Chapter 1

Limiti

1.1 La definizione di limite

In questo capitolo affrontiamo l'importantissima nozione di limite. Come vedremo, si tratta di un concetto fondamentale nello studio delle funzioni di variabile reale e nella comprensione del loro andamento. Prima di entrare nel dettaglio delle definizioni, vediamo alcuni problemi a cui risponderemo in questo capitolo proprio grazie a questa nozione (ma non esaustivi della sua utilità), a mo' di motivazione:

(1) Abbiamo visto nel capitolo precedente sulle funzioni elementari come una funzione possa non essere definita su tutti i numeri reali, ma possano esistere dei punti x su cui essa non è definita.

    Ad esempio, può capitare che il punto x in questione annulli un denominatore, come nel caso di $x = 1$ in $f(x) = \frac{1}{x-1}$ o $x = 0$ in $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; oppure, può capitare che sia la definizione stessa della funzione a imporre limitazioni di questo tipo, come per $f(x) = \ln x$ che è definita solo per $x > 0$ e quindi ad esempio non lo è in particolare nel punto $x = 0$.

    Tuttavia, è lecito in tutti questi casi chiederci cosa succede nei punti "vicini" al punto in questione, o più precisamente se possiamo dire qualcosa sul comportamento della funzione man mano che ci avviciniamo a tale punto.

    Come vedremo, la teoria dei limiti ci permetterà di porre in modo rigoroso questo problema e di risolverlo (parleremo di *"limite per x che tende a un punto"*)

(2) Un'altra questione che tale teoria ci permette di rendere rigorosa e risolvere è la seguente: che cosa succede quando, data una funzione

$f(x)$, prendiamo valori della x "sempre più grandi"? Ad esempio, se abbiamo una funzione in cui la variabile x rappresenta il tempo e la funzione $f(x)$ ci descrive l'andamento di una temperatura in funzione del tempo, cosa dobbiamo aspettarci per tempi molto grandi? se lascio passare abbastanza tempo, la temperatura crescerà senza limiti? si stabilizzerà su un valore ben preciso? oscillerà tra due valori senza mai stabilizzarsi?

Anche questo tipo di domande ha una risposta data dalla teoria dei limiti (si parla in questo caso di *"limite per x che tende a infinito"*)

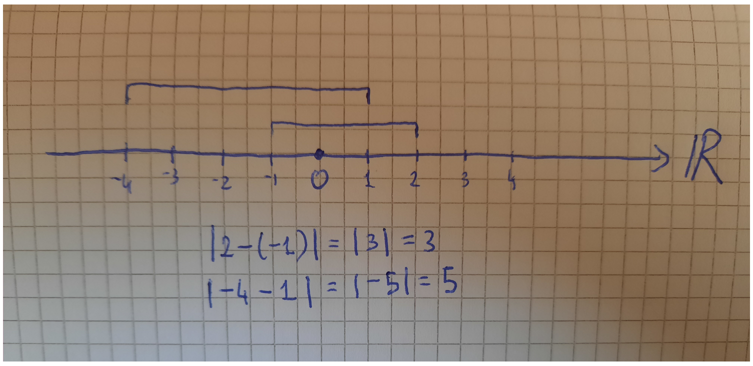
Facendoci guidare da questi due esempi motivazionali, passiamo ora a vedere la definizione di limite.

1.1.1 Limite per x che tende a un punto

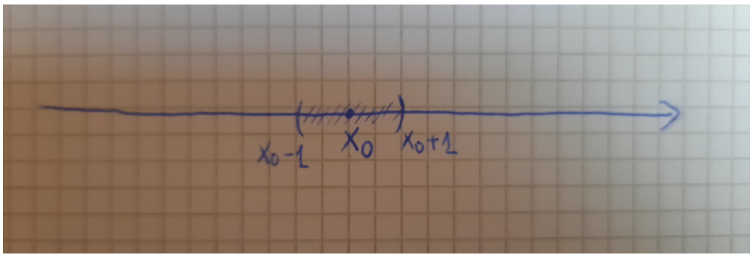
Iniziamo dai limiti del primo tipo, quelli "per x che tende a un punto".

Abbiamo detto che in tal caso vogliamo determinare il comportamento di una funzione man mano che ci avviciniamo a un dato punto x_0. Cosa significa "man mano che ci avviciniamo a un certo punto"?

Intuitivamente, avvicinarsi a un punto x_0 significa prendere punti x che sono sempre più vicini a x_0, ovvero la cui distanza da x_0 sia sempre più piccola. Ora, la distanza tra due numeri reali x e x_0, visti come punti della retta orientata che rappresenta tutti i numeri reali, è data dal valore assoluto $|x - x_0|$ della differenza tra i due punti:



Ad esempio, se x soddisfa la disuguaglianza $|x-x_0| < 1$, significa che x si trova a distanza minore di 1 dal punto x_0: in altre parole, x sta nell'intervallo centrato in x_0 e raggio 1, che chiamiamo anche *intorno circolare*; possiamo anche dire, come illustrato nel disegno, che x sta tra $x_0 - 1$ e $x_0 + 1$, a sua volta scrivibile come una doppia disuguaglianza $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$.



In generale, per ogni numero reale positivo δ, se scriviamo che $|x-x_0| < \delta$ stiamo dicendo che x sta nell'intorno centrato in x_0 e raggio δ o equivalentemente $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (cioè x sta tra $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$).

Determinare il comportamento della funzione f quando ci avviciniamo sempre più a x_0 significa quindi prendere i punti x tali che la quantità $|x-x_0|$ sia sempre più piccola, ovvero che appartengono a intorni di x_0 sempre più piccoli, e guardare i valori $f(x)$ che la funzione assume in tali punti.

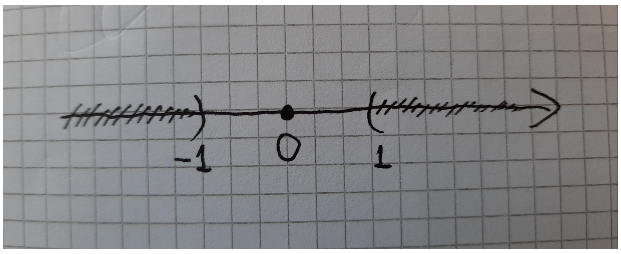
Due osservazioni sono doverose a questo punto:

(1) Il limite, come vedremo, è definito in modo da darci informazioni sui valori $f(x)$ che la funzione assume vicino a x_0 *indipendentemente da quello che succede in* x_0: la funzione, come abbiamo detto, potrebbe anche non essere definita in x_0, ma se anche lo fosse il valore del limite in generale può non avere nulla a che fare con il valore $f(x_0)$. Infatti, nella definizione di limite i punti x che si devono prendere per valutare il comportamento della funzione vicino a x_0 devono soddisfare non solo la condizione di stare in intorni sempre più piccoli ma anche la condizione $x \neq x_0$.

(2) Il fatto che dobbiamo poter determinare il valore $f(x)$ su punti x sempre più vicini a x_0 e diversi da x_0 significa che ogni intorno di x_0, per quanto piccolo, deve contenere almeno un punto del dominio D di definizione della funzione che non sia x_0, altrimenti a un certo punto non avremmo più punti su cui valutare la funzione.

    In altre parole, qualunque numero reale positivo $\delta > 0$ prendiamo, l'intorno dato dai punti x tali che $|x - x_0| < \delta$ deve contenere almeno un punto $x \neq x_0$ in comune col dominio D della funzione.

    Ad esempio, il seguente disegno



rappresenta il dominio D di una ipotetica funzione costituito da tutti i numeri reali x minori di -1, tutti i numeri reali maggiori di 1 e l'origine 0. Quest'ultima non soddisfa la condizione detta sopra, perché se prendiamo intorni di 0 di raggio minore di 1 l'unico punto del dominio appartenente a tali intorni sarà l'origine stessa.

Se la proprietà detta sopra è vera, allora si dice che x_0 *è un punto di accumulazione del dominio* D (ad esempio, nel disegno l'origine 0 non è un punto di accumulazione di D). Concludendo, per capire come si comporta la funzione man mano che ci avviciniamo a x_0 (ovvero, come preciseremo tra poco, *calcolare il limite della funzione per* x *che tende a* x_0), il punto x_0 deve essere un punto di accumulazione del dominio della funzione.

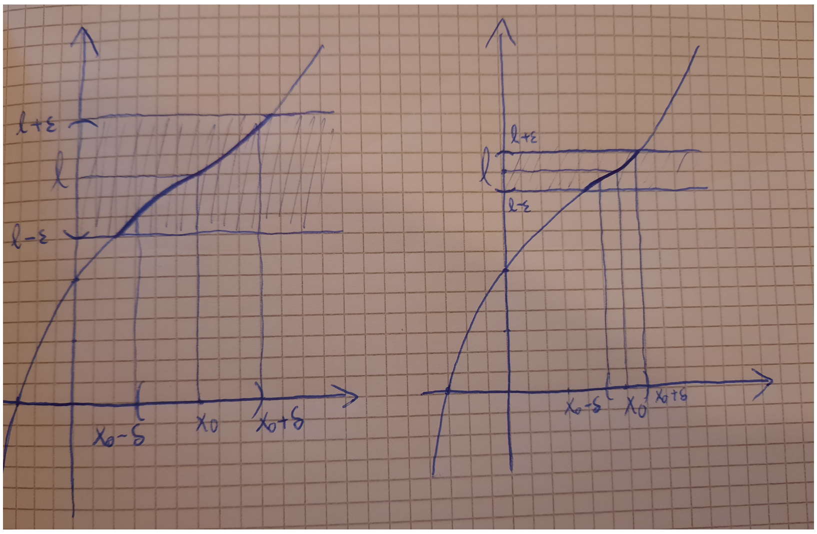
Ora che abbiamo chiarito per quali punti x_0 si può "far tendere x a x_0", vediamo cosa può succedere ai valori $f(x)$ che la funzione assume su x man mano che x si avvicina sempre più a x_0 (ovvero, quali sono i possibili risultati del limite)

La prima e più semplice possibilità è che $f(x)$ si avvicini sempre di più a un certo valore reale $l \in \mathbb{R}$. Diremo allora che *il limite per* x *che tende a* x_0 *di* $f(x)$ *è uguale a* l e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

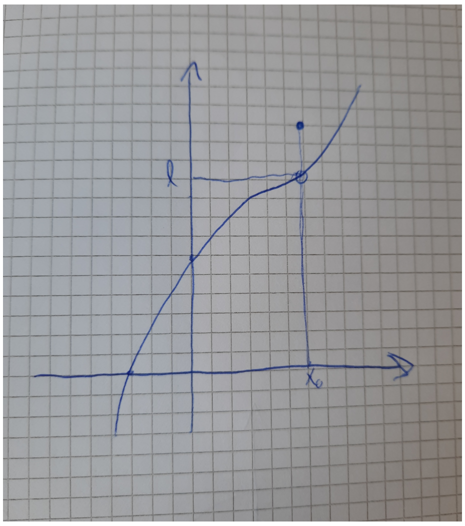
Tradotto in termini di distanze, "$f(x)$ si avvicina sempre di più a l" significa che possiamo rendere la distanza $|f(x) - l|$ tra $f(x)$ e l piccola quanto vogliamo (diciamo minore di ϵ, qualunque ϵ prendiamo), a patto di avvicinarci abbastanza a x_0, ovvero di prendere x in un opportuno intorno circolare di x_0 (cioè $|x - x_0| < \delta$ con δ opportuno), con $x \neq x_0$.

Ciò può essere illustrato con il seguente disegno.



La striscia orizzontale tratteggiata, corrispondente all'intervallo $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ sull'asse verticale, raffigura la fascia in cui devono stare i valori $f(x)$ affinché la condizione $|f(x) - l| < \epsilon$ sia verificata, e la porzione di grafico contenuta in questa fascia (evidenziata in grassetto) è data proprio dai punti di coordinate $(x, f(x))$ per cui $f(x)$ soddisfa questa condizione. Come si vede, possiamo restringere quanto vogliamo la fascia (ovvero prendere valori di ϵ sempre più piccoli), ed esisterà sempre un opportuno intorno di x_0 sull'asse orizzontale (corrispondente a una scelta opportuna di δ) che garantisce che la porzione di grafico corrispondente a questo intorno sia contenuta nella fascia.

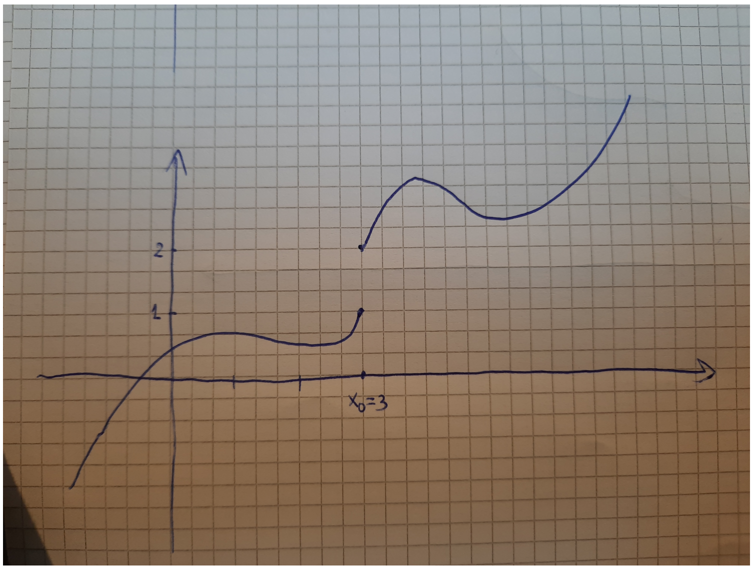
Osservazione 1.1. Ribadiamo che il limite per $x \to x_0$ non dipende dal valore che la funzione assume in x_0 (ammesso che in tale punto sia definita): sempre con riferimento al disegno precedente, avremmo potuto avere la situazione rappresentata nel disegno seguente



dove il valore della funzione in x_0 è rappresentato dal punto in grassetto, quindi diverso da l, ma il limite per $x \to x_0$ rimane sempre l.

Allo scopo di comprendere ancora meglio la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e la sua illustrazione grafica, può essere molto utile vedere esempi di situazioni in cui tale definizione non è verificata. Vediamone alcuni:

(1) Consideriamo una funzione rappresentata in grafico dal seguente disegno



(ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{x}}}$ ha esattamente questo comportamento quando ci avviciniamo a $x_0 = 0$)

Come il disegno suggerisce, la funzione si avvicina sempre di più a 2 se prendiamo valori di x sempre più vicini a x_0 e maggiori di x_0 (quindi se ci avviciniamo a x_0 "da destra") ma se ci avviciniamo a x_0 "da sinistra" (cioè prendendo valori di x minori di x_0) si ha che $f(x)$ si avvicina sempre di più a 1.

Dal momento che nella definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ data sopra la funzione deve avvicinarsi sempre di più al valore l quando si prende x in un intorno circolare (quindi sia a destra che a sinistra di x_0, essendo definito da $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$), tale definizione non è evidentemente soddisfatta per nessun l.

In altre parole, possiamo affermare che in questo caso *il limite per x che tende a x_0 non esiste.*

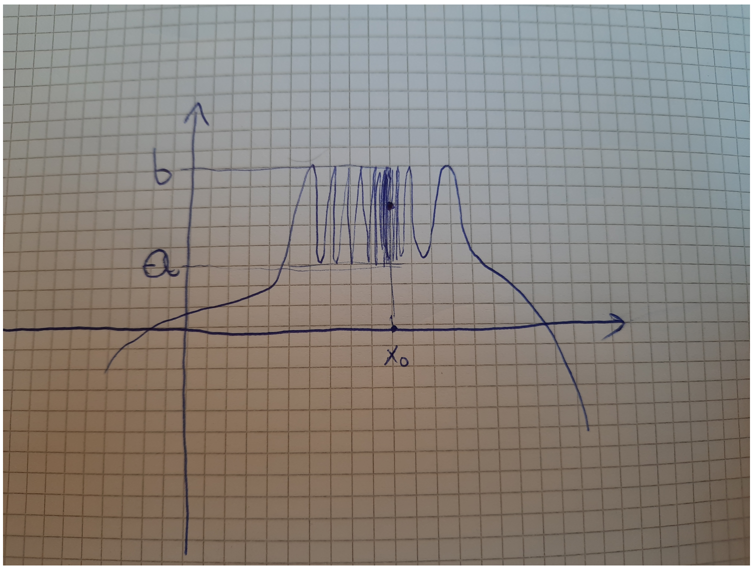
La situazione appena vista suggerisce però le cosiddette definizioni di *limite destro* e *limite sinistro.*

Più precisamente, sempre riferendoci al disegno precedente, la definizione $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2$ sarebbe soddisfatta se nella definizione di limite invece di considerare l'intorno completo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ avessimo considerato solo la sua "parte destra" $x_0 < x < x_0 + \delta$; analogamente, la definizione $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ sarebbe soddisfatta se nella definizione di limite invece di considerare l'intorno completo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ avessimo considerato solo la sua "parte sinistra" $x_0 - \delta < x < x_0$.

Quello che faremo è allora dire che *il limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a* 2 e scriveremo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 2$ (aggiungendo un segno + dopo il valore del punto a cui stiamo tendendo); e analogamente dire che *il limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a* 1 e scriveremo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1$ (aggiungendo un segno - dopo il valore del punto a cui stiamo tendendo).

Nell'esempio fatto, quindi possiamo dire che il limite destro e quello sinistro esistono, ma sono diversi.

(2) Consideriamo una funzione rappresentata in grafico dal seguente disegno

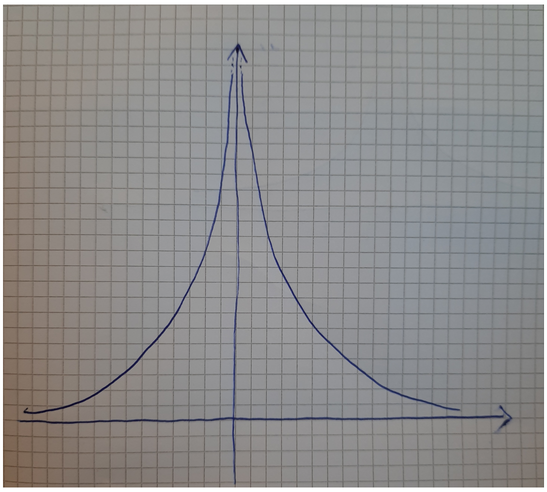


che rappresenta una funzione che oscilla sempre più velocemente tra due valori a e b man mano che ci avviciamo a x_0 (esempi di tali funzioni possono essere dati esplicitamente, ad esempio $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si comporta esattamente in questo modo rispetto a $x_0 = 0$.)

Ora, anche in questo caso si può vedere che il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste: infatti, dal momento che le oscillazioni si addensano vicino a x_0, qualunque intorno di x_0 prendiamo la funzione ristretta a quell'intorno (per quanto piccolo sia) compie comunque delle oscillazioni complete assumendo tutti i valori compresi tra a e b: quindi, non si stabilizza avvicinandosi sempre di più a un determinato valore[1]. come prevederebbe la definizione data di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

(3) Consideriamo infine una funzione rappresentata in grafico dal seguente disegno

[1]Si noti che il problema in questo caso rimane anche se ci limitiamo al solo intorno destro o al solo intorno sinistro: quindi neanche i limiti destro e sinistro esistono.



(ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ha esattamente questo grafico).

Come il disegno suggerisce, man mano che ci avviciniamo a $x_0 = 0$ (sia da destra che da sinistra) i valori $f(x)$ assunti dalla funzione non si avvicinano sempre di più a un numero reale l, ma diventano sempre più grandi, superando man mano che ci avviciniamo a x_0 qualunque numero reale l, per quanto grande esso sia. Quindi anche in questo caso la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ non è soddisfatta per nessun l.

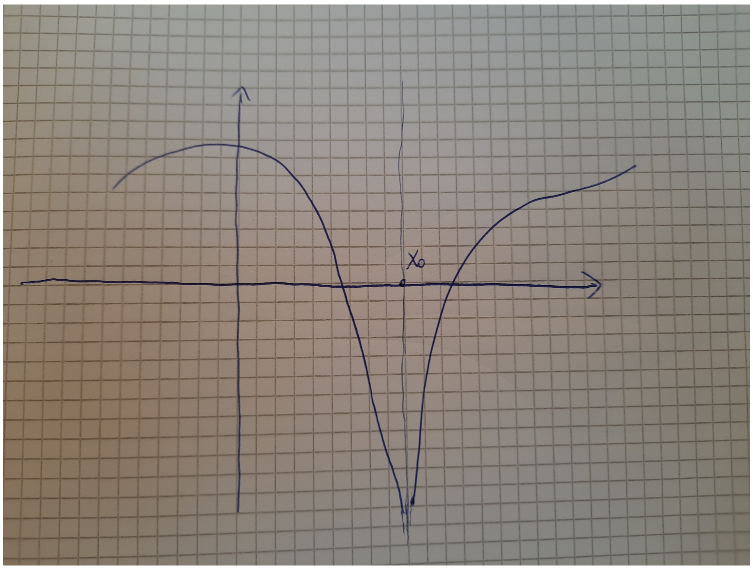
Quando si verifica una situazione come questa, ovvero che la funzione "diventa sempre più grande" man mano che ci avviciniamo a x_0, diremo che *il limite di f per x che tende a x_0 è "più infinito" (in simboli, $+\infty$)*, e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

In termini formali, stiamo affermando che qualunque numero reale M positivo ci venga proposto, per quanto grande, la funzione supererà M se prendiamo x in un intorno abbastanza piccolo di x_0.

Nel caso della funzione $\frac{1}{x^2}$ questo può essere facilmente verificato con un calcolo diretto: ad esempio, si vede subito che la funzione supera il valore $M = 100$, ovvero $\frac{1}{x^2} > 100$, se $x^2 < \frac{1}{100}$ (invertendo entrambi i i membri la disuguaglianza cambia segno) e quindi se $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$ (ovvero prendendo un intorno di zero di raggio $\frac{1}{10}$); ancora, la funzione supera $M = 1.000.000$, ovvero $\frac{1}{x^2} > 1.000.000$, se $x^2 < \frac{1}{1.000.000}$ e quindi se $-\frac{1}{1000} < x < \frac{1}{1000}$ (ovvero prendendo un intorno di zero ancora più piccolo, di raggio $\frac{1}{1000}$), e così via analogamente è possibile verificare che $\frac{1}{x^2} > M$ per qualunque numero M, se prendiamo x in un intorno sufficientemente piccolo di zero.

Un comportamento analogo possibile è quello di una funzione rappresentata dal seguente grafico



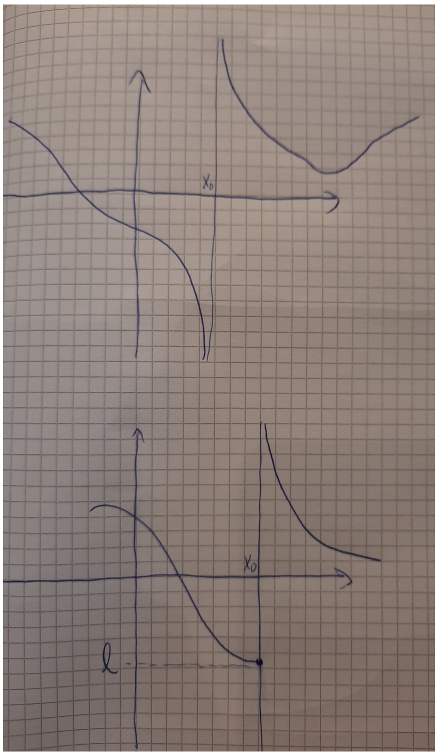
Quello che sta succedendo qui è che la funzione assume valori sempre più grandi in valore assoluto ma negativi[2]: qualunque numero negativo $-M$ ci venga proposto, la funzione assumerà valori minori di $-M$ se prendiamo x in un intorno abbastanza piccolo di x_0.

Se questo succede, diremo allora che *il limite di f per x che tende a x_0 è "meno infinito" (in simboli, $-\infty$)*, e scriveremo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Analogamente agli esempi già visti sopra in cui il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste perché i cosiddetti limiti destro e sinistro sono differenti, la stessa situazione può proporsi anche nel caso di limiti infiniti: ad esempio, consideriamo i due grafici seguenti

[2]Per capirci, ad esempio $-10, -100, -1000$ etc.



La prima funzione soddisfa la definizione di limite $+\infty$ se consideriamo solo intorni destri (cioè $x_0 < x < x_0 + \delta$) e la definizione di limite $-\infty$ se consideriamo solo intorni sinistri (cioè $x_0 - \delta < x < x_0$): scriveremo quindi $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

La seconda funzione soddisfa invece $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

In entrambi i casi, il limite quindi non esiste, né finito né infinito[3]

Osservazione 1.2. Proponiamo qui, per completezza e affinché lo studente possa confrontarle con quelle che si trovano nei testi di calcolo infinitesimale, le definizioni rigorose dei limiti visti, che non sono altro che la traduzione in formule di quanto già detto.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $|f(x) - l| < \epsilon$

[3]In realtà, nel caso in cui il limite destro sia $+\infty$ e il limite sinistro sia $-\infty$, alcuni testi scrivono che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Una discussione di questa soluzione implicherebbe l'introduzione della nozione di "intorno di infinito" che va oltre gli scopi di questo corso, quindi non la adotteremo e distingueremo sempre in casi come questo i limiti destro e sinistro.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$:

per ogni $M > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) > M$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$:

per ogni $-M < 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) < -M$

Per avere il limite destro $x \to x_0^+$ o il limite sinistro $x \to x_0^-$, basta sostituire nelle tre definizioni precedenti la condizione $|x - x_0| < \delta$ con la condizione $x_0 < x < x_0 + \delta$ (per il limite destro) e $x_0 - \delta < x < x_0$, lasciando il resto della definizione invariata

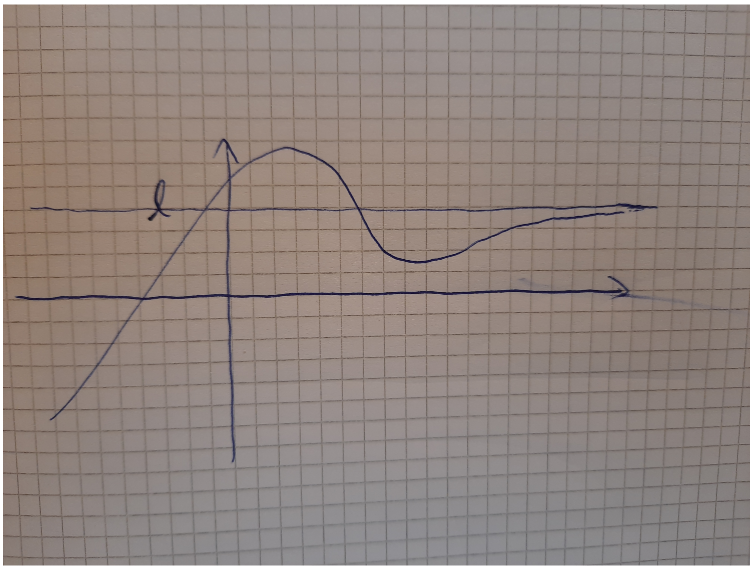
1.1.2 Limite per x che tende a infinito

I limiti visti fino ad ora ci dicono qual è il comportamento di una funzione "man mano che x si avvicina sempre di più a un punto x_0"; ma come abbiamo anticipato all'inizio del capitolo, la nozione di limite serve a rispondere anche alla domanda sul comportamento che una funzione ha "man mano che x diventa sempre più grande". Si parla in tal caso di *limite di $f(x)$ per x che tende a più infinito*, e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Vedremo ora che le possibilità per questo limite sono le stesse che abbiamo visto nella definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x)$, cioè il risultato può essere un numero finito l, può essere $\pm\infty$, o il limite può non esistere.

· $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

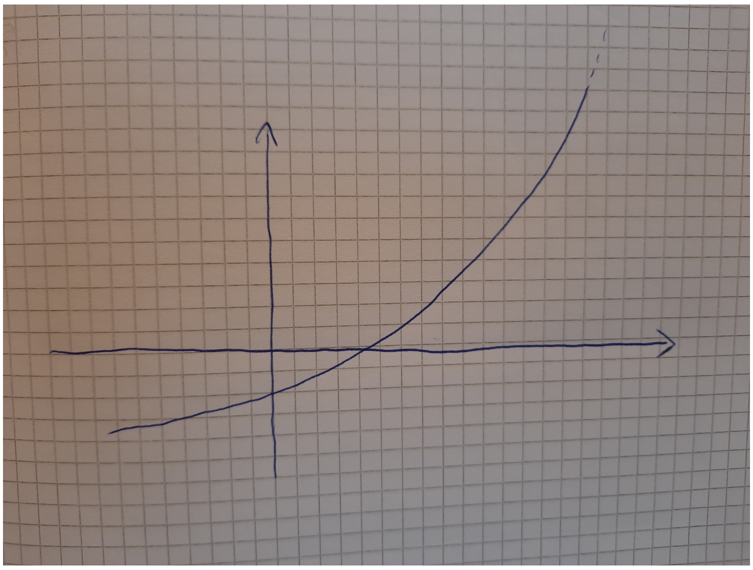
  Significa che $f(x)$ si "stabilizza" su un valore finito l al crescere di x, come illustrato ad esempio nel seguente disegno



In termini formali, possiamo rendere la distanza $|f(x) - l|$ tra $f(x)$ e l piccola quanto vogliamo (diciamo minore di un qualunque ϵ ci venga proposto) prendendo $x > M$, per un M opportuno abbastanza grande.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

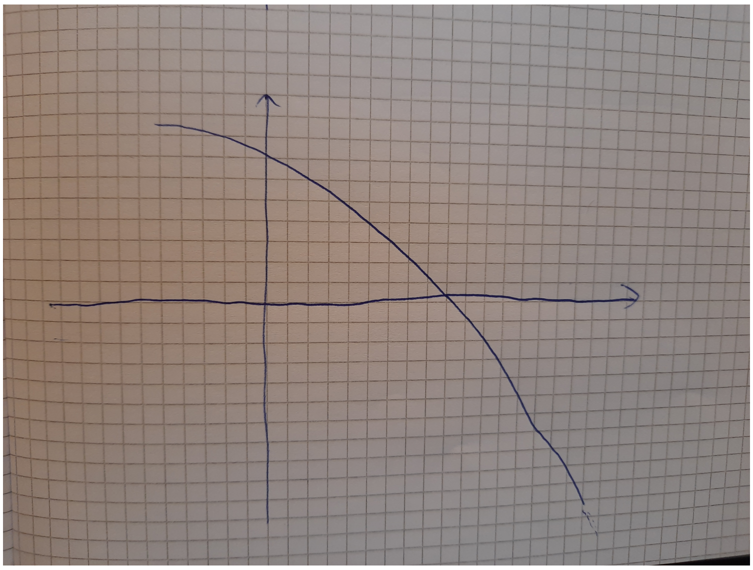
  Significa che $f(x)$ diventa sempre più grande al crescere di x, come illustrato nel seguente disegno



In termini formali, possiamo rendere i valori $f(x)$ della funzione grandi quanto vogliamo (diciamo maggiori di un qualunque numero N positivo ci venga proposto) prendendo $x > M$, per un M opportuno abbastanza grande.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

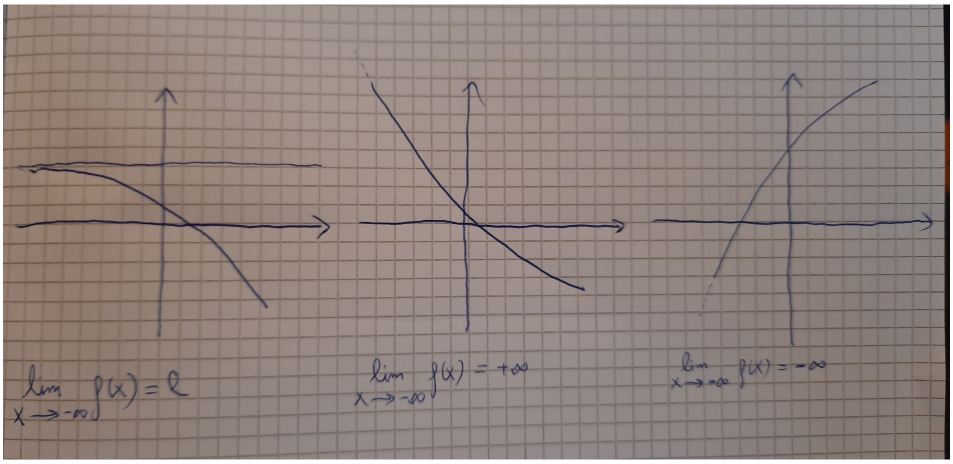
  significa che $f(x)$ assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto (es. $-10, -100, -1000$ etc.) al crescere di x



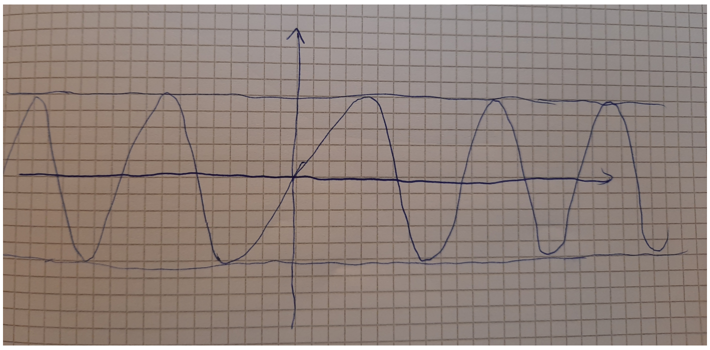
  In termini formali, possiamo rendere i valori $f(x)$ della funzione minori di un qualunque numero $-N$ negativo ci venga proposto (ad esempio $-10, -100, -1000$ etc.) prendendo $x > M$, per un M opportuno abbastanza grande.

Il limite per $x \to +\infty$ di una funzione f ci dice cosa succede ai valori $f(x)$ della funzione quando x diventa sempre più grande, ovvero supera qualunque numero reale positivo: come abbiamo detto, se la variabile x rappresentasse ad esempio il tempo e $f(x)$ un variabile dipendente dal tempo, il limite ci direbbe cosa succede ai valori di f "se aspettiamo abbastanza tempo". Se prendiamo invece valori negativi di x sempre più grandi in valore assoluto (es. $-10, -100, -1000$ etc.) e guardiamo cosa succede ai valori di $f(x)$, è come se ci stessimo chiedendo cosa succede "tornando sempre più indietro nel tempo": si dice allora che stiamo facendo tendere x a meno infinito (e si scrive $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Le varie possibilità per questo limite sono esattamente le stesse del limite per x che tende a $+\infty$ e ci limitiamo a illustrarle nel seguente disegno:

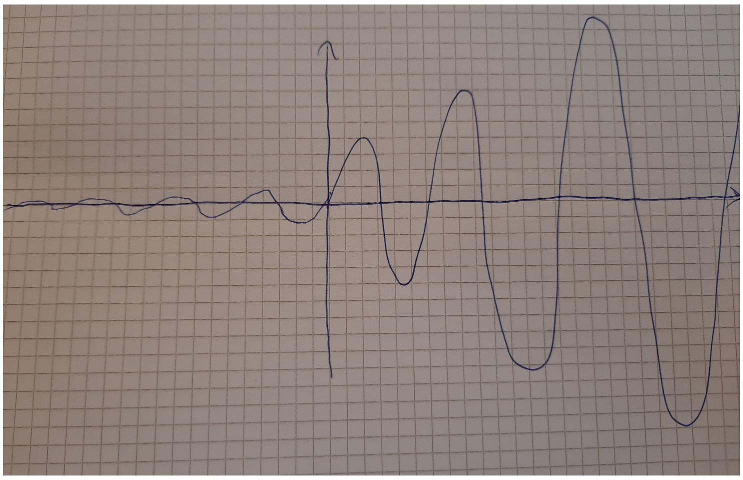


Casi in cui il limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ non esiste sono facili da esibire, ad esempio la funzione periodica $\sin x$



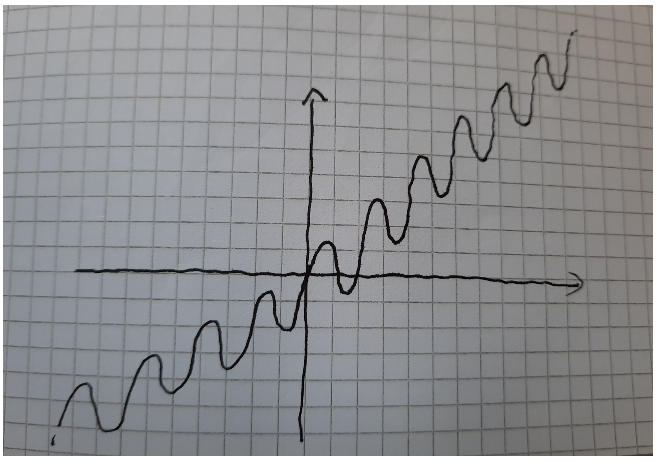
non ha limite né per $x \to +\infty$ né per $x \to -\infty$ perché in entrambi i casi la funzione non si stabilizza su un valore finito l né diventa sempre più grande.

Come ultimi esempi di questo paragrafo consideriamo i seguenti grafici:



(che rappresenta la funzione $e^x \sin x$) nel quale la funzione non ha limite per $x \to +\infty$ ma ce l'ha (uguale a zero) per $x \to -\infty$

e



che rappresenta un'altra funzione oscillante per cui i limiti per x che tende a più o meno infinito esistono, e più precisamente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Osservazione 1.3. Come già fatto per i limiti per x che tende a un punto, proponiamo per completezza anche le definizioni rigorose dei limiti per x che tende a più o meno infinito, che non sono altro che la traduzione in formule di quanto già detto. Per $x \to +\infty$ abbiamo

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$:

per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $M > 0$ tale che se $x > M$ allora $|f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

per ogni $N > 0$ esiste un $M > 0$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > N$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$:

per ogni $-N < 0$ esiste un $M > 0$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < -N$

e analogamente per $x \to -\infty$ abbiamo

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$:

per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $-M < 0$ tale che se $x < -M$ allora $|f(x)-l| < \epsilon$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$:

per ogni $N > 0$ esiste un $-M < 0$ tale che se $x < -M$ allora $f(x) > N$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$:

per ogni $-N < 0$ esiste un $-M < 0$ tale che se $x < -M$ allora $f(x) < -N$

1.2 Il calcolo dei limiti

Veniamo ora alla questione di come calcolare i limiti di una funzione specifica data. Come vedremo in questo paragrafo, non calcoleremo praticamente mai un limite usando la definizione, ma daremo una serie di regole, esempi e tecniche pratiche.

La prima importante osservazione da cui partiamo è che quasi tutte le funzioni f con cui avremo a che fare in questo corso hanno l'importante e semplice proprietà che, se D è il dominio di f e $x_0 \in D$ (cioè la funzione è definita su D) allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1.1}$$

ovvero il limite della funzione per x che tende a x_0 coincide con il valore della funzione in quel punto.

Se una funzione soddisfa la (1.1), si dice che essa è *continua in* x_0. La nozione di continuità è estremamente importante e ci torneremo più approfonditamente nei capitoli successivi, dove vedremo che la continuità è un'ipotesi essenziale per la validità di molti importanti teoremi e molte formule del calcolo infinitesimale. In questo paragrafo, la useremo solamente come punto di partenza per il calcolo dei limiti.

Osservazione 1.4. Per capire il motivo dell'aggettivo "continua" dato alle funzioni che soddisfano la condizione (1.1) può essere utile guardare esempi di grafici di funzioni non continue, ovvero in cui tale condizione non è verificata. Ad esempio, non è continua la funzione rappresentata nel primo grafico a pagina 6, in quanto il limite per $x \to x_0$ esiste ma è diverso dal valore della funzione in x_0; o ancora, non è continua la funzione rappresentata nel secondo grafico a pagina 6, in cui il limite non esiste essendo i limiti destro e sinistro differenti (si noti che la (1.1) presuppone implicitamente che il limite esista).

In entrambi i casi, la non continuità della funzione si traduce graficamente in una "discontinuità del grafico" in corrispondenza di x_0. Si faccia tuttavia attenzione a non farsi trarre in inganno da tale interpretazione: ad esempio, la funzione rappresentata a pagina 9 è continua, benché il suo grafico sia composto di due rami separati: il motivo è che non possiamo parlare di discontinuità nell'origine in quanto nell'origine la funzione non è definita (mentre la definizione di funzione continua in un punto richiede necessariamente che la funzione sia definita in quel punto).

Il fatto fondamentale relativo alla continuità che ci interessa ora è che sono continue in tutti i punti del loro dominio di definizione tutte le funzioni elementari viste nel precedente capitolo. Più precisamente, si può dimostrare direttamente dalla definizione di limite che

(1) le funzioni costanti e tutte le potenze x^α sono continue.

    Quindi, se α è naturale positivo vediamo ad esempio che sono continui tutti i monomi $x, x^2, x^3, \ldots$; se α è naturale negativo otteniamo $x^{-1} = \frac{1}{x}, x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \ldots$, (che saranno quindi continue dove definite, cioè per $x \neq 0$), per valori di α razionali abbiamo le radici $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \ldots$, etc.

(2) le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ sono continue (su tutto $\mathbb{R}$)

(3) gli esponenziali a^x sono continui (su tutto $\mathbb{R}$)

(4) le funzioni inverse[4] $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{artg} x$, $\mathrm{arcotg} x$ sono continue dove definite

Inoltre, abbiamo i seguenti fatti generali:

[4] Segnaliamo che non è vero in generale che l'inversa di una funzione continua f è continua: lo è ad esempio sotto ipotesi aggiuntive sul dominio di definizione di f che rientrano nel settore della matematica detto "topologia" e che non approfondiamo in questo corso.

(a) Se due funzioni f e g sono continue in un punto x_0 allora lo sono anche la somma $f + g$ e il prodotto $f \cdot g$.

Assieme alla (1) di sopra, questa proprietà implica ad esempio che sono continui tutti i polinomi (che si ottengono sommando monomi moltiplicati per delle costanti)

(b) Se f e g sono continue in un punto x_0 in cui $g(x_0) \neq 0$, allora il quoziente $\frac{f}{g}$ è continuo in in x_0.

Assieme al fatto che sono continui tutti i polinomi, questa proprietà afferma ad esempio che le funzioni razionali (cioè appunto il quoziente di due polinomi) sono tutte continue nei punti in cui sono definite (cioè dove la funzione a denominatore non si annulla); assieme alla (2) di sopra, abbiamo che sono continue anche la tangente $\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (ovviamente nei punti in cui non si annulla il coseno, ovvero per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e la cotangente $\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ (ovviamente nei punti in cui non si annulla il seno, ovvero per $x \neq k\pi$).

(c) La composizione $f(g(x))$ di funzioni continue è continua.

Ad esempio: $f(g(x)) = e^{\sin x}$ è continua perché lo sono $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$.

I fatti (1)-(4) e le regole (a)-(c) ci permettono di dire che sono continue funzioni anche abbastanza complicate senza usare la definizione di continuità, ad esempio

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x + \ln x}, \quad xe^{x^2+1}, \quad \sin(x^3) - \cos(x^2)$$