Esame scritto di Matematica 2 per Chimica - 23/06/21 - CORREZIONE

(1) [**8.5 punti**] Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{x}}$$

Essendo la funzione della forma $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) = 1 + \arcsin x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, possiamo sfruttare l'identità $f(x)^{g(x)} = e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} = e^{g(x)\ln f(x)}$ e scrivere quindi

$$(1+\arcsin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\arcsin x)} = e^{\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x}} \tag{1}$$

Calcoliamo allora il limite per $x \to 0$ di $\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x}$.

Un primo metodo può essere quello di sfruttare il metodo di sostituzione ponendo $\arcsin x = y$ (ovvero $x = \sin y$ e $y \to 0$ per $x \to 0$), da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{\sin y}$$

Per risolvere il limite in y, moltiplichiamo e dividiamo per y riscrivendolo nel modo seguente

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{y}{\sin y} \tag{2}$$

Riconosciamo allora che il limite cercato è prodotto dei due limiti notevoli $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ e $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1$, e quindi il risultato, in base alla (2), è il prodotto $1 \cdot 1 = 1$.

Quindi possiamo scrivere $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x} = 1$ e dalla (1) scrivere finalmente

$$\lim_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x}} = e^1 = e$$

In alternativa, il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x}$ può essere risolto con il metodo di de L'Hopital, essendo una forma indeterminata del tipo "zero su zero": derivando numeratore e denominatore si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arcsin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}$$

(per derivare il numeratore $\ln(1+\arcsin x)$ usiamo la regola di derivazione delle funzioni composte $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ con $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 1 + \arcsin x$, ricordando che $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

da cui si vede subito che il limite per $x \to 0$ è uguale a 1, come già trovato sopra.

(2) [**9 punti**] Data la seguente funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

si trovino i suoi punti di flesso e i suoi massimi e minimi locali, specificando se questi ultimi sono anche globali.

Si scriva quindi lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ centrato in $x_0 = 1$ e arrestato al terz'ordine.

Iniziamo con il calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione data (usando la regola di derivazione del prodotto $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, con $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = e^{-x}$:

$$[(x^2 + 2x + 1)e^{-x}]' = (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (1 - x^2)e^{-x} \quad (3)$$

e quindi

$$[(x^2+2x+1)e^{-x}]'' = [(1-x^2)e^{-x}]' = -2xe^{-x}-(1-x^2)e^{-x} = (x^2-2x-1)e^{-x} \quad (4)$$

La derivata prima $(1 - x^2)e^{-x}$ si annulla per $1 - x^2 = 0$, ovvero per $x = \pm 1$: abbiamo quindi due punti stazionari. In corrispondenza di $x = +1$ la derivata seconda $(x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ vale $(1 - 2 - 1)e^{-1} = -2e^{-1} < 0$, e quindi $x = +1$ è un punto di massimo locale; in corrispondenza di $x = -1$ la derivata seconda $(x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ vale $(1 + 2 - 1)e^{1} = 2e > 0$, e quindi $x = -1$ è un punto di minimo locale.

In alternativa, possiamo osservare che la derivata prima $(1 - x^2)e^{-x}$ è positiva dove $1 - x^2 > 0$ (il fattore e^{-x} è sempre positivo e non influenza il segno) ovvero per $x^2 < 1$, cioè $-1 < x < 1$: in tale intervallo la funzione è quindi crescente, mentre è decrescente nell'insieme complementare dato dagli $x < -1$ o $x > 1$.

Quindi la funzione è decrescente fino a $x = -1$, crescente tra -1 e $+1$, e decrescente da $x = +1$ in poi: poiché quindi passa da decrescente a crescente in corrispondenza di $x = -1$, tale punto è un minimo locale, e analogamente poiché passa da crescente a decrescente in corrispondenza di $x = +1$ tale punto è un massimo locale, confermando la conclusione ottenuta già usando il segno della derivata seconda in tali punti.

Veniamo ora ai punti di flesso: la derivata seconda $(x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ si annulla per $x^2 - 2x - 1 = 0$, ovvero, utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado, per $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Inoltre, la derivata seconda è positiva dove $x^2 - 2x - 1 > 0$ (di nuovo, il fattore e^{-x} è sempre positivo e non influenza il segno) ovvero per i valori "esterni" $x < 1 - \sqrt{2}$ o $x > 1 + \sqrt{2}$, mentre è negativa per i valori "interni" $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Di conseguenza, la funzione è convessa per $x < 1 - \sqrt{2}$ o $x > 1 + \sqrt{2}$ e concava per $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

Dal momento che essa passa quindi la convessa a concava in corrispondenza del punto $x = 1 - \sqrt{2}$ e da concava a convessa in corrispondenza del punto $x = 1 + \sqrt{2}$, abbiamo la conferma che questi due punti sono i punti di flesso della funzione.

Per capire se i punti di massimo locale $x = +1$ e di minimo locale $x = -1$ sono anche di massimo e minimo globale, dobbiamo capire in modo più approfondito l'andamento della funzione e in particolare il suo comportamento per $x \to \pm\infty$.

Dal momento che l'esponenziale e^x per $x \to +\infty$ va a più infinito più velocemente di qualunque potenza di x (e quindi di qualunque polinomio) si ha

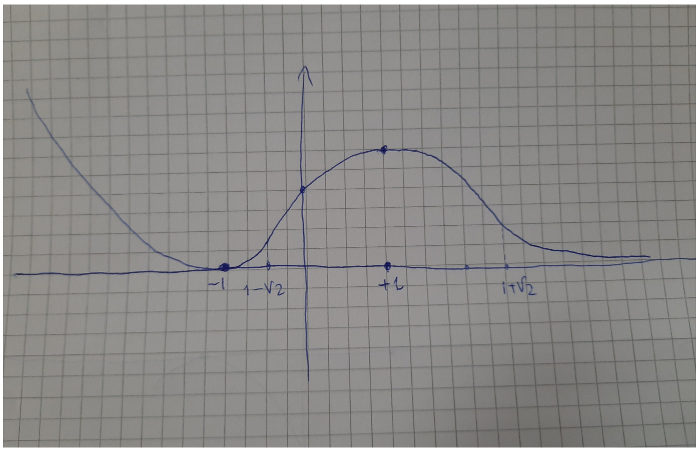
$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} = 0$$

mentre per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = +\infty$$

in quanto $\lim_{x\to-\infty} x^2+2x+1=+\infty$ (si tratta di una forma "infinito meno infinito" nella quale prevale il termine di grado più alto x^2, che tende a più infinito) e $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

Dal momento che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, non ci sono altri limiti significativi da calcolare in corrispondenza di particolari punti: mettendo allora insieme tutte le informazioni ricavate finora, possiamo abbozzare il seguente grafico



da cui vediamo allora che il punto $x=+1$ è un massimo locale ma non globale (la funzione, tendendo a più infinito per $x\to-\infty$ assume sicuramente valori più grandi di quello ottenuto in corrispondenza di $x=+1$) mentre il punto $x=-1$ è un minimo locale che è anche globale (la funzione assume valore $(1-2+1)e^{-1}=0$ in corrispondenza di tale punto e per tutti gli altri valori di x è sempre positiva).

Infine, per quello che riguarda lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0=1$ e arrestato al terz'ordine, esso ha in generale la forma seguente

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3) \tag{5}$$

Oltre al valori in $x_0=1$ delle derivate prime e seconde già calcolate ci serve quindi anche la derivata terza: essendo $f''(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$ si ha

$$f'''(x)=(2x-2)e^{-x}-(x^2-2x-1)e^{-x}=(-x^2+4x-1)e^{-x}$$

Assieme alle (3) e (4) otteniamo quindi

$$f'(1) = 0, \quad f''(1) = -2e^{-1}, \quad f'''(1) = 2e^{-1}$$

e quindi, sostituendo nella (5) (considerando anche $f(1) = 4e^{-1}$) otteniamo lo sviluppo richiesto

$$f(x) = 4e^{-1} - e^{-1}(x-1)^2 + \frac{2e^{-1}}{6}(x-1)^3 + o((x-x_0)^3)$$

(3) [**8.5 punti**] Si scrivano due diverse primitive della seguente funzione

$$e^{-x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

La ricerca delle primitive della funzione equivale a risolvere l'integrale indefinito

$$\int \left(e^{-x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \right) \, dx$$

Per la proprietà degli integrali $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ possiamo scrivere quindi

$$\int e^{-x}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

e risolvere separatamente i due integrali.

Per quello che riguarda $\int e^{-x}\,dx$, basta effettuare la semplice sostituzione $-x = y$ (ovvero $x = -y$, da cui $dx = -dy$) da cui si ha subito

$$\int e^{-x}\,dx = -\int e^{y}\,dy = -e^{y} = -e^{-x} + c$$

Per quello che riguarda il secondo integrale $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$, ricordandoci che $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$ possiamo provare a effettuare la sostituzione $x^2 = y$ in modo che $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-y^2}$, nella speranza di ricondurci all'integrale dell'arcoseno. Poiché $x^2 = y$ implica $x = \sqrt{y}$ da cui $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, in effetti si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin y + c = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + c$$

Si noti che in effetti l'integrale $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$, a parte un fattore 2, poteva anche essere pensato come un integrale "immediato" del tipo $\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + c$ con $g(x) = x^2$ e $f(x) = \arcsin x$, in quanto si ha in effetti $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f'(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ e $g'(x) = 2x$.
Sommando allora i due integrali separati si ha

$$\int \left(e^{-x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\right)\,dx = -e^{-x} + \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + c$$

Per scrivere due primitive distinte, è sufficiente scegliere due valori diversi di c, ad esempio $c = 1$ e $c = 2$:

$$-e^{-x} + \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + 1, \quad -e^{-x} + \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + 2$$

(4) [**4 punti**] Si calcoli mediante sviluppo di Laplace il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cosa si può dire sul rango di A?

Scegliamo ad esempio la prima riga e, come previsto dalla formula di Laplace, moltiplichiamo ogni elemento di tale riga per il suo cofattore:

$$\det(A) = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\left[-\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] + (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\cdot[2-3] + 2[-(2+3)] + (-1)\cdot(1+1) = 1(-1) + 2(-5) + (-1)2 = -1-10-2 = -13$$

Essendo il determinante diverso da zero, concludiamo che il rango di A è massimo uguale a tre (ovvero le sue righe sono tutte indipendenti).

(Bonus) Si dica calcoli il limite per $n \to +\infty$ della seguente successione:

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

La forma della successione suggerisce di utilizzare la formula di Stirling, che afferma che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

La successione data può essere in effetti riscritta come

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ovvero, riscrivendo $\sqrt{n} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \tag{6}$$

Dei due fattori, il primo $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ in base a Stirling tende a $\sqrt{2\pi}$, mentre il secondo $\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ tende a 1 come si vede usando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (una volta posto $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, per $n \to +\infty$ si ha in effetti $x \to 0$).

Dalla (6) concludiamo quindi che il limite richiesto è $\sqrt{2\pi} \cdot 1 = \sqrt{2\pi}$.

NB l'esercizio Bonus vale l'attribuzione della Lode in caso tutti gli esercizi precedenti siano stati svolti (o in caso contrario 1-2 punti aggiuntivi a discrezione del docente).