori e autovettori di  $A$ , si dica se esiste una matrice  $M$  invertibile tale che  $M^{-1}AM$  è diagonale e, in caso affermativo, si determini  $M$ .

- \*\* Dopo aver verificato che

$$f(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + 2x_4y_4$$

è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^4$ , si determini una base ortonormale rispetto a  $f$  del seguente sottospazio di  $\mathbb{R}^4$

$$W = \langle (1, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

- \*\*\* Dopo aver scritto equazioni parametriche e cartesiane del piano  $p$  che contiene la retta  $r : \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -x + 5y + z = 1 \end{cases}$  e passa per l'origine, si scriva la matrice che rappresenta la riflessione rispetto a  $p$  e l'equazione del paraboloide ellittico  $z = x^2 + y^2$  riflesso rispetto a  $p$ .
- \*\*\*\* Si dimostri che se un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  con  $\dim(V) = \dim(W)$  è suriettiva allora è automaticamente anche bigettiva