

Esame scritto di Geometria e Algebra - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica A.A. 2018/19 - 08/07/19 - Docente: prof. Fabio Zuddas

- * Si diano le seguenti definizioni: *dimensione* di uno spazio V ; *nucleo* di un'applicazione lineare f ; *iperboloide a una falda*
- * Si determinino le soluzioni del seguente sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y + kz = 0 \\ x + 2ky - 2z = 7 \end{cases}$$

- * Data

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

si dica se A è invertibile e, se sì, si calcoli l'inversa; si calcolino poi autovalori e autovettori di A (precisando le relative molteplicità algebriche e geometriche), si dica se esiste una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ è diagonale e, in caso affermativo, si determini M .

[+22]

- ** Date le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z), \quad g(x, y) = (x + y, 2x + ky, x - y)$$

si calcolino le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ [+1], si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ tali composizioni sono invertibili e nel caso se ne determini l'inversa [+2]

- *** Date le due rette di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ e

$r' : \begin{cases} x + 3y + 5z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, si determini (se esiste) il piano π che contiene r e r' [+2]; dopo aver quindi determinato il piano π' parallelo a π e passante per l'origine, si scriva la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su π' [+2] e si calcoli la distanza di $P_0 \equiv (1, 1, 2)$ da π' [+1]

- **** Si dimostri che autovettori relativi a autovalori diversi di una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ sono tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n [+Lode]