0.1 Limiti di funzioni del tipo f^g

Nelle parti precedenti abbiamo visto le forme indeterminate del tipo "zero su zero", "infinito su infinito" e "zero per infinito" (che sostanzialmente sono tutte e tre equivalenti tra loro) e la forma indeterminata "infinito meno infinito".

Vedremo ora in questo paragrafo tre ulteriori forme indeterminate (che impareremo comunque a ridurre a una delle precedenti), che s'incontrano quando si ha a che fare con funzioni del tipo f^g.

Più precisamente, si ha che

Data una funzione della forma $f(x)^{g(x)}$, questa dà luogo a una forma indeterminata esattamente nei tre casi seguenti[1]*:*

(1) se $f(x) \to 0^+$ e $g(x) \to 0$ (forma indeterminata "zero elevato zero")

(2) se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to 0$ (forma indeterminata "infinito elevato zero")

(3) se $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \pm\infty$ (forma indeterminata "uno elevato infinito")

Diamo subito un esempio di ciascuno di questi casi:

(1) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

(2) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x}$

(3) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(il secondo limite è chiaramente del tipo (2), se si ricorda che $\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$)

Ora, cerchiamo di capire perché i tre casi di sopra siano delle forme indeterminate e come risolverle. Entrambi gli scopi si ottengono riscrivendo la funzione nel modo seguente: dal momento che l'esponenziale è l'inversa del logaritmo, per ogni numero reale $a > 0$ si ha $a = e^{\ln a}$. Applicando questa uguaglianza a $a = f(x)^{g(x)}$, si ottiene

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]}$$

[1] Si osservi che $f(x)$ deve essere positiva, altrimenti a seconda dei valori assunti dall'esponente $g(x)$ la funzione $f(x)^{g(x)}$ potrebbe non essere definita: ad esempio, se $f(x) = -1$ e $g(x) = \frac{1}{2}$, allora $f(x)^{g(x)} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ che non è un numero reale. Per questo motivo, nei limiti e negli esempi che seguono scriviamo $f(x) \to 0^+$ o $f(x) \to +\infty$ (e non poniamo mai $f(x) \to 0^-$ o $f(x) \to -\infty$).

ovvero, usando la proprietà del logaritmo $\ln(a^b) = b \ln a$,

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)} \tag{1}$$

Guardando l'esponente di e in quest'ultima uguaglianza, capiamo allora perché i casi (1), (2), (3) siano forme indeterminate:

(1) se $f(x) \to 0^+$ e $g(x) \to 0$, allora $\ln f(x) \to -\infty$ e quindi $g(x) \ln f(x)$ è una forma indeterminata "zero per infinito"

(2) se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to 0$, allora $\ln f(x) \to +\infty$ e quindi $g(x) \ln f(x)$ è di nuovo una forma indeterminata "zero per infinito"

(3) se $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \pm\infty$, allora $\ln f(x) \to 0$ e quindi $g(x) \ln f(x)$ è ancora una forma indeterminata "zero per infinito"

Osservazione 0.1. Questo modo di riscrivere f^g ci permette anche di capire perché ad esempio non esista una forma indeterminata "zero elevato infinito", ovvero $f(x)^{g(x)}$ non dia luogo a una forma indeterminata il caso in cui $f(x) \to 0^+$ e $g(x) \to +\infty$. Infatti, in tal caso si ha che $\ln f(x) \to -\infty$ e quindi $g(x) \ln f(x)$ tende a $-\infty$, da cui segue che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)} \to 0$.

Osservazione 0.2. Il motivo per cui "zero elevato zero" è una forma indeterminata può essere spiegato intuitivamente ricordando che da un parte vale l'identità $a^0 = 1$, dall'altra si ha $0^a = 0$ per qualunque numero reale positivo a. Ora, se sia la base che l'esponente stanno tendendo a zero, il risultato sarà 1 come in a^0 se è "l'esponente ad arrivare più velocemente a zero", mentre sarà 0 come in 0^a se è la base ad arrivare più velocemente a zero. Analogamente, "uno elevato infinito" è una forma indeterminata perché, intuitivamente, se ad esempio la base tende a 1 da sinistra (ovvero assumendo valori più piccoli di 1) allora con un esponente che tende a infinito stiamo elevando a potenza sempre più grande un numero minore di uno, e come sappiamo dalle funzioni esponenziali una potenza con base minore di 1 tende a zero se l'esponente tende a infinito; dall'altra parte, se la base tende a 1 da destra (ovvero assumendo valori maggiori di 1) allora con un esponente che tende a infinito stiamo elevando a potenza sempre più grande un numero maggiore di uno, e in tal caso una potenza con base maggiore di 1 tende a infinito se l'esponente tende a infinito. Ambiguità di questo tipo non valgono nel caso "zero elevato infinito" (che non risulta infatti una forma indeterminata) perché se la base tende a zero sarà sicuramente da un certo momento in poi un numero minore di 1, e quindi con un esponente che tende a infinito il risultato del limite sarà zero senza altre possibilità.

Vediamo ora come tramite la $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ si possano subito risolvere i limiti di sopra.

Ad esempio, per quello che riguarda $\lim_{x\to 0^+} x^x$, abbiamo

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Ora, si ha $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ (è il limite (12) a pagina 7 della terza parte, con $\alpha = 1$), quindi da $x^x = e^{x \ln x}$ e usando la continuità dell'esponenziale vediamo che $\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$.

Analogamente, per quello che riguarda $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}$, abbiamo

$$\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

Come sappiamo dal limite (8) a pagina 6 della terza parte, il limite di $\frac{1}{x}\ln x$ per $x \to +\infty$ è 0, quindi da $\sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ vediamo che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = e^0 = 1$

Infine, per quello che riguarda $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, abbiamo

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Come sappiamo dai limiti notevoli, si ha $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$, quindi concludiamo che $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

Osservazione 0.3. Quest'ultimo limite poteva essere calcolato anche per sostituzione nel modo seguente: posto $\frac{1}{x} = y$ (ovvero $x = \frac{1}{y}$) abbiamo che per $x \to 0^+$ si ha $y \to +\infty$, quindi il limite si riscrive come $\lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$, e questo limite, come sappiamo dalla (13) a pagina 12 della seconda parte, ha come risultato proprio e.

0.2 Successioni

Una successione è per definizione una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che ha come insieme di partenza l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali.

Solitamente si denota con a_n il valore reale che la successione ha in corrispondenza del numero naturale n: una successione risulta quindi una sequenza infinita

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

di numeri reali, uno per ogni numero naturale.

Si possono costruire facilmente successioni prendendo le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ studiate fino ad oggi e limitandosi ai valori $f(n)$ che esse assumono sui naturali invece che considerare i loro valori su ogni numero reale. Ad esempio, dalle funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, esponenziale $f(x) = b^x$ e logaritmo $f(x) = \log_b x$ otteniamo le successioni $a_n = n^\alpha$, $a_n = b^n$ e $a_n = \log_b n$.

Queste successioni hanno le stesse proprietà delle corrispondenti funzioni reali, in particolare per quello che riguarda i limiti per $x \to +\infty$. A questo proposito, osserviamo preliminarmente che l'unico limite possibile per una successione a_n è il limite per n che tende a infinito $\lim_{n\to+\infty} a_n$: infatti, non possiamo far tendere n a un valore finito naturale n_0 in quanto come sappiamo far tendere a n_0 significa "avvicinarsi sempre di più a n_0", ma questo non è possibile essendo il dominio di definizione costituito dai soli numeri naturali, che sono separati tra loro da una distanza almeno uguale a 1 (per capirci, ad esempio non possiamo far tendere $n \to 0$ in quanto, tra i naturali, il valore n più vicino a 0 che possiamo prendere che non sia 0 stesso è $n = 1$, e non possiamo avvicinarci ulteriormente[2]).

Fatta questa precisazione, abbiamo che valgono i seguenti limiti, analoghi dei limiti visti per le funzioni corrispondenti

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \text{ se } \alpha > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty \text{ se } b > 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \log_b n = +\infty \text{ se } b > 1$$

e i seguenti confronti di ordine di infinito (con le stesse ipotesi su a e α)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$$

Ora, tra le successioni vi è un esempio importante di successione che va a infinito più velocemente dell'esponenziale: *il fattoriale* $n!$. Più precisamente, per ogni numero naturale n si definisce

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

[2]Detto in modo più elegante e rigoroso, nessun numero naturale è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.

ovvero il fattoriale di n è il prodotto del numero naturale n per tutti i naturali precedenti[3] (zero escluso). Ad esempio,

$$2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Il fattoriale è usato in numerosissime formule della matematica e delle sue applicazioni. La motivazione principale della sua introduzione è che esso ci dà il numero di possibili permutazioni di un insieme di n elementi. Infatti, se devo stabilire un ordine in cui disporre n elementi, per il primo avrò n possibili scelte (potrò scegliere uno qualunque degli elementi dati); a questo punto, per ognuna delle n possibili scelte del primo elemento, ho $n-1$ possibili scelte per il secondo (tutti tranne quello già scelto come primo) e quindi in tutto $n(n-1)$ possibilità; per ognuna di tali possibilità per i primi due elementi, ho $n-2$ scelte per il terzo elemento (tutti tranne i due già scelti come primo e secondo), e quindi in tutto $n(n-1)(n-2)$ possibilità, e così via fino ad arrivare proprio a $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$. Per un esempio, se devo ordinare tre elementi a, b, c ho le seguenti possibilità

$$a, b, c \quad b, a, c \quad a, c, b \quad c, b, a \quad b, c, a \quad c, a, b$$

che sono esattamente 6, ovvero $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Il fatto che si abbia $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$ è abbastanza chiaro, visto che al crescere di n il fattoriale risulta prodotto di un numero sempre maggiore di fattori sempre più grandi. Ebbene, si può dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \tag{2}$$

per qualunque base $a > 1$, ovvero il fattoriale va a a infinito più velocemente dell'esponenziale.

Una successione che va a infinito ancora più velocemente del fattoriale è $a_n = n^n$, ovvero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \tag{3}$$

Ora, se nel limite (3) aggiungessimo un'esponenziale e^n a numeratore, otterremmo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n}{n^n} = +\infty \tag{4}$$

[3] Si pone poi per definizione $0! = 1$.

ovvero grazie all'esponenziale aggiunto ora è il numeratore a andare a infinito più velocemente; ma se aggiungiamo ora una $\sqrt{n}$ a denominatore otteniamo però il notevole risultato

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \tag{5}$$

che ci dice che ora numeratore e denominatore vanno a infinito con la stessa velocità.

Il limite notevole (5), che non dimostriamo, giustifica una famosa formula di approssimazione detta *formula di Stirling*, scritta spesso nella forma seguente

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \tag{6}$$

Il simbolo $\sim$ indica il fatto che il rapporto $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$ tra la funzione a sinistra e quella a destra tende a 1 per $n \to +\infty$ (e quindi che le due funzioni tendono a diventare uguali per n molto grande): ma infatti, tenendo conto che $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}$, questo non è nient'altro che il limite (5) diviso per $\sqrt{2\pi}$.

La formula di Stirling è di notevole utilità e s'incontra spesso nelle applicazioni alla fisica e alla chimica. A questo scopo, si utilizza anche una sua conseguenza (chiamata spesso anch'essa formula di Stirling):

$$\ln(n!) \sim n(\ln n - 1) \tag{7}$$

che significa, come spiegato sopra, che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n(\ln n-1)} = 1$ (Il fatto che la (7) sia una conseguenza della (6) è rimandato alle esercitazioni)

I motivi per cui nelle applicazioni si può spesso avere bisogno di un'approssimazione come quella di Stirling sono disparati: ad esempio, nella cosiddetta meccanica statistica, quando si vuole studiare il comportamento di un gas visto come insieme delle particelle (atomi o molecole) che lo costituiscono, molte quantità importanti si scrivono in funzione del numero n di tali particelle (che è chiaramente un numero naturale) e coinvolgono spesso il fattoriale $n!$. Dal momento che il numero n di tali particelle è solitamente chiaramente molto grande, è lecito usare, per ricavare formule importanti, l'approssimazione di Stirling che ci dà appunto approssimazioni di $n!$ per n che tende a infinito (ovvero per n "molto grande").

Diremo qualche altra parola sulle successioni più avanti in questo corso.

0.3 Considerazioni conclusive sui limiti

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, risolvere un limite richiede spesso intuito e fantasia su quale sia il metodo giusto da utilizzare.

In alcuni casi si tratta di riscrivere la funzione diversamente, in altri si tratta di moltiplicare e dividere per una stessa quantità in modo da vedere il limite assegnato come prodotto di due limiti più semplici, spesso basta applicare una sostituzione opportuna; in molti casi, un limite può richiedere di dover applicare insieme tutte queste tecniche.

Ancora, alcuni limiti particolari richiedono invece l'uso di artifici algebrici specifici, come abbiamo visto ad esempio a pagina 14 della seconda parte, dove abbiamo dovuto sfruttare due identità trigonometriche, o nel caso di forme indeterminate contenenti radici a pagina 11 della terza parte, dove abbiamo dovuto usare l'identità algebrica $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ per risolvere il limite $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ (a questo proposito segnaliamo che nel caso di radici di indice maggiore di due, ad esempio radici cubiche, può essere indispensabile usare identità algebriche simili ma più complicate, come ad esempio la $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$)

Infine, a volte può essere necessario semplicemente ricordare la definizione di limite e riflettere sul suo significato. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare i due limiti seguenti

$$\lim_{x\to+\infty} x + \sin x$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \sin x$$

Nel caso del primo, si nota che la nostra funzione $x + \sin x$ è somma $f(x) + g(x)$ di due funzioni tali che la prima $f(x) = x$ tende chiaramente a infinito mentre la seconda $g(x) = \sin x$ non ha limite e oscilla indefinitamente tra -1 e 1. Ma la somma tra una quantità che diventa sempre più grande e una che rimane limitata diventa anch'essa sempre più grande, in quanto anche se la quantità limitata $\sin x$ assume anche valori negativi questi non possono compensare la crescita illimitata di x. Il limite è quindi più infinito[4].

[4] In alcuni testi viene espressamente enunciata una proprietà che afferma che se ho la somma $f(x)+g(x)$ di due funzioni tali che $f(x) \to +\infty$ mentre $g(x)$ rimane limitata, allora (anche se il limite di $g(x)$ non esiste) anche $f(x) + g(x) \to +\infty$. Il nostro limite è quindi un caso particolare di questa proprietà generale, tuttavia in questo corso abbiamo fatto la scelta di evitare volutamente di enunciare alcune proprietà generali dei limiti laddove esse possono essere dedotte mediante un semplice ragionamento nei singoli casi.

Nel caso del secondo limite, abbiamo il prodotto $f(x) \cdot g(x)$ tra due funzioni in cui la prima ($f(x) = x$) tende a infinito assumendo valori positivi sempre più grandi al crescere di x, mentre la seconda ($g(x) = \sin x$) oscilla continuamente tra 1 e -1: ma allora, per x molto grandi, quando $\sin x = 1$ il prodotto $x \cdot \sin x$ avrà un valore positivo molto grande, mentre per x molto grandi per cui $\sin x = -1$ il prodotto $x \cdot \sin x$ assumerà valori molto grandi in valore assoluto ma negativi. La funzione quindi non solo non si stabilizza mai su un valore finito (ovvero non tende a un valore finito l) ma non tende neanche a $+\infty$ (in quanto in tal caso essa dovrebbe superare definitivamente qualunque numero positivo, e quindi essere anch'essa sempre positiva da un certo punto in poi) o $-\infty$ (in quanto analogamente in tal caso essa dovrebbe essere definitivamente minore di qualunque numero negativo assegnato, e quindi essere anch'essa sempre negativa da un certo punto in poi): in conclusione, il limite non esiste.

Un'illustrazione grafica di questi due limiti può essere vista rispettivamente nel secondo disegno a pagina 16 della prima parte sui limiti e nel disegno a pagina 20 del capitolo sui richiami sulle funzioni elementari.