Chapter 1

Forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$ e metodo del completamento dei quadrati

Ricordiamo che a determinare il tipo (definita positiva o negativa, semidefinita positiva o negativa, indefinita) di una forma quadratica $f(v, w)$ su uno spazio vettoriale reale V sono il segno e l'annullarsi di $f(v, v)$ al variare di v tra i vettori di V.

Dal momento che possiamo sempre supporre che $V = \mathbb{R}^n$ e $f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ (come abbiamo visto, ci possiamo sempre ridurre a questa situazione lavorando in coordinate rispetto a una qualunque base fissata), saper determinare il tipo di una forma significa saper determinare, al variare di $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, il segno e l'annullarsi di un'espressione del tipo

$$f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{1.1}$$

ovvero una cosiddetta *forma quadratica* su $\mathbb{R}^n$ (somma di monomi di secondo grado in $x_1, \dots, x_n$).

Il *metodo del completamento dei quadrati* consiste nel riscrivere l'espressione (1.1) come somma (algebrica) di quadrati di espressioni di primo grado nelle variabili $x_1, \dots, x_n$, forma nella quale risulta essere poi molto più semplice determinarne il segno e capire dove essa si annulla.

Illustreremo tale metodo mediante alcuni esempi significativi.

Esempio 1.1. Consideriamo la forma bilineare (simmetrica) seguente su $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y) = x_1y_1+5x_2y_2+3x_3y_3-x_1y_2-x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1-3x_2y_3-3x_3y_2 \tag{1.2}$$

La forma quadratica associata è data quindi da

$$f(x, x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 \tag{1.3}$$

Cconsideriamo ora nella (1.3) tutti i termini contenenti una variabile, diciamo x_1, ovvero $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3$. Tali termini possono essere considerati come i termini dello sviluppo del quadrato di una somma in cui compare per l'appunto il quadrato x_1^2 di x_1 e i doppi prodotti $-2x_1x_2$ e $2x_1x_3$, ovvero $(x_1-x_2+x_3)^2$: in tale sviluppo compaiono però anche i quadrati del secondo e del terzo termine x_2^2 e x_3^2 e il doppio prodotto $-2x_2x_3$. Possiamo quindi scrivere

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 \tag{1.4}$$

Sostituendo quindi il secondo membro di questa uguaglianza al posto di $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ nella (1.3) e ricopiando gli altri termini troviamo che

$$f(x, x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_2x_3 \tag{1.5}$$

ovvero, sommando i termini simili,

$$f(x, x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3 \tag{1.6}$$

Ora, come si vede, la variabile x_1 è contenuta solo nel quadrato $(x_1 - x_2 + x_3)^2$ mentre i termini restanti non la contengono. Possiamo allora riapplicare lo stesso procedimento agli addendi $4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3$ rimanenti: consideriamo gli addendi contenenti solo la variabile x_2, ovvero $4x_2^2 - 4x_2x_3$. Tali termini possono essere considerati come i termini dello sviluppo del quadrato di una somma in cui compare per l'appunto il quadrato $4x_2^2$ di $2x_2$ e il doppio prodotto $-4x_2x_3$, ovvero $(2x_2 - x_3)^2$, nel quale compare però anche il quadrato del secondo termine x_3^2. Possiamo quindi scrivere

$$4x_2^2 - 4x_2x_3 = (2x_2 - x_3)^2 - x_3^2 \tag{1.7}$$

Sostituendo quindi il secondo membro di questa uguaglianza al posto di $4x_2^2 - 4x_2x_3$ nella (1.6) e ricopiando gli altri termini troviamo che

$$f(x, x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 - x_3^2 + 2x_3^2 \tag{1.8}$$

ovvero

$$f(x, x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \tag{1.9}$$

Siamo quindi arrivati all'obiettivo desiderato di riscrivere $f(x,x)$ come somma di quadrati: questo ci dice che sicuramente $f(x,x) \geq 0$ per ogni $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e quindi o f è definita positiva o è semidefinita positiva, rispettivamente nel caso in cui $f(x,x)$ si annulli solo per $x = (0,0,0)$ o si annulli anche per qualche $x \neq (0,0,0)$.
Allo scopo allora di capire per quali x la $f(x,x)$ si annulla, osserviamo che una somma di quadrati si può annullare solo se si annullano i singoli quadrati, ovvero, nel caso della (1.9) solo se

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Come si vede, questo è un sistema omogeneo a gradini di tre equazioni in tre incognite e quindi ha come unica soluzione $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, da cui concludiamo che $f(x,x) = 0$ solo per $x = 0$ e quindi la f è definita positiva.

Esempio 1.2. Consideriamo la forma

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 \tag{1.10}$$

con forma quadratica associata

$$f(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \tag{1.11}$$

Come nell'esempio precedente, consideriamo nella (1.11) tutti i termini contenenti la variabile x_1, ovvero $x_1^2 + 2x_1x_2$. Tali termini possono essere considerati come i primi due termini dello sviluppo del quadrato $(x_1 + x_2)^2$, nel quale compare però anche il quadrato del secondo termine x_2^2. Possiamo quindi scrivere

$$x_1^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 \tag{1.12}$$

Sostituendo quindi il secondo membro di questa uguaglianza al posto di $x_1^2 + 2x_1x_2$ nella (1.11) e ricopiando gli altri termini troviamo che

$$f(x,x) = (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \tag{1.13}$$

ovvero, sommando i termini simili,

$$f(x,x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \tag{1.14}$$

Come nell'esempio precedente, riapplichiamo lo stesso procedimento agli addendi $x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$ che non contengono più la variabile x_1: in questo caso tali termini coincidono con quelli dello sviluppo del quadrato $(x_2 - x_3)^2$, e possiamo quindi scrivere

$$f(x,x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \tag{1.15}$$

Vediamo quindi anche in questo caso che $f(x,x)$ si scrive come somma di quadrati, e come sopra, allo scopo di capire per quali x la $f(x,x)$ si annulla e capire quindi se essa è definita positiva o semidefinita positiva, osserviamo che la (1.15) si annulla solo se

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Stavolta, diversamente dall'esempio precedente, abbiamo un sistema omogeneo a gradini di *due* equazioni in tre incognite e quindi esso *non* ha come unica soluzione $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, ma esistono altre soluzioni, da cui concludiamo che $f(x,x) = 0$ anche per vettori x non nulli e quindi la f è semidefinita positiva. Più precisamente, questo succede per tutte le soluzioni del sistema (1.16), che come è facile trovare sono date da tutti i vettori del tipo $x = (-t,t,t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Un esempio di vettore non nullo per cui $f(x,x) = 0$ è quindi ad esempio $x = (-1,1,1)$.

Esempio 1.3. Come ultimo esempio, consideriamo la forma

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_3y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 \tag{1.17}$$

con forma quadratica associata

$$f(x,x) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \tag{1.18}$$

Come nei due esempi precedenti, consideriamo nella (1.18) tutti i termini contenenti la variabile x_1, ovvero $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Tali termini appartengono allo sviluppo del quadrato $(x_1 + x_2 + x_3)^2$, nel quale compaiono però anche i quadrati del secondo e terzo termine x_2^2 e x_3^2 e il doppio prodotto $2x_2x_3$. Possiamo quindi scrivere

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 \tag{1.19}$$

Sostituendo quindi il secondo membro di questa uguaglianza al posto di $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ nella (1.18) e ricopiando gli altri termini troviamo

$$f(x,x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 4x_2x_3 \tag{1.20}$$

ovvero, sommando i termini simili,

$$f(x,x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 \tag{1.21}$$

Ora, diversamente da quanto successo nei due esempi precedenti, il quadrato x_2^2 della seconda variabile appare con coefficiente di segno negativo e quindi così com'è non può essere termine dello sviluppo di un quadrato. Per ovviare a ciò, basta semplicemente riscrivere gli ultimi due termini con un segno meno davanti come

$$f(x,x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - [x_2^2 - 2x_2x_3] \tag{1.22}$$

e continuare ad applicare il procedimento dentro la parentesi quadra: più precisamente, gli addendi $x_2^2 - 2x_2x_3$ sono termini dello sviluppo del quadrato $(x_2 - x_3)^2$, nel quale compare in più anche il termine x_3^2, ovvero $x_2^2 - 2x_2x_3 = (x_2 - x_3)^2 - x_3^2$: sostituendo nella (1.22) si trova

$$f(x,x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - [(x_2 - x_3)^2 - x_3^2] \tag{1.23}$$

ovvero

$$f(x,x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \tag{1.24}$$

Siamo quindi anche in questo caso arrivati all'obiettivo desiderato di riscrivere $f(x,x)$ come somma algebrica di quadrati, ma diversamente dai casi precedenti, alcuni dei quadrati hanno davanti un segno meno. In tali casi, la conclusione è che la forma è indefinita. Infatti, è facile trovare un vettore x per cui $f(x,x) > 0$ e un vettore x per cui $f(x,x) < 0$: per il primo caso, basta prendere un vettore $x = (x_1, x_2, x_3)$ per cui nella (1.24) si annullano i quadrati con segno negativo, ovvero un vettore x per cui $x_2 - x_3 = 0$ (ad esempio, il vettore $x = (0,1,1)$ soddisfa tale uguaglianza e infatti $f(x,x) = 5 > 0$); per il secondo caso, basta prendere un vettore $x = (x_1, x_2, x_3)$ per cui nella (1.24) si annullano i quadrati con segno positivo (in modo che rimangano solo i termini negativi), ovvero un vettore x per cui $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ Come si vede subito risolvendo tale sistema, ad esempio il vettore $x = (1,-1,0)$ verifica tale condizione e si ha infatti $f(x,x) = -1 > 0$.

Osservazione 1.1. Sottolineiamo che l'algoritmo che abbiamo appena illustrato è tale da riscrivere una forma quadratica data su $\mathbb{R}^n$ come somma (algebrica) di al più n quadrati di espressioni lineari *indipendenti*, ed è questo a garantire che se i quadrati compaiono con segni diversi, come nell'ultimo esempio visto, allora la somma è indefinita. Infatti, se ad esempio consideriamo la forma quadratica su $\mathbb{R}^2$

$$f(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \tag{1.25}$$

applicando l'algoritmo descritto otteniamo

$$f(x,x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

e scopriamo che essa è quindi definita positiva. Tuttavia, è facile vedere che la (1.25) può essere riscritta anche come

$$f(x,x) = x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \tag{1.26}$$

ovvero come somma di 4 quadrati di cui tre positivi e uno negativo: questo non significa comunque che la forma sia indefinita in quanto se nella (1.26) proviamo ad annullare i termini positivi per ottenere un vettore x tale che $f(x,x) < 0$, dovremmo imporre $x_1 = 0, x_1 + x_2 = 0$ e $x_2 = 0$, che sono soddisfatte solo per $x = (0,0)$. Quindi in realtà, anche se ci sono quadrati di segno diverso, non si riesce a ottenere mai $f(x,x) < 0$: il motivo è che mentre seguendo l'algoritmo si ottiene sempre una somma di quadrati indipendenti e quindi si riesce sempre a trovare un vettore x che annulli i quadrati positivi e non annulli quelli negativi (e quindi ti dà $f(x,x) < 0$) e analogamente un vettore x che annulli i quadrati negativi e non annulli quelli positivi (e quindi ti dà $f(x,x) > 0$), le espressioni lineari al quadrato che compaiono nella (1.26) non sono indipendenti.

Osservazione 1.2. Un caso particolare che merita di essere segnalato è quello in cui nell'espressione della forma quadratica data non compaiono variabili al quadrato ma solo "termini misti" del tipo x_ix_j (con $i \neq j$). Ad esempio, consideriamo la forma bilineare (simmetrica) seguente su $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 \tag{1.27}$$

la cui forma quadratica associata è quindi

$$f(x,x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \tag{1.28}$$

In tal caso, un modo possibile di procedere è il seguente: scelto uno dei termini misti, ad esempio $2x_1x_2$, si compie una sostituzione sulle variabili x_1 e x_2 che vi compaiono, ponendo $x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ e $x_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$, mentre per la restante variabile x_3 si pone $x_3 = \tilde{x}_3$. La (1.28) con questa sostituzione diventa allora

$$f(x,x) = 2(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) - 2(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)\tilde{x}_3 - 2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)x_3 \tag{1.29}$$

ovvero, svolgendo i conti,

$$2\tilde{x}_1^2 - 2\tilde{x}_2^2 - 4\tilde{x}_1\tilde{x}_3 \tag{1.30}$$

L'effetto della sostituzione è stato quindi far apparire quadrati di alcune variabili, e quindi possiamo iniziare ad applicare il procedimento visto negli esempi precedenti: consideriamo nella (1.30) tutti i termini contenenti la variabile $\tilde{x}_1$, ovvero $2\tilde{x}_1^2 - 4\tilde{x}_1\tilde{x}_3$. Mettendo in evidenza il 2 per agevolare i passaggi successivi si ha $2(\tilde{x}_1^2 - 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3)$, e vediamo che l'espressione nella parentesi tonda è uguale a $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3)^2 - \tilde{x}_3^2$. La (1.30) si riscrive quindi

$$2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3)^2 - 2\tilde{x}_3^2 - 2\tilde{x}_2^2 \tag{1.31}$$

Avendo quindi ottenuto di riscrivere la (1.30) come somma (algebrica) di quadrati, riscriviamo tale somma in termini delle variabili x_1, x_2, x_3 iniziali: essendo $x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ e $x_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$, si ha $x_1 + x_2 = 2\tilde{x}_1$ e $x_1 - x_2 = 2\tilde{x}_2$ e quindi $\tilde{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ e $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$, e sostituendo nella (1.31) (ricordando anche che $\tilde{x}_3 = x_3$) si ottiene quindi

$$2\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - 2x_3^2 \tag{1.32}$$

Possiamo allora concludere che la forma f è indefinita, in quanto nell'espressione della sua forma quadratica come somma (algebrica) di quadrati compaiono sia quadrati con coefficiente positivo che quadrati con coefficiente negativo.

Ad esempio, per ottenere un vettore x per cui $f(x,x) > 0$ basta annullare i quadrati con coefficiente negativo, ovvero prendere un x tale che $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ (ad esempio $x = (1,1,0)$, per cui infatti si trova $f(x,x) = 2 > 0$), mentre per ottenere un vettore x per cui $f(x,x) < 0$ basta annullare i quadrati con coefficiente positivo, ovvero prendere un x tale che $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0$ (ad esempio $x = (1,1,1)$, per cui infatti si ha $f(x,x) = -2 < 0$).