

6/10/03

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI II (1° SEMESTRE)

(DOTT. ING. IGINO MURA)

Orario delle lezioni

Assistenza agli studenti

Esami e Colloqui

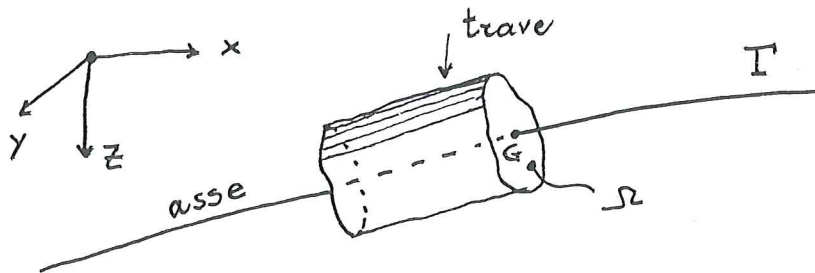
TESTI CONSIGLIATI

Per approfondire lo studio della materia che tratteremo durante il 1° semestre del Corso di Scienza delle Costruzioni II° sono consigliati i seguenti testi:

O. BELLUZZI - "Scienza delle Costruzioni", Vol. III°, Zanichelli, Bologna.

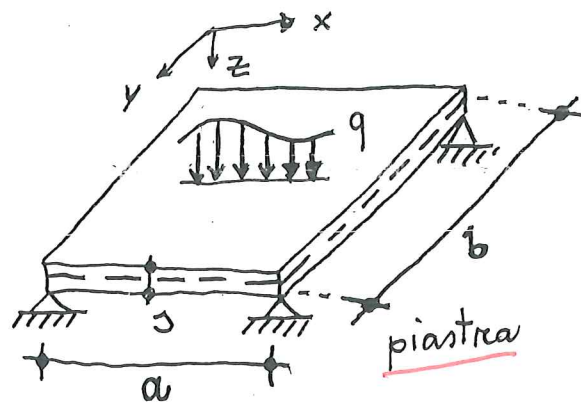
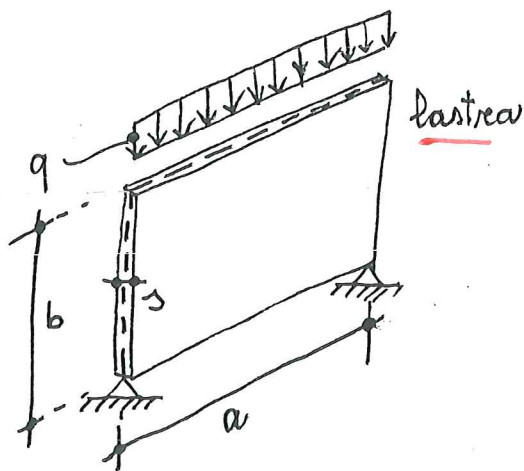
CONTENUTO DEL CORSO

Durante il Corso di **Scienza delle Costruzioni**, si affronta lo studio delle strutture cosiddette "monodimensionali", tali cioè da presentare una dimensione geometrica largamente prevalente sulle altre due. Esse sono generate a partire da una linea detta "asse" sulla quale si fa scorrere una superficie piana limitata. Detta superficie mantiene il proprio baricentro sulla linea d'asse e a questa linea rimane sempre ortogonale.

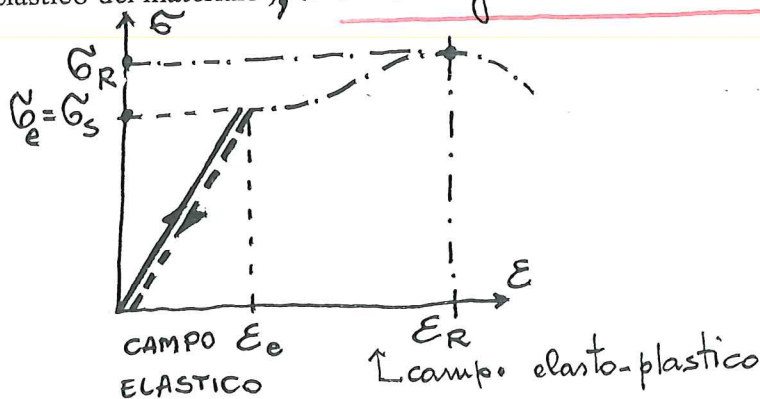


Il Corso di **Scienza delle Costruzioni II** introduce nel primo semestre allo studio delle strutture piane "bidimensionali", tali cioè da presentare due dimensioni geometriche largamente prevalenti sulla terza.

Queste strutture vengono dette lastre o piastre in dipendenza delle modalità di applicazione dei carichi esterni: per la precisione si parla di lastre quando i carichi hanno la retta d'azione agente sul piano medio della struttura, si parla di piastre quando i carichi esterni hanno retta d'azione ortogonale al piano medio della struttura. Per questioni di tempo noi limiteremo lo studio alle sole piastre.



In questa prima parte del Corso supporremo che il materiale costitutivo delle strutture abbia comportamento elastico lineare (e quindi che non venga mai superato il limite elastico del materiale), ma omogeneo e isotropo.



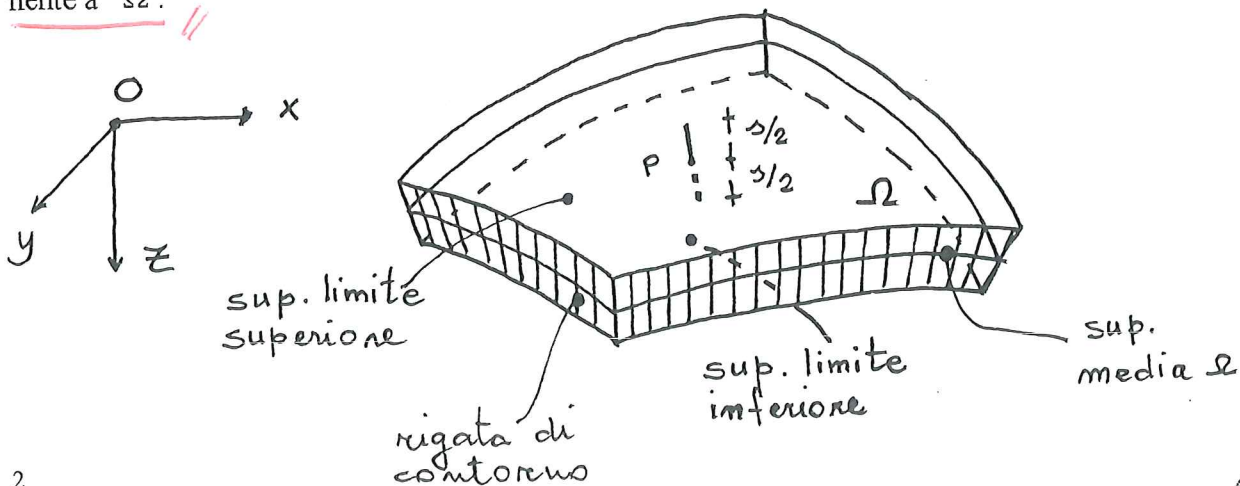
DEFINIZIONE DI PIASTRA

Sia data una superficie qualunque limitata Ω . Supponiamo che si tratti di una superficie regolare (normale alla superficie unica in ogni punto di Ω) univocamente definita nello spazio di un sistema di riferimento $O(x, y, z)$.

La superficie sia quindi costituita da punti materiali $P(x, y, z)$.

Consideriamo un segmento materiale rettilineo, di lunghezza s , ortogonale alla superficie Ω nel generico punto P . Ammettiamo che il punto medio di questo segmento (il baricentro) appartenga alla superficie Ω . *Consideriamo gli segmenti materiali che possiamo definirsi nei punti di Ω .*

!! Dicesi **piastra** il volume generato dall'insieme dei segmenti materiali rettilinei di lunghezza s ortogonali alla superficie Ω e aventi il baricentro (punto medio) appartenente a Ω .



L'insieme dei punti materiali di una piastra è quindi contenuto fra due superfici limiti e una terza superficie rigata, ad esse ortogonale.

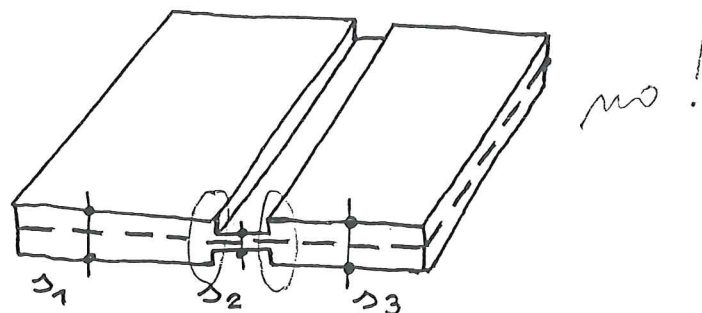
La prima superficie limite è quella "superiore", e rappresenta l'insieme dei punti materiali all'estremità superiore dei segmenti; la seconda superficie limite è quella "inferiore" e costituisce l'insieme dei punti materiali all'estremità inferiore dei segmenti. La terza superficie è la rigata di contorno.

Ovviamente la superficie Ω che ha generato la piastra è detta superficie "media".

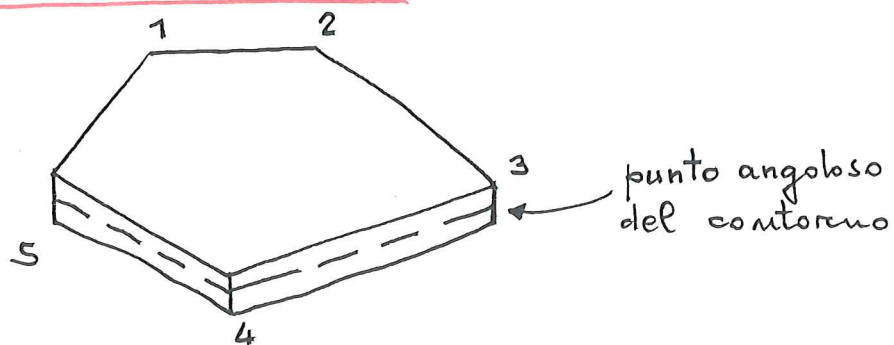
MORFOLOGIA DELLE PIASTRE PIANE

La precedente definizione di piastra è la più generale che si può dare. Essa è valida sia nel caso delle piastre piane (che verranno studiate nel 1° semestre del Corso) sia nel caso della piastre curve (che invece verranno studiate nel 2° semestre).

- 1) Per le piastre piane che prenderemo in considerazione supporremo che segmenti materiali a distanza infinitesima non possano avere differenza finita nella lunghezza: in conseguenza di ciò la lunghezza dei segmenti materiali rettilinei varia da punto a punto con continuità e anche le superfici limiti risultano regolari (normale unica in ogni punto).



- 2) Ammetteremo inoltre che i punti "singolari" (cioè "non regolari" o "angolosi") nel contorno, se esistenti, siano in numero finito.



- 3) Supporremo sempre che la lunghezza s dei segmenti materiali rettilinei sia piccola rispetto alle dimensioni della piastra, ovvero che si tratti sempre di piastre "di spessore".

sore sottile". Per dare un senso a questa valutazione si rapporta la lunghezza s ad una dimensione caratteristica della struttura.

Ad esempio nel caso delle piastre piane ammetteremo che sia:

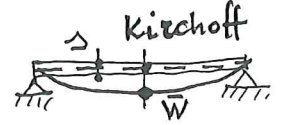
$$s \leq \frac{l_{\min}}{20} \quad \text{e} \quad \bar{W} \ll s$$

dove con l_{\min} si è indicata la più piccola dimensione planimetrica.

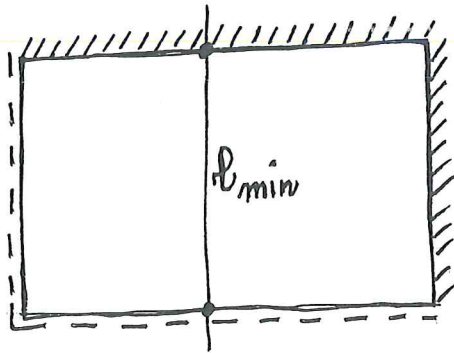
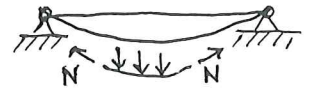
(a)



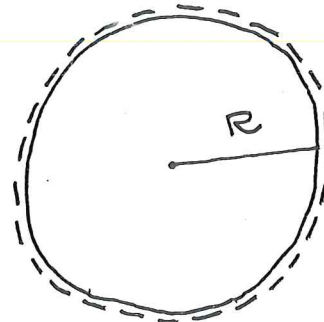
(b)



(c)



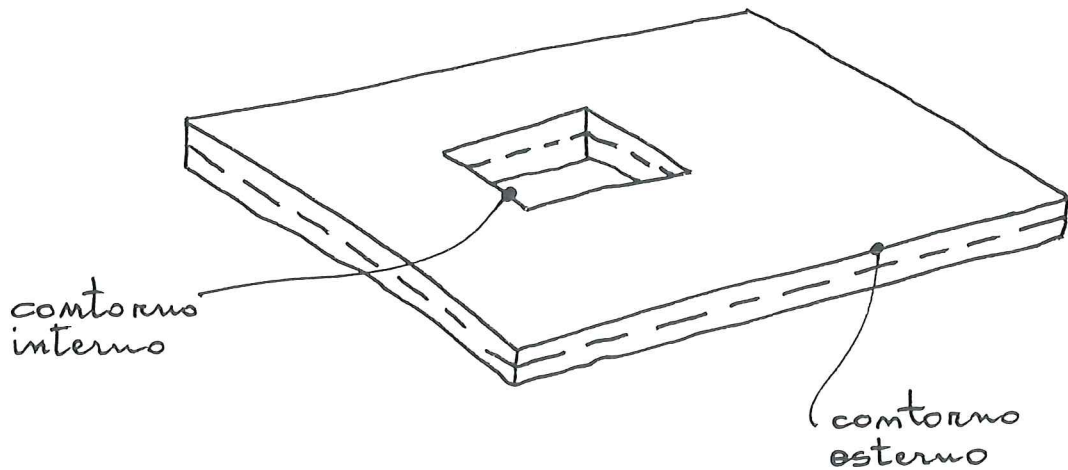
piastro rettangolare



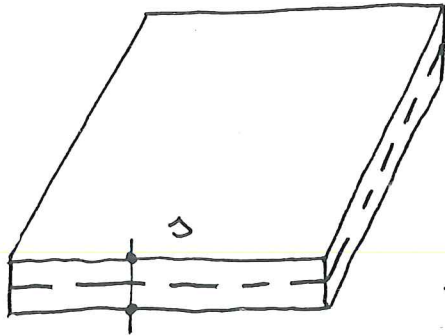
piastro circolare
($l_{\min} = 2R$)

(a) piastre "spesse" (b) piastre "sottili" (c) piastre "sottilessime"

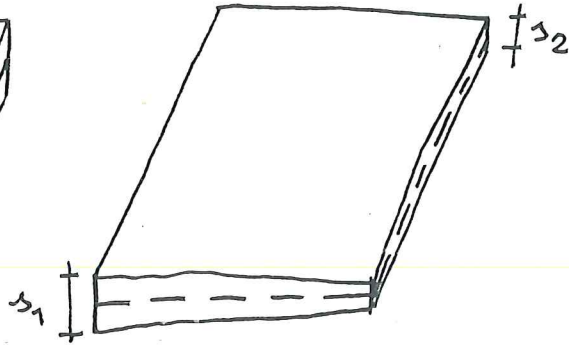
4) Morfologicamente una piastra può essere anche a più contorni. Definendo le rigate dei contorni interni allo stesso modo del contorno esterno non si ha alcuna difficoltà a definire la piastra. Supporremo che anche i contorni interni abbiano al più un numero finito di punti angolosi.



5) Quando i segmenti materiali sono tutti di uguale lunghezza si parla di piastre a spessore costante. Diversamente si parla di piastre a spessore variabile (il caso più comune è quello delle piastre a spessore variabile linearmente). Noi considereremo esclusivamente piastre del primo tipo.



pietra di spessore
costante



pietra di spessore
variabile.

8/10/03

LE PIASTRE PIANE DI SPESSORE SOTTILE

Prenderemo in considerazione piastre piane, come quella in figura, aventi le seguenti caratteristiche:

1) - piastre (tali cioè che la superficie media Ω sia coincidente con il piano x-y del sistema di riferimento $O(x, y, z)$). Risultano in conseguenza le seguenti equazioni:

$$z = 0 \quad \text{superficie media } \Omega;$$

$$z = +\frac{s}{2} \quad \text{superficie limite inferiore;}$$

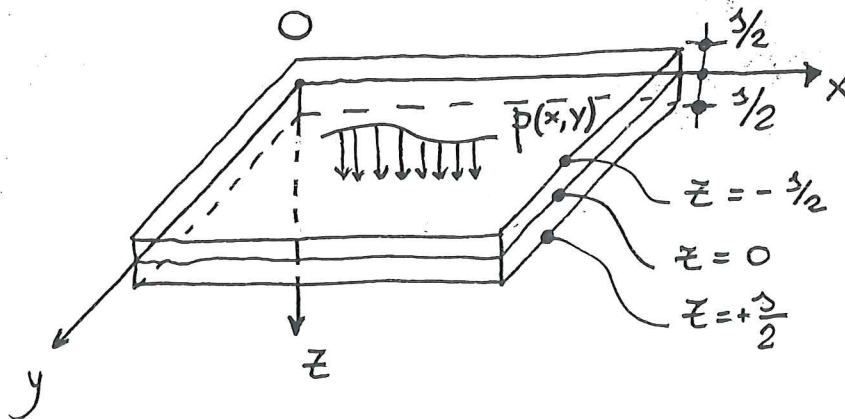
$$z = -\frac{s}{2} \quad \text{superficie limite superiore.}$$

2) - ad uno o più contorni, con i bordi che li definiscono paralleli agli assi del sistema di riferimento. Ciascun contorno deve avere al più un numero finito di punti singolari.

3) - soggetta esclusivamente a carichi ortogonali alla superficie media Ω

4) - di spessore sottile e costante s .

Supponiamo però che lo spessore s sia ancora sufficientemente grande, in modo tale che rispetto ad esso gli spostamenti che subisce la struttura nel passare dallo stato indeformato a quello deformato sotto carico siano trascurabili.



IPOSTESI FONDAMENTALI DI KIRCHOFF PER LE PIASTRE PIANE

Per le piastre come prima definite ammetteremo valide le seguenti ipotesi, dette "di Kirchoff" dal nome dello studioso che per primo, nel secolo XIX°, ha dato la definitiva sistemazione alla teoria elementare delle piastre piane:

1) segmenti materiali rettilinei ortogonali alla superficie media nello stato indeformato permangono rettilinei, ortogonali alla superficie media e di lunghezza inalterata anche nello stato deformato per effetto dei carichi esterni;

2) punti appartenenti alla superficie media, nel passaggio dallo stato indeformato a quello deformato, subiscono esclusivamente spostamenti ortogonali alla superficie media indeformata;

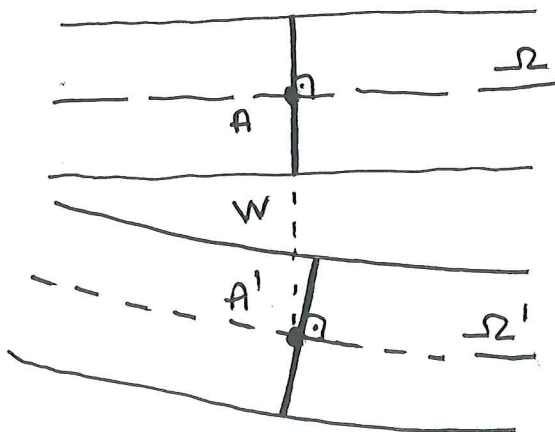
3) gli sforzi σ_z sono trascurabili nel confronto con gli sforzi σ_x e σ_y .

La prima ipotesi è l'equivalente dell'ipotesi di Bernoulli che si ammette valida nello studio delle travi, e che viene detta "di conservazione delle sezioni piane": nel caso delle piastre si parla di "ipotesi di conservazione delle normali rettilinee".

Sul piano matematico l'ipotesi di rettilineità dei segmenti materiali implica che debba essere $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, ovvero che sia trascurabile la deformazione trasversale per taglio. Evidentemente l'accuratezza dei risultati che si ottengono in conseguenza di questa ipotesi diminuisce rapidamente al crescere dello spessore della piastra.

L'inalterabilità della lunghezza dei segmenti materiali rettilinei implica sul piano matematico che debba essere $\epsilon_z = 0$.

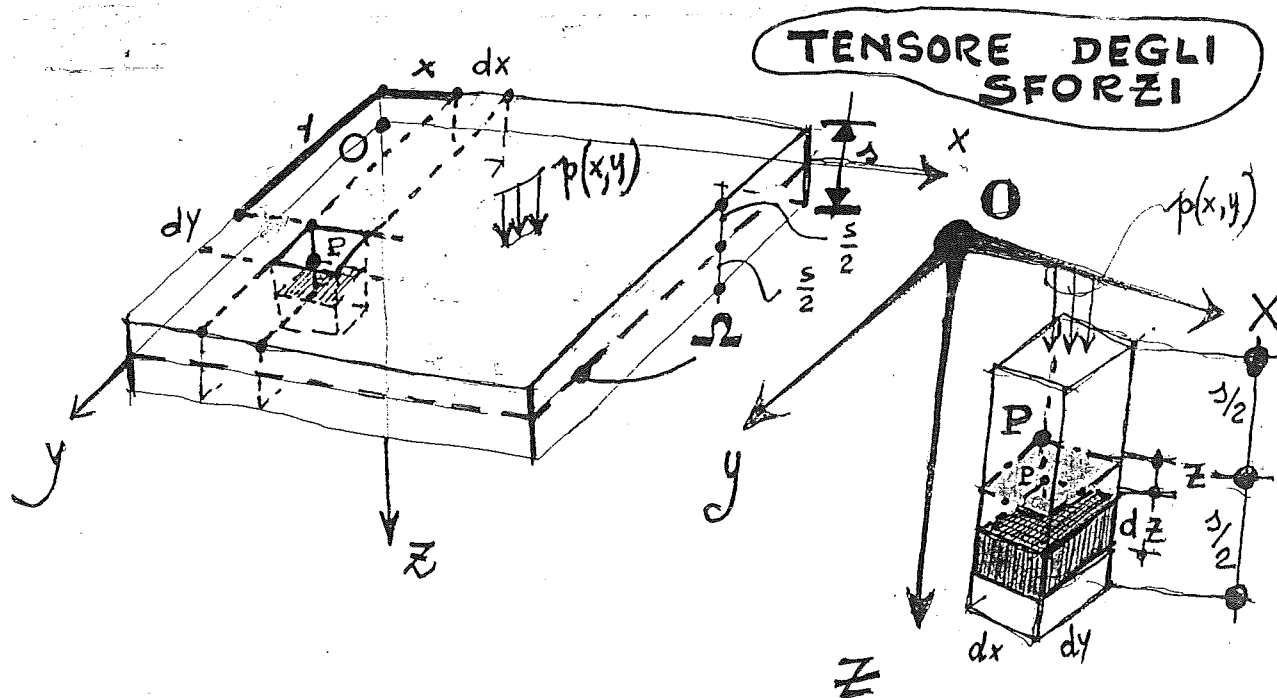
Per quanto concerne la terza ipotesi si osserva che essa non introduce alcuna condizione per la deformazione della piastra. Essa rappresenta pertanto più una semplificazione delle equazioni della teoria dell'elasticità che una ipotesi matematica (o condizione). Di fatto per le piastre elastiche di normale utilizzazione nella pratica, soggette a carichi ortogonali al piano medio e ripartiti sulla superficie, è lecito porre $\nu\sigma_z \cong 0$ nelle espressioni della legge di Hooke che definiscono ϵ_x e ϵ_y . Nelle regioni di massima dilatazione (superfici limiti) gli sforzi σ_z sono effettivamente $\ll \sigma_x, \sigma_y$.



$$w = A' - A$$

$$w \perp \Omega$$

TEORIA ELEMENTARE DELLE PIASTRE ELASTICHE DI SPESSORE SOTTILE.

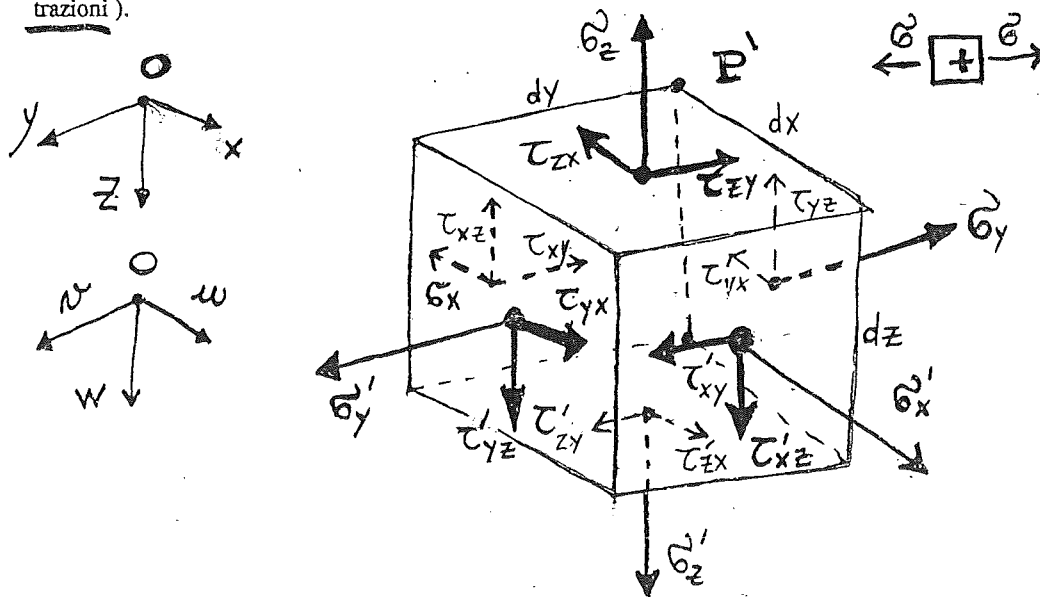


TENSORE DEGLI SFORZI

Estraiamo dalla piastra un elementino ^{di volume} infinitesimo del 2° ordine (due dimensioni infinitesime = le basi = una dimensione finita = l'altezza, pari a s).

Consideriamo un elementino di volume infinitesimo del terzo ordine (le dimensioni dell'elementino, dx , dy e dz sono tutte e tre infinitesime) come quello riportato in figura, ricavato nell'intorno di un punto P' del continuo, aventi le facce ortogonali agli assi di un sistema di riferimento $O(x, y, z)$.

Gli sforzi normali σ e le tensioni tangenziali τ , correlati a ciascuna singola faccia dell'elementino, hanno i versi come in figura, che assumiamo come positivi (per quanto concerne gli sforzi σ , in particolare, assumiamo come positive le trazioni).



Equazioni fondamentali della teoria dell'elasticità per un corpo isotropo

La "Teoria dell'elasticità" è il fondamento di numerose teorie ingegneristiche. Le componenti fondamentali di un problema di elasticità sono spesso indicate come:

- a) condizioni di equilibrio;
 - b) condizioni di congruenza;
 - c) legge costitutiva del materiale.
- } 15 equazioni
- } 15 incognite

Le condizioni di equilibrio

Le equazioni di equilibrio derivano dalle leggi di Newton particolarizzate al caso statico; nel caso in cui non sussistano forze di volume imponendo l'equilibrio alla traslazione nelle direzioni dei tre assi x , y e z si perviene a tre equazioni differenziali del primo ordine. Le tre condizioni di equilibrio alla rotazione intorno ai medesimi assi x , y e z consentono di ricavare tre relazioni che esprimono la reciprocità delle tensioni tangenziali.

Supponendo che gli sforzi varino con continuità (ovvero che spostandosi a distanza infinitesima in incrementi us di quantità infinitesime) le equazioni prima citate si scrivono:

1146

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Le condizioni di congruenza

Le condizioni di congruenza esprimono le relazioni cinematiche (dette di Cauchy) fra le deformazioni e gli scorrimenti angolari ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$) in un elemento infinitesimo del terzo ordine ricavato nell'intorno di un punto P e le componenti dello spostamento (u, v e w) del punto P medesimo, dirette come x, y e z rispettivamente.

Evidentemente indichiamo con ϵ_x la deformazione in direzione x e con γ_{xy} lo scorrimento angolare sul piano xy , etc.

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \right.$$

La legge costitutiva

La legge costitutiva traduce il legame sforzi-deformazioni del materiale. Detto legame noi lo presupponiamo elastico lineare [legge di Hooke]. Il materiale è omogeneo e isotropo.

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z) & \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_z) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \right.$$

con:

- E modulo elastico longitudinale (di Young);
- ν coeff. di contrazione trasversale (di Poisson);
- G modulo elastico trasversale.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

TEORIA ELEMENTARE DELLE PIASTRE ELASTICHE -

La dizione "Teoria elementare delle piastre elastiche" si riferisce ad una teoria approssimata, che si utilizza per determinare lo stato di sollecitazione e deformazione di corpi elastici piani aventi una dimensione (lo spessore s) "piccola" in confronto con le altre dimensioni [il minore dei lati se la piastra è rettangolare; il diametro α se la piastra è circolare] -

La approssimazione consiste nella introduzione di particolari semplificazioni fra le equazioni fondamentali della teoria matematica dell'elasticità, derivanti dalle ipotesi di KIRKHOFF):

$$\epsilon_z = 0; \quad \gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0.$$

Sul piano matematico, qualora all'insieme delle equazioni fondamentali della teoria dell'elasticità (a), (b) e (c) si aggiungano le tre precedenti equazioni, si ottiene un sistema di equazioni sovradeterminato e occorre in conseguenza trascurare tre equazioni -

Si scartano le tre relazioni della legge di Hooke che definiscono la deformazione e gli scorrimenti supposti nulli dalla ipotesi di Kirchhoff.

Inoltre: in base alla 3^a ipotesi di Kirchhoff si suppone che nelle relazioni della legge di Hooke che definiscono le dilatazioni ϵ_x e ϵ_y risulti $\nu \sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y$

Questo V_{non} deve interpretarsi come ipotesi fondamentale, poiché non introduce alcuna nuova equazione fra quelle della teoria dell'elasticità.

Ora siamo in grado di risolvere il sistema di due equazioni della legge di Hooke, che definiscono σ_x ed σ_y , rispetto a ϵ_x e ϵ_y ottenendo:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

Integriamo ora le equazioni di conguenza, tenendo conto delle equazioni di Kirchhoff.
Tenuto conto della relazione $\epsilon_z = 0$ si ottiene:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

integrando si ottiene:

$$w = w(x, y) \quad \textcircled{A}$$

ovvero: l'integrale coincide con la funzione arbitraria di integrazione.

Ⓐ L'inflessione w è quindi

funzione esclusiva di x ed y (e non di z).

In altre parole: al variare della posizione del punto lungo lo spessore della piastra lo spostamento w non varia.

Inoltre essendo $\gamma_{xz} = 0$ e $\gamma_{yz} = 0$ si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

Integrando rispetto a z :

$$\begin{cases} u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \\ v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \end{cases} \quad \textcircled{B}$$

dove $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ sono funzioni di integrazione.

(B) Le funzioni $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ definiscono uno stato
di deformazione piana per la piastra (deformazioni indi-
 pendenti da z). Questo stato di deformazione corrispon-
 de a forze che agiscono nel piano medio della
piastra oppure ad un riscaldamento uniforme.

Queste funzioni possono essere trascurate in base alla
2^a ipotesi di Kirchhoff. Poiché i punti appartenenti
alla superficie media Ω (di equazione $z=0$) hanno
solo spostamenti diretti come z due essere:

$$(u)_{z=0} = 0 \Rightarrow u_0(x, y) = 0 ; \quad (v)_{z=0} = 0 \Rightarrow v_0(x, y) = 0$$

Allora:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Le relazioni di Cauchy si possono riscrivere esprimendo le in funzione dello spostamento w :

$$w = w(x, y)$$

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Le relazioni di elasticità di Hooke si riscrivono esprimendole in funzione dello spostamento w :

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\epsilon_z = 0$$

$\gamma_{xy} \cdot G = \tau_{xy} \Rightarrow$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{2(1+\nu)} \cdot 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

▣ dalle relazioni di congruenza (Cauchy)

$$* w = w(x, y)$$

$$* u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$* v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad 9/10/03$$

$$* \epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$* \epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$* \gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

TEORIA ELEMENTARE DELLE PIASTRE ELASTICHE

▣ dalla legge costitutiva
relazioni di elasticità (Hooke)

$$\circ \sigma_x = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

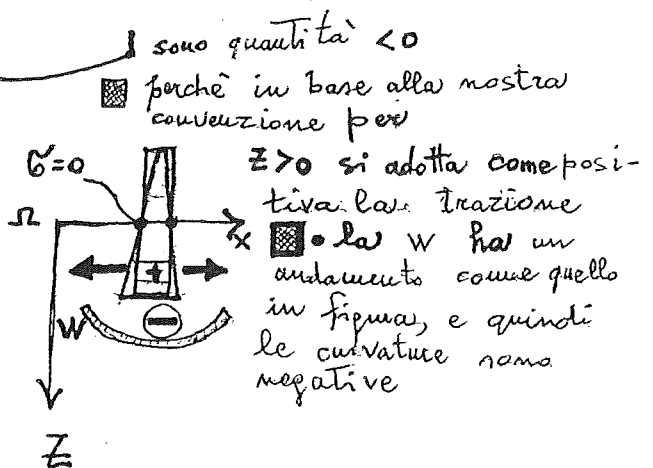
$$\circ \sigma_y = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\circ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$* \epsilon_z = 0$$

$$* \gamma_{xz} = 0$$

$$* \gamma_{yz} = 0$$



Riepilogo:

* regime di spostam.

u, v, w = comp. spost. del punto di coordin. x, y, z nel passaggio dallo stato indeformato a quello deformato.

* stato di deformazione

○ stato di sforzo

▣ dalle equazioni indefinite di equilibrio

$$\circ \tau_{xz} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \cdot \left(\frac{x^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\circ \tau_{yz} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \cdot \left(\frac{x^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\circ \sigma_z = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{x^3}{12} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{3} \right] \cdot \nabla^4 w$$

Le relazioni di equilibrio si riscrivono, esplicitando il tutto in funzione di W : (C) (2)

1ª RELAZIONE

$$-\frac{E \cdot z}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{E z}{(1+\nu)} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} +$$

$$+ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{E z}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{E z}{1+\nu} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} + 1 \right) =$$

$$= \frac{E z}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{E z}{(1+\nu)} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\nu + 1 - \nu}{1-\nu} \right) =$$

$$= \frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Integrando ottengo:

$$\tau_{zx} = \frac{E z^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) + \tau_{0zx}(x, y)$$

ovvero:

$$\tau_{zx} = \frac{E z^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \tau_{0zx}(x, y)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E z^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 W) + \tau_{0zx}(x, y)$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
operatore di Laplace

Deve essere:

$$\left(\tau_{zx} \right)_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$$

(ipotesi sui carichi ¹⁶ esterui)

$$0 = \frac{E \nu^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_w^2) + \tau_{zx}(x,y)$$

$$\tau_{zx}(x,y) = - \frac{E \nu^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_w^2)$$

quindi:

$$\tau_{zx} = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_w^2) \left(\frac{\nu^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

Analogamente dalla 2^a Relazione si
 tiene:

$$\tau_{zy} = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla_w^2) \left(\frac{\nu^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

Integrando la 3^a relazione si ottiene: (C₄)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{j^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 W) + \\ &+ \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{j^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla^2 W) = \\ &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{j^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\nabla^2 W) = \\ &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{j^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \cdot \nabla^2 (\nabla^2 W) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{j^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \cdot \nabla^4 W \end{aligned}$$

∇^4 operatore bi armonico

Integrando: $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{j^2}{8} \cdot z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} \right) \cdot \nabla^4 W + \sigma_{0z}(x, y)$$

deve essere, risultando da superficie limite inferiore scarica,

$$\left(\sigma_z \right)_{z=+j/2} = 0$$

quindi:

$$0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{j^3}{16} - \frac{j^3}{6 \cdot 8} \right) \cdot \nabla^4 W + \sigma_{0z}(x, y)$$

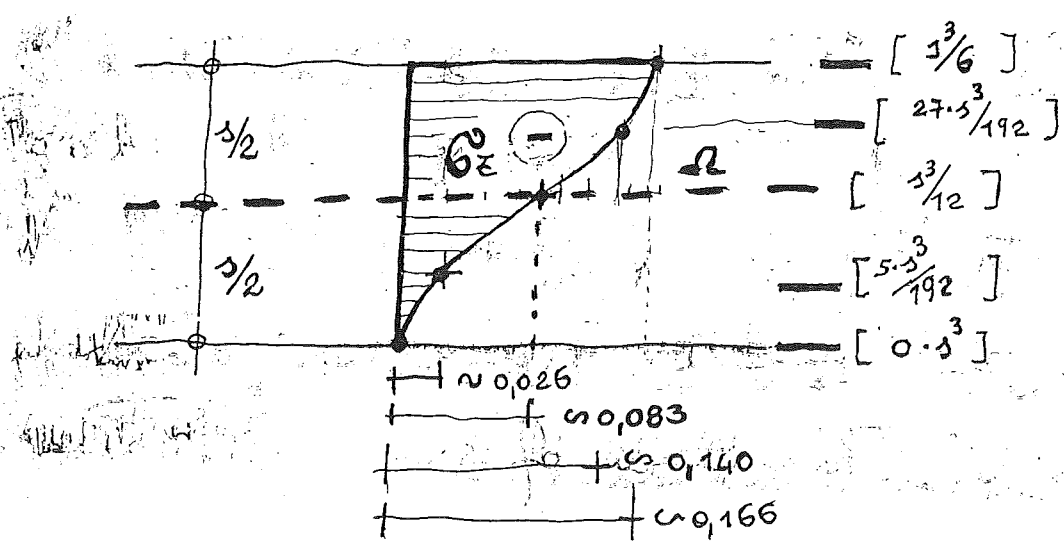
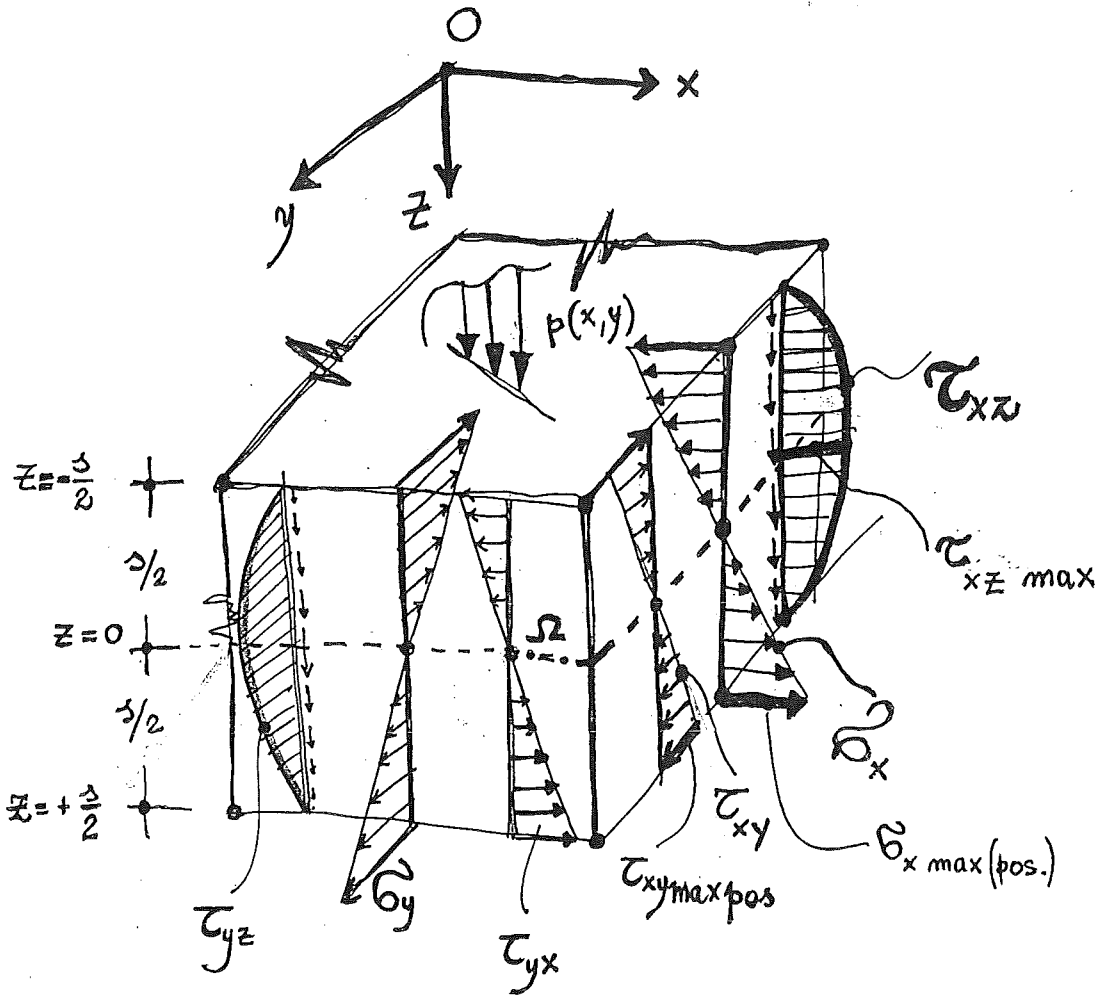
si ottiene:

$$\sigma_{0z}(x, y) = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{2}{48} j^3 \right) \cdot \nabla^4 W = - \frac{E \cdot j^3}{(1-\nu^2) 24} \cdot \nabla^4 W$$

E in definitiva:

$$\sigma_z = \frac{-E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{j^3}{12} - \frac{j^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right] \nabla^4 W$$

ANDAMENTO DEGLI SFORZI AGENTI SULLE FACCE LATERALI

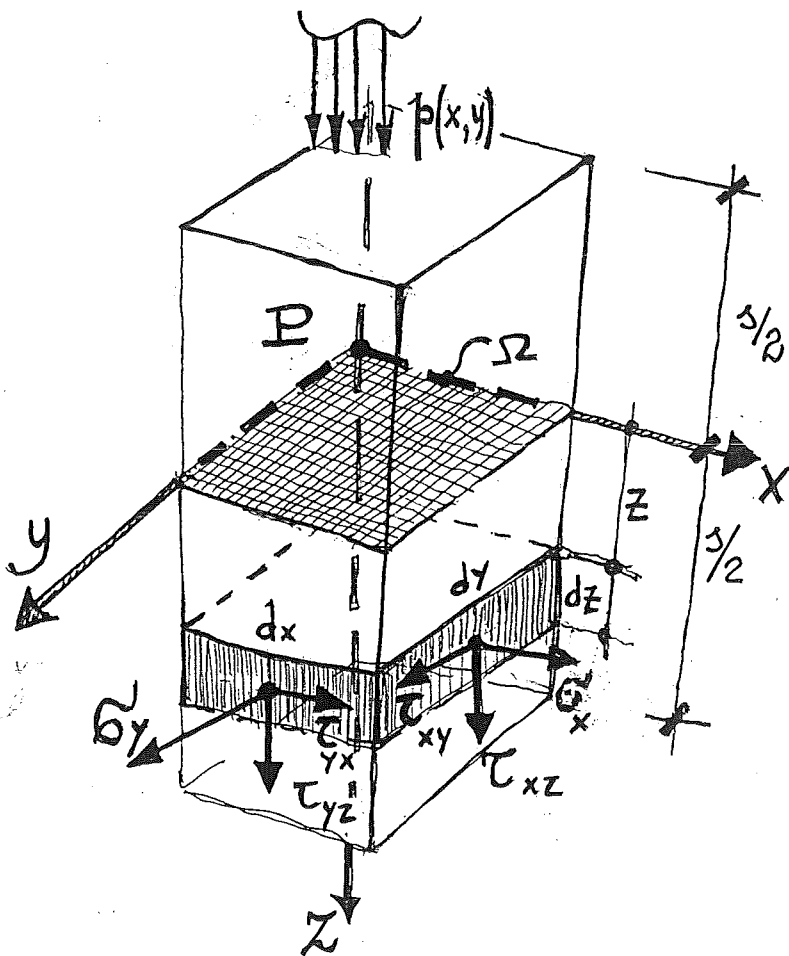


LE COMPONENTI DI AZIONE INTERNA

② Consideriamo le relazioni che forniscono σ_x , σ_y e τ_{xy} in funzione di w (derivanti dalla legge di Hooke) e le relazioni che forniscono τ_{xz} e τ_{yz} in funzione di w (derivanti dalla integrazione di due equazioni indefinite di equilibrio).

① Procediamo a questo punto alla definizione delle "componenti di azione interna" per le piastre piatte!

Facciamo riferimento a un elemento di piastra di lati dx e dy e altezza z pari allo spessore (quindi un elemento di volume infinitesimo del 2° ordine).



$$\sigma_x = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 w \right) \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 w \right) \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

(*) con come gli sforzi σ e τ definiscono lo stato di sollecitazione per l'elemento infinitesimo del 3° ordine, le componenti di azione interna definiscono lo stato di sollecitazione per l'elemento infinitesimo del 2° ordine.

Consideriamo l'elemento superficiale di altezza dz dalla superficie media Ω e di altezza dz , sulla faccia di normale x ; esso ha area $dy \cdot dz$ (quindi è infinitesimo del secondo ordine).

Consideriamo le risultanti degli sforzi: $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$ correlate al baricentro dell'elemento di superficie.

Prevedo quanto sopra: le "componenti di azione interna" rappresentano le risultanti ed i momenti risultanti degli sforzi agenti sulla faccia, rapportate alla larghezza dy della faccia stessa.

Consideriamo la faccia di normale x .

azione normale in direzione x N_x risultante di σ_x
 Se $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$ è la forza elementare agente sull'elemento del 2° ordine a distanza z , sommando su tutta la superficie e dividendo per dy si ottiene:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} (\sigma_x \cdot dy \cdot dz) \cdot \frac{1}{dy} = N_x \rightarrow N_x = \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} \sigma_x \cdot dz$$

Possiamo semplificare dy contenuto dentro integrale con dy fuori integrale poiché quantità costante e indipendente da z .

risultante di τ_{xy}

azione tagliante agente // alla superficie media N_{xy}

Se $\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$ è la forza elementare agente nell'elemento del secondo ordine a distanza z da Ω si ha in analogia:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} (\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz) \cdot \frac{1}{dy} = N_{xy} \rightarrow N_{xy} = \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} \tau_{xy} \cdot dz$$

azione tagliante in direzione z T_{xz} risultante di τ_{xz}

Se $\tau_{xz} \cdot dy \cdot dz$ è la forza elementare agente sull'elemento del secondo ordine a distanza z da Ω si ha:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} (\tau_{xz} \cdot dy \cdot dz) \cdot \frac{1}{dy} = T_{xz} \rightarrow T_{xz} = \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} \tau_{xz} \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ T_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz$$

Sempre con riferimento alla faccia di normale x calcoliamo i momenti risultanti degli sforzi rispetto alla superficie media Ω . È facile vedere che solamente le forze elementari

$\sigma_x \cdot dy dz$ e $\tau_{xy} \cdot dy dz$ hanno braccio $z + \frac{dz}{2} \approx z$ rispetto alla superficie media Ω . La forza elementare $\tau_{xz} \cdot dy dz$ ha retta d'azione ortogonale alla superficie media Ω ; essendo nullo il braccio è nullo anche il suo momento rispetto a Ω .

momento flettente M_x

È dato evidentemente dalla somma dei momenti delle forze elementari $\sigma_x \cdot dy dz$ rispetto alla superficie media Ω , rapportata alla lunghezza dy :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} (\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot z) \cdot \frac{1}{dy} = M_x \rightarrow M_x = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

momento torcente M_{xy}

È dato dalla somma dei momenti delle forze elementari $\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$ rispetto alla superficie media Ω , rapportata alla lunghezza dy :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} (\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot z) \cdot \frac{1}{dy} = M_{xy} \rightarrow M_{xy} = \int_{-1/2}^{+1/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{+1/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \cdot dz$$

Formalmente per la faccia di normale x si possono definire 5 componenti di azione interna.



Operando in modo perfettamente analogo, per la faccia di normale y , si possono definire formalmente 3 risultanti degli sforzi e 2 momenti risultanti (valutati rispetto alla superficie media Ω):

$$N_y = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma_y \cdot dz \quad \text{--- azione normale secondo } y$$

$$N_{yx} = \int_{-1/2}^{+1/2} \tau_{yx} dz \quad \text{--- azione tagliante // alla sup. media}$$

$$T_{yz} = \int_{-1/2}^{+1/2} \tau_{yz} dz \quad \text{--- azione tagliante secondo } z, \text{ sulla faccia di normale } y.$$

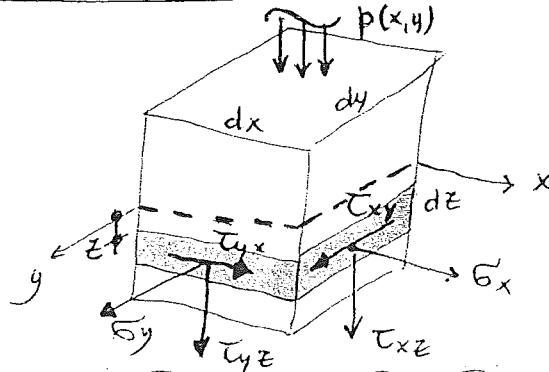
$$M_y = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma_y \cdot z dz \quad \text{--- momento flettente}$$

$$M_{yx} = \int_{-1/2}^{+1/2} \tau_{yx} z dz \quad \text{--- momento torcente}$$

DETERMINAZIONE DELLE COMPONENTI DI AZIONE INTERNA

Riepilogo

13/10/03



Si è introdotto:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ T_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-z/2}^{+z/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-z/2}^{+z/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-z/2}^{+z/2} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \int_{-z/2}^{+z/2} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix} \cdot z dz$$

Essendo:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{-Ez}{1+\nu} \cdot \frac{\partial w}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} = \frac{-E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{-E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

LE "RELAZIONI DI ELASTICITA'" PER LE PIASTRE PIANE SOTILI

Tenuto conto delle espressioni di σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} si ottiene per le risultanti degli sforzi:

$$N_x = N_{xy} = 0$$

$$\begin{aligned} T_{xz} &= -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{\sigma^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) dz = \\ &= -\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \cdot \underbrace{\left[\frac{\sigma^2}{8} \cdot z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} \right]}_{\frac{\sigma^3}{12}} \Big|_{-h/2}^{+h/2} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$T_{xz} = -\frac{E \sigma^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$B = \frac{E \sigma^3}{12(1-\nu^2)}$$

coefficiente di rigidità flessionale della piastra

In modo perfettamente analogo si calcolano i momenti risultanti; si ottiene:

$$M_x = + \int_{-s/2}^{+s/2} \sigma_x \cdot z \, dz = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-s/2}^{+s/2} z^2 \, dz =$$

$$= - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-s/2}^{+s/2} =$$

$$= - \frac{E \cdot s^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\left[\frac{z^3}{3} \right]_{-s/2}^{+s/2} = \frac{+s/2^3}{24} - \left(- \frac{s^3}{24} \right) = \frac{s^3}{12}$$

analogamente:

$$M_{xy} = \int_{-s/2}^{+s/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz = - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-s/2}^{+s/2} z^2 \, dz =$$

$$= - \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{s^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - B (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Risulta analogamente tenuto conto delle espressioni di σ_y , $\tau_{yx} (= \tau_{xy})$ e τ_{yz} :

$$N_y = N_{yx} = 0$$

$$T_{yz} = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{yx} (= M_{xy}) = -B(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Formalmente: le componenti di azione interna non nulle sono \mathbf{S} : $M_x, M_y, M_{xy} (= M_{yx}), T_x (= T_{xz})$ e $T_y (= T_{yz})$.

① Formalmente è possibile definire 5 componenti di azione interna per la faccia dell'elementino di normale x e 5 per la faccia di normale y . In totale si definiscono 10 componenti. Essendo poi identicamente nulle 4 di queste componenti si hanno 6 componenti diverse da zero. Infine poiché $M_{xy} = M_{yx}$, a causa della reciprocità delle tensioni tangenziali, si conclude che le componenti di azione interna indipendenti si riducono a 5: $M_x, M_y, M_{xy}, T_{xz}, T_{yz}$

② Nelle precedenti relazioni si è posto:

$$B = \frac{E I^3}{12(1-\nu^2)} \quad \frac{[F] \cdot [L^3]}{[L^2]} = [F] \cdot [L]$$

Il coefficiente B, che dipende dalle caratteristiche geometriche della piastra e del materiale da cui è costituito (caratteristiche elastiche) è detto coefficiente di rigidezza flessionale della piastra.

③ È facile rilevare, tenuto conto delle relazioni dette integrali, che le risultanti di azione interna prima definite hanno dimensioni $\frac{[F] \cdot [L]}{[L^2]} = \frac{[F]}{[L]}$ ovvero "forze su lunghezza".

Analogamente i momenti risultanti hanno dimensioni $\frac{[F] \cdot [L][L]}{[L^2]} = [F]$ ovvero di "forze".

Quanto sopra è conseguenza del fatto che le componenti di azione interna sono state definite per unità di lunghezza sulla superficie media -

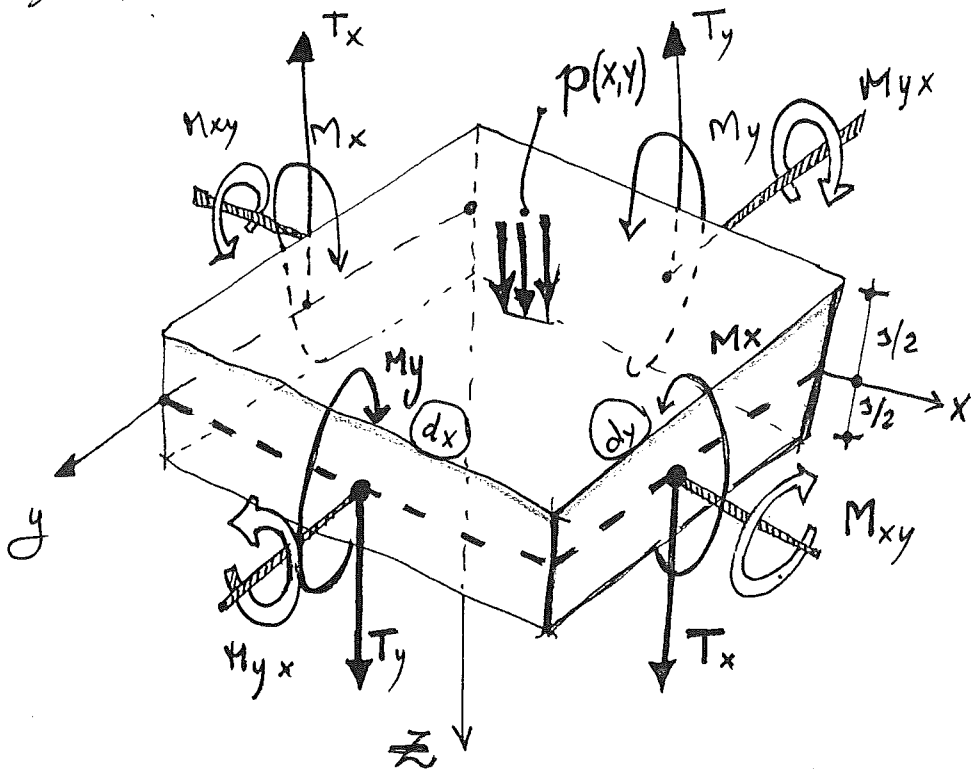
(4) I versi positivi delle componenti di azione interna risultano nell'elemento di seguito disegnato. Le componenti di azione interna definiti come compiutamente lo stato di sollecitazione nell'elemento.

15/10/03

$$T_x \equiv T_{xz}$$

$$T_y \equiv T_{yz}$$

15/10/03



$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 w \right) \left(\frac{z}{8} - \frac{z^3}{6} \right)$$

$$\tau_{yz} = \dots$$

Le precedenti relazioni, che legano i momenti alle curvature sono dette "equazioni costitutive" o "relazioni di elasticità".

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

della teoria classica delle piastre piane.

Non esistono equazioni costitutive in tale teoria che

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ -\frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{Bmatrix}$$

correlino le forze taglianti alle corrispondenti deformazioni. Queste ultime sono supposte nulle per ipotesi (con $\gamma_{xz} \equiv \gamma_{yz} \equiv 0$) e le precedenti relazioni esprimono equazioni di equilibrio.

Queste equazioni di equilibrio si esprimono in modo semplice - Derivando ad esempio l'espressione di M_x rispetto ad x e quella di M_{xy} rispetto a y si ottiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -B(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

Sommando le precedenti quantità risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= -B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \\ &= -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -B \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) = T_x \end{aligned}$$

ovvero:

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Analogamente può ottenersi:

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Mostriamo nel seguito che le due precedenti relazioni esprimono condizioni di equilibrio

⑤ È facile osservare quali sono i legami fra gli sforzi e le componenti di azione interna.

● Considerando ad esempio τ_{xz} e T_x in P_{ha} :

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s^3}{12} \cdot \frac{12}{s^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{\frac{s^3}{12}} \cdot \left(\frac{s^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

(Analogamente per la faccia di normale y : $\tau_{yz} = \frac{T_y}{\frac{s^3}{12}} \left(\frac{s^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$)

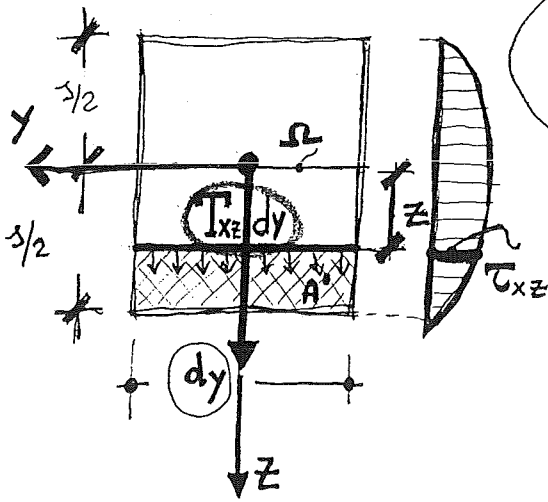
● Considerando poi σ_x ed M_x in P_{ha} :

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s^3}{12} \cdot \frac{12}{s^3} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot z$$

$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot z}{\frac{s^3}{12}}$$

(Analogamente per la faccia di normale y : $\sigma_y = \frac{M_y \cdot z}{\frac{s^3}{12}}$)

È facile mostrare che le precedenti relazioni di τ_{xz} e σ_x altro non esprimono se non le formule di Jourawsky e di Navier.

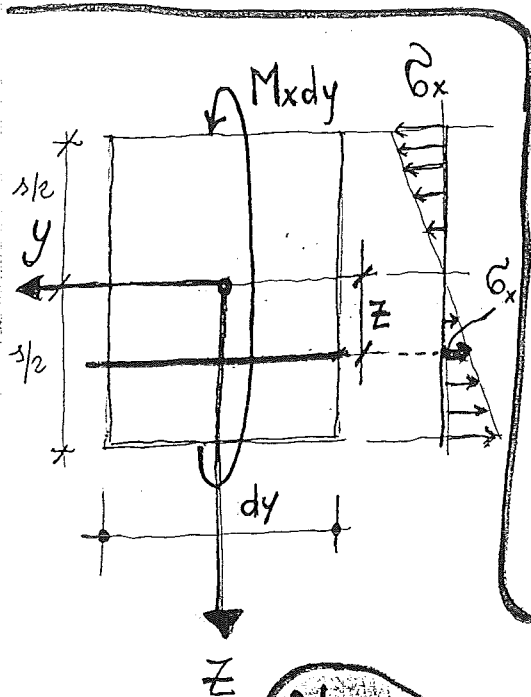


$$\tau_{xz} = \frac{T_{xz} dy \cdot S_y(A')}{dy \cdot J_y}$$

$$\tau = \frac{T \cdot S_n}{b \cdot J_n}$$

Jourawsky

$$\tau_{xz} = \frac{T_{xz} dy \cdot \left(\frac{s}{2} - z\right) \cdot dy \cdot \left(z + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} - z\right)\right)}{dy \cdot \frac{1}{12} dy \cdot s^3}$$



$$= \frac{T_{xz} \cdot \left(\frac{s}{2} - z\right) \left(\frac{s}{4} + \frac{z}{2}\right)}{\frac{s^3}{12}}$$

$$= \frac{T_{xz} \cdot \left(\frac{s^2}{8} + \frac{s \cdot z}{4} - \frac{s \cdot z}{4} - \frac{z^2}{2}\right)}{\frac{s^3}{12}} = \frac{T_{xz} \cdot \left(\frac{s^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right)}{\frac{s^3}{12}}$$

Navier

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}$$

$$\sigma_x = \frac{M_x dy \cdot z}{J_y} = \frac{M_x dy \cdot z}{\frac{1}{12} dy \cdot s^3} = \frac{M_x \cdot z}{\frac{s^3}{12}}$$

In generale:

- M_x
- M_y
- $M_{yx} = M_{xy}$
- $T_x (= T_{xz})$
- $T_y (= T_{yz})$

$W = W(x, y)$

15/10/03

Sono le cinque componenti di azione interna che definiscono lo stato di sforzo in una piastra e lo individuiamo computatamente.

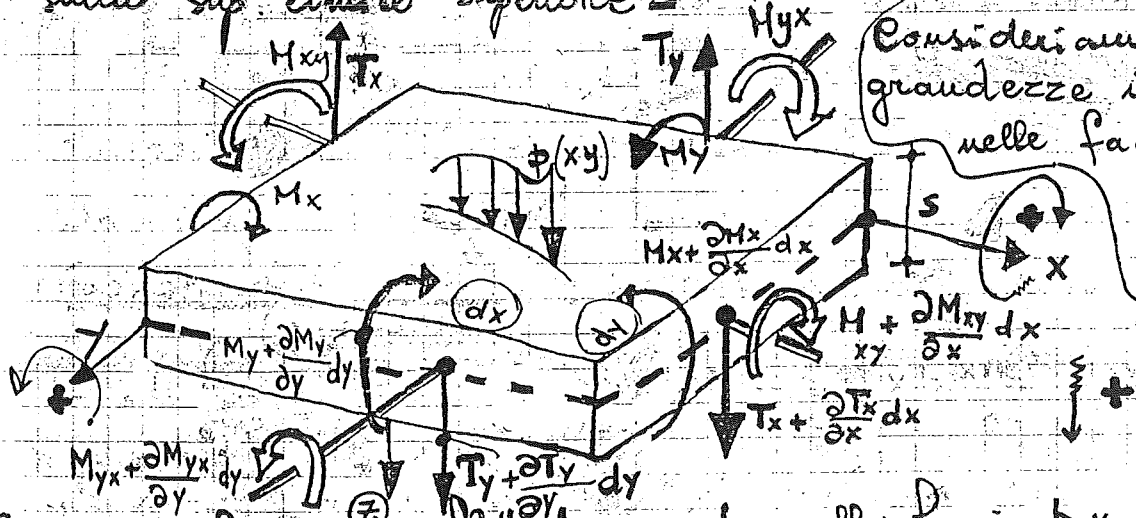
EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER UN ELEMENTINO DI VOLUME INFINITESIMO DEL 2° ORDINE

① Consideriamo un elementino di volume infinitesimo del 2° ordine ritagliato nell'intorno di un punto $P(x, y)$ della superficie media.

Sia $p(x, y)$ il carico esterno agente sulla sup. limite superiore.

Dovendo scrivere equazioni di equilibrio

Consideriamo le grandezze incrementate nelle facce di coordinate $(x+dx)$ e $(y+dy)$.



Sia M_x il mom. flettente agente nella faccia dx , momento risultante delle σ_x agenti, che evidentemente è funzione del posto (cioè di x e y).

Consideriamo il momento torcente M_{xy} , momento

(anche se nel disegno per comodità è stato)

Consideriamo T_x risultante degli sforzi tangenz. T_{xz} . Anche M_{xy} e T_x sono, evidentemente, funzioni del posto. Analogamente consideriamo le componenti di azione interne nella faccia $\perp y$: M_y , $M_{yx}(=M_{xy})$ e T_y .

2) Scriviamo le condizioni di equilibrio per l'elemento di volume del 2° ordine sotto l'azione delle forze

prima considerate. Nello spazio, a 3 dimensioni, si hanno a disposizione 6 equazioni di equilibrio:

3 alla traslazione in direzione degli assi x, y, z
3 alla rotazione intorno ai tre assi x, y, z .

Le condizioni di equilibrio alla traslazione lungo x e y sono identicamente verificate. Basta considerare la direzione $\parallel z$ (e $\perp \Omega$) delle forze agenti ($T_x \cdot dy$, $T_y \cdot dx$, $p(x,y) \cdot dx \cdot dy$).

Per la traslazione lungo z bisogna scrivere l'equazione.

L'equilibrio alla rotazione intorno all'asse z risulta verificato { i vettori momento giacciono in Ω e sono $\perp z$ }
 Si devono invece imporre le condizioni di equilibrio alla rotazione intorno agli assi x e y .

Quindi possiamo scrivere solo 3 equazioni:

rot. int. asse y :

$$\left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{yx} dy + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dx = - M_{yx} dx = T_x dy \cdot dx - \frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx - p(x,y) dx dy \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

semplificando e dividendo per $dx dy$ (area elementare) si ottiene:

di ordine superiore si trascurano

equazione indefinita di equilibrio alla rotazione int. y

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = T_x \quad (1)$$

eq. rot. asse x

$$\begin{aligned} & \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \\ & - M_{xy} dy - \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx dy - \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \frac{dy}{2} - p(x,y) dx dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

equazione indefinita di equilibrio alla rot. per l'asse x:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y \quad (2)$$

eq. tr. asse z

Equazione di equilibrio alla traslazione secondo z. sia positivo il verso di z:

$$\begin{aligned} & \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy - T_x dy + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx - T_y dx + \\ & + p \cdot dx \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

dividendo per l'elemento di area $dx dy$:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = p \quad (3) \text{ equazione indefinita di equilibrio traslazione lungo z.}$$

③ Poiché per definire completamente lo stato di sforzo nell'elemento di volume del 2° ordine n. devono calcolare 5 grandezze e n. hanno a disposizione solo 3 equazioni di equilibrio n. dice che il problema ha 2 gradi di iperstaticità interna.

L'EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO ELASTICO

Se $p = p(x, y)$ è il valore del carico ripartito in un punto generico della piastra, per l'equilibrio alla traslazione verticale dell'elemento di piastra abbiamo visto che deve risultare:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p$$

Sostituendovi le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno all'asse x e intorno all'asse y , che sono:

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y)$$

che rappresenta l'equazione indefinita di equilibrio per le piastre [sintetizza le tre precedenti: 1 equazione, 3 incognite]

Tenuto conto delle espressioni di M_x , M_y e M_{xy} in funzione della deformata $w = w(x, y)$ della superficie elastica (c.d.

relazioni di elasticità):

$$\begin{cases} M_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -B(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

si perviene ad un sistema di 4 equazioni in 4 incognite ($M_x, M_y, M_{xy}, w(x, y)$). Sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[-B (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -P(x, y)$$

Ovvero:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{P}{B}$$

È in definitiva, dopo effettuate le semplificazioni:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{B}$$

che può anche scriversi:

$$\nabla^4 w = \frac{P}{B}$$

L'espressione ottenuta è l'equazione differenziale, alle derivate parziali, del 4° ordine, che regge il problema della determinazione della superficie elastica $w(x, y)$. Essa è detta:

"EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO ELASTICO DELLE PIASTRE PIANE"

poiché sintetizza le condizioni di equilibrio e quelle di congruenza.

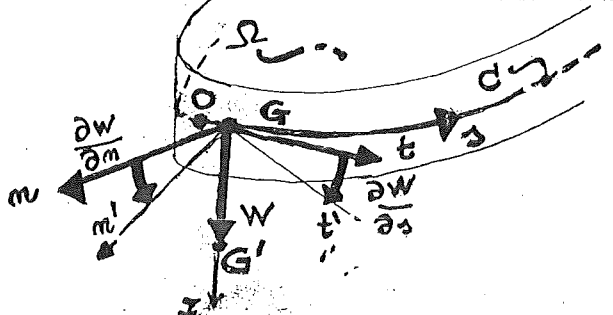
La precedente equazione è anche nota come equazione di Germain-Lagrange.

LE CONDIZIONI AL CONTORNO

16/10/03

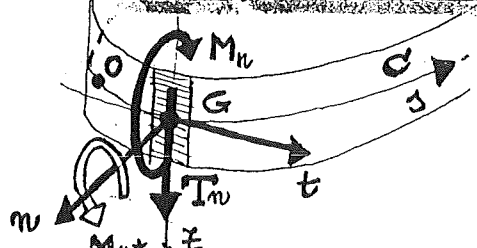
- Per la soluzione del problema è necessario associare alla equazione indefinita di equilibrio elastico $\nabla^4 w = p/B$ le condizioni al contorno relative alla linea di frontiera C che delimita la superficie media Ω della piastra, che la funzione w deve rispettare.
- Facciamo l'ipotesi che la linea di frontiera contenga al più un numero finito di vertici singolari o spigoli.
- Le condizioni al contorno possono essere nei punti regolari:

di tipo "cinematico":



interessano parametri del movimento al bordo: quindi lo spostamento w al bordo, la rotazione della normale n ($\frac{\partial w}{\partial n}$) e la rotazione della tangente t ($\frac{\partial w}{\partial s}$).

di tipo "statico":



interessano in questo caso le caratteristiche della sollecitazione agente sul contorno: il momento flessionale M_n , il momento torcente M_{nt} e l'azione tagliante T_n .

di tipo "misto":

sul contorno è imposto un determinato legame fra la w e:

- 1) le caratteristiche delle sollecitazioni;
- 2) i parametri dello spostamento.

CONDIZIONI AL CONTORNO CINEMATICHE: IL BORDO INCASTRATO

È immediato a questo punto osservare che il numero massimo delle condizioni cinematiche, che possono imponersi indipendentemente sul contorno, è pari a due. I parametri del movimento che possono assumere valori indipendenti

sono soltanto lo spostamento w e la rotazione normale $\frac{\partial w}{\partial n}$; la rotazione tangente $\frac{\partial w}{\partial s}$ risulta infatti automaticamente nota se in un tratto del contorno C è assegnato in ogni punto lo spostamento w . Infatti: assegnare tutti i valori di spostamento w significa anche fornire la rapidità di variazione di w al crescere di s lungo C .

Noi ammetteremo di aver a che fare con bordi rigidi.
 Detti bordi permanenti a livello e non sono soggetti a rotazione della normale n .

$$(w)_C = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_C = 0$$

← BORDO INCASTRATO

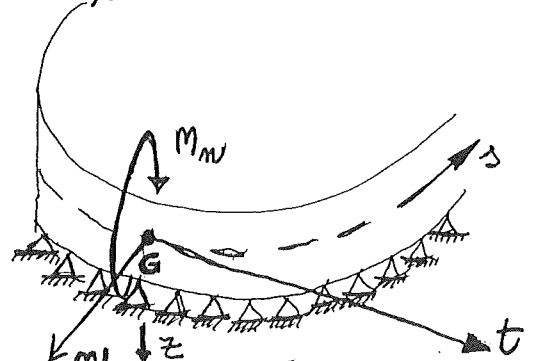
essendo C la curva che individua il contorno -

CONDIZIONI AL CONTORNO MISTE:

I LATI SEMPLICEMENTE APPOGGIATI

Il solo parametro cinematico che può essere assegnato è lo spostamento w dei punti del contorno; la rotazione della tangente t al contorno è infatti automaticamente assegnata una volta imposti i parametri dello spostamento. La rotazione della normale n non può essere assegnata essendo consentita dal vincolo (non nota "a priori").

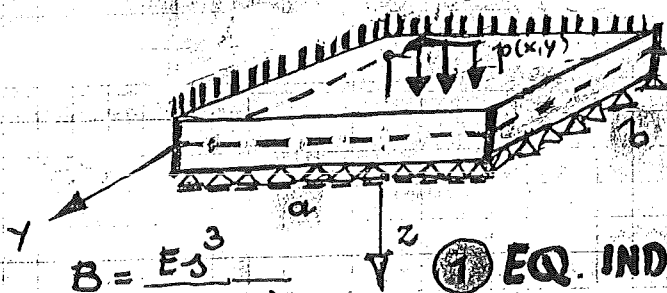
La sola caratteristica di sollecitazione che può essere assegnata è il momento flettente M_n : esso lavora per il solo parametro di movimento consentito dal vincolo =



$$\begin{aligned} (w)_C &= 0 \\ (M_n)_C &= 0 \end{aligned}$$

Quindi: se il vincolo è rigido:
 se è piroico:

Usempro



Supponiamo $p(x, y) = p_0 = \text{const.}$

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

① EQ. INDEF. DI EQ.

$$\nabla^4 w = \frac{p_0}{B}$$

② CONDIZIONI AL CONTORNO CINEM. INCASTRO

lato perfettamente incastrato \perp a x .

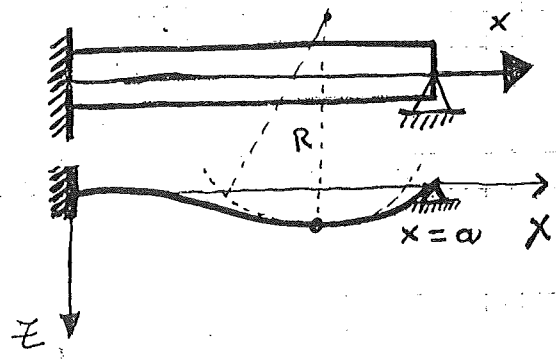
$$\left(w \right)_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

lato perf. incastrato \perp a y .

$$\left(w \right)_{y=0} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

③ CONDIZIONI AL CONTORNO MISTE: LATI SEMPLICEMENTE APPOGGIATI

Per i lati semplicemente appoggiati abbiamo:



lato appoggiato \perp a x .

$$(w)_{x=a} = 0$$

$$(M_x)_{x=a} = 0$$

esprimendo M_x in termini di spostamento w , essendo B una costante:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$$

Le derivate seconde sono le curvatures (inverso dei raggi di curvatura.)

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ è la curvat. delle traccie di Ω , lungo la sezione // al piano yz ;

per il lato appoggiato $x=a$: $(w)_{x=a} = 0$, quindi $(\frac{\partial w}{\partial y})_{x=a}, (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})_{x=a}, \dots$ sono nulle.

allora l'equazione si semplifica:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} + \cancel{v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}} = 0$$

quindi si ha:

$$\boxed{(w)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} = 0}$$

lato semplicemente appoggiato \perp a x

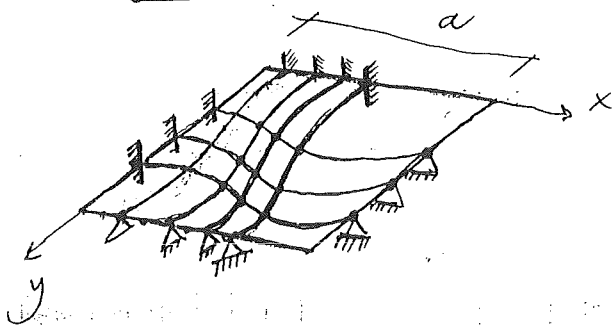
per il lato y : $y=b$:

$$(w)_{y=b} = 0; \quad (M_y)_{y=b} = \left[-B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{y=b} = 0$$

Ripetendo il di scorso: $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0$ e si ottiene:

$$\boxed{(w)_{y=b} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0}$$

lato semplicemente appoggiato \perp a y



Le derivate seconde sono le curvatures (inverso dei raggi di curvatura.)

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ è la curvat. delle traccie di Ω ,
lungo la sezione // al piano yz ;

per il lato appoggiato $x=a$: $(w)_{x=a} = 0$,
quindi $(\frac{\partial w}{\partial y})_{x=a} = 0, (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})_{x=a} = 0 \dots$ sono nulle.

allora l'equazione si semplifica:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} + \cancel{v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}} = 0$$

quindi si ha:

$$\boxed{(w)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} = 0}$$

lato semplicemente
appoggiato \perp a x

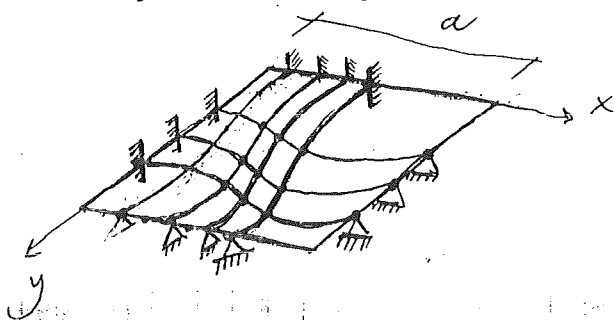
per il lato $y=b$:

$$(w)_{y=b} = 0; (M_y)_{y=b} = \left[-B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{y=b} = 0$$

Ripetendo il di scorso: $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0$ e si ottiene:

$$\boxed{(w)_{y=b} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0}$$

lato semplicemente
appoggiato \perp a y

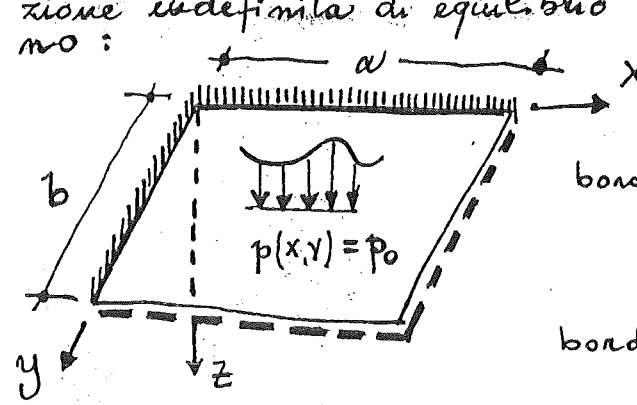


Riepilogo: Condizioni al contorno:

- ① cinematiche (bordo incastrato)
- ② statiche (bordo libero)
- ③ miste (es. bordo appoggiato)
(" vincolo di pattino)

16/10/03

Abbiamo discusso le condizioni al contorno nei casi ① e ③. Per una piastre rettangolare presentante due bordi incastrati e due appoggiati, abbiamo formulato il problema: trovare $w = w(x,y)$ che soddisfi sia l'equazione indefinita di equilibrio elastico sia le Condizioni al contorno:



$$\nabla^4 w = \frac{p_0}{B}$$

bordo inc. $\perp x$:

$$\begin{cases} (w)_{x=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \end{cases}$$

bordo inc. $\perp y$:

$$\begin{cases} (w)_{y=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \end{cases}$$

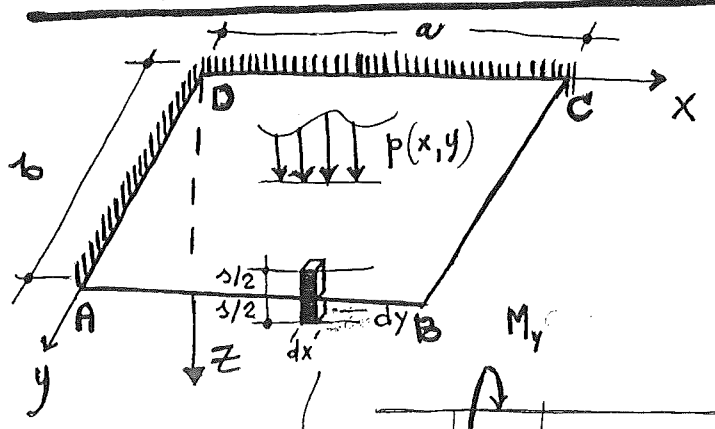
bordo appoggiato $\perp x$:

$$(w)_{x=a} = 0 ; \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} = 0$$

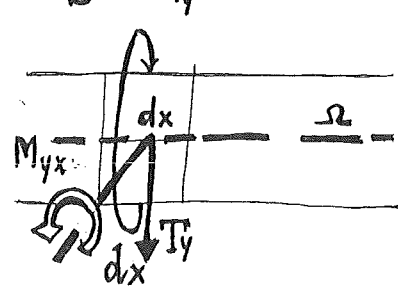
bordo appoggiato $\perp y$:

$$(w)_{y=b} = 0 ; \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0$$

BORDI LIBERI : CONDIZIONI AL CONTORNO



Se consideriamo un bordo libero da vincoli e scarico (es: lato AB $\perp y$) l'imposizione delle Condizioni al contorno non risulta immediata.



Seguendo le indicazioni di Poisson, che per primo si interessò al problema, parrebbe logico,

in un bordo libero ad ogni forza esterna,
si può definire le tre condizioni statiche:

$$M_y = 0, \quad T_y = 0, \quad M_{yx} = 0.$$

Queste tre condizioni però denunciano una strana
disuniformità rispetto agli altri tipi di bordo che richie-
dono di specificare solo due funzioni di $w(x,y)$.

In effetti esse sono valide esclusivamente
nell'ambito di una teoria riponosa. Nell'ambito
della nostra teoria, approssimata in base alle
ipotesi di Kirchhoff, esse sono troppe. Ci si
rende conto facilmente di questo fatto osservando che
per l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{B}$$

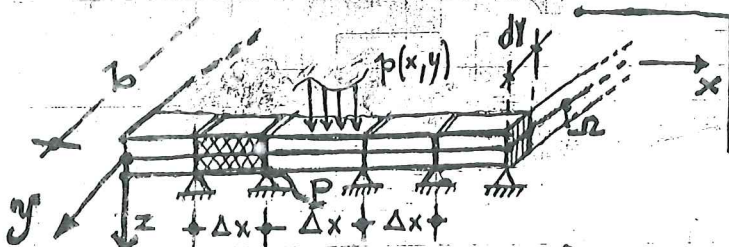
del quarto ordine, due condizioni al contorno per ogni
bordo bastano a determinare univocamente la soluzione.

E' stato proprio Kirchhoff a chiarire questo fatto mostrando,
per via energetica, che le condizioni al contorno, anche
per il bordo libero, sono due e in particolare
corrispondono ad annullare: 1) il momento flettente
ortogonale al bordo; 2) la reazione distribuita
che verrebbe applicata al bordo libero da un ipoteti-
co vincolo di appoggio. In sostanza:

imponiamo le condizioni al contorno nel bordo libero
trattandolo come un bordo appoggiato al quale vengono
tolte i vincoli.

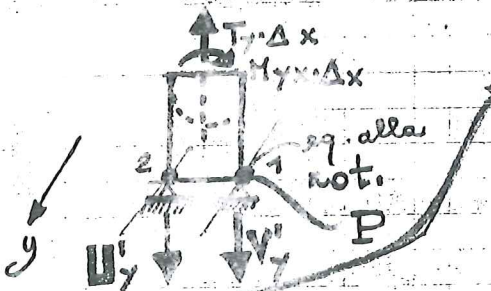
REAZIONI VINCOLARI IN UN LATO APPOGGIATO

Consideriamo dapprima il lato appoggiato e valutiamo la reazione di appoggio. Consideriamo, per finire le idee, il bordo Ω di equazione $y=b$.



Supponiamo, in via preliminare, che il vincolo anziché continuo ma "discreto", cioè costituito da una serie discontinua ma finita di appoggi a distanza molto piccola Δx .

Isoliamo un generico elemento, tenendo presente che su di esso agiscono le azioni interne applicate dal resto della piastra.



Nella faccia di normale y : $T_y \cdot \Delta x$ e $M_{yx} \cdot \Delta x$ sono quantità finite.

Trascuriamo il momento $M_y \cdot \Delta x$ (sulla faccia

di normale y , a dist. dy dall'appoggio) perché nullo, a meno di infinitesimi. Inoltre sarebbe influente nell'equilibrio che interessa. È ugualmente influente il momento torcente $M_{xy} \cdot dy$. Sono trascurabili i contributi di $M_x \cdot dy$, $T_x \cdot dy$ e $p(x,y) \Delta x \cdot dy$, che forniscono contributi infinitesimi all'equilibrio alla rotazione.

Ricaviamo U'_y e V'_y scrivendo le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ai due assi // y , passanti per gli appoggi ① e ②.

$$1) \quad U'_y \cdot \Delta x - M_{yx} \cdot \Delta x - T_y \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} = 0$$

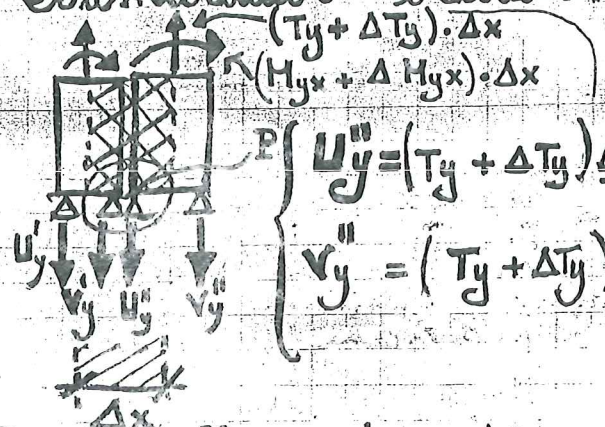
$$2) \quad V'_y \cdot \Delta x + M_{yx} \cdot \Delta x = T_y \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} = 0$$

ovvero:

$$U'_y = T_y \cdot \frac{\Delta x}{2} + M_{yx}$$

$$V'_y = T_y \cdot \frac{\Delta x}{2} - M_{yx}$$

Consideriamo l'elemento di piastra adiacente;



si ottiene in analogia:

$$\begin{cases} U_y'' = (T_y + \Delta T_y) \frac{\Delta x}{2} + (M_{yx} + \Delta M_{yx}) \\ V_y'' = (T_y + \Delta T_y) \frac{\Delta x}{2} - (M_{yx} + \Delta M_{yx}) \end{cases}$$

Ora, nella sezione di contatto dei due elementini l'appoggio è lo stesso. Esso applica una forza: $V_y' + U_y''$ che vale:

$$V_y' + U_y'' = T_y \cdot \Delta x + \Delta M_{yx}$$

Trascuriamo: $\frac{\Delta T_y \cdot \Delta x}{2}$ che risulta infinitesimo di ordine superiore (si deve tener conto infatti che i Δx sono piccoli e vogliamo farli tendere a zero, per avere la continuità).

Ora: $V_y' + U_y''$ è la ^{reazione} concentrata applicata ad un elemento lungo Δx come tratteggiato. Se ora vogliamo una reazione continua ^{prelim.} definiamola il valore medio nell'intervallo Δx :

$$R_y = \frac{V_y' + U_y''}{\Delta x} = T_y + \frac{\Delta M_{yx}}{\Delta x}$$

e quindi:

$$r_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_y$$

fora ~~o~~ la reazione di appoggio di un bordo appoggiato con continuità =

$$r_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ T_y + \frac{\Delta M_{yx}}{\Delta x} \right\} = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

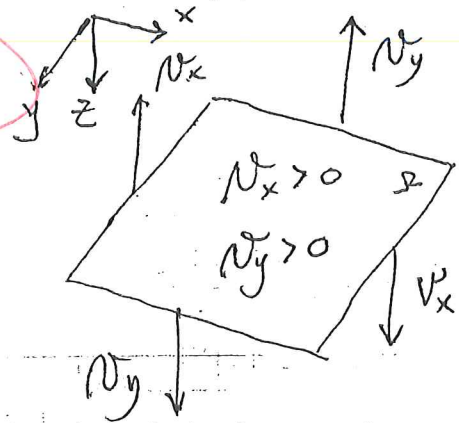
Si indica come "taglio alla Kirchhoff" la precedente espressione N_y della forza distribuita.

$$N_y = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

La reazione di appoggio deve equilibrare oltre all'azione tagliante T_y anche la variazione del momento torcente M_{yx} .

Analogamente, per un bordo appoggiato ortogonale a x il taglio alla Kirchhoff vale:

$$N_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$



La convenzione di positività del taglio alla Kirchhoff è analoga a quella del taglio \equiv

CONDIZIONI AL CONFINAMENTO
 Devono annullarsi i momenti flettenti e le reazioni distribuite
 che si hanno nel caso di lati appoggiati.

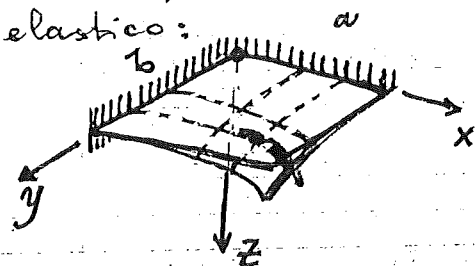
lato \perp a x : $(M_x)_c = 0$, $(N_x)_c = 0$

lato \perp a y : $(M_y)_c = 0$, $(N_y)_c = 0$

Esprimiamo queste condizioni in termini di \overline{w} , per cui è W
 a figurare nell'equazione dell'equilibrio elastico:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} \right)_c = 0$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} \right)_c = 0$$



\exists una curvatura $\neq 0$ sia per sezioni \parallel all'asse x che per sezioni \parallel
 all'asse y . Conseguentemente nessuna delle derivate seconde
 si annulla; essendo $B \neq 0$ deve essere:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} \right)_c = 0$$

lato \perp a x

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} \right)_c = 0$$

lato \perp a y

Tenuto ora conto che: $N_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$

$$N_y = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

e ricordando che: $T_x = -B \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \overline{w}) = -B \left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial x \partial y^2} \right)$

$$T_y = -B \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \overline{w}) = -B \left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial y \partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -B \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x \partial y}$$

si ottiene: $(N_x)_c = -B \left(\frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \overline{w}}{\partial x \partial y^2} \right)_c = 0$

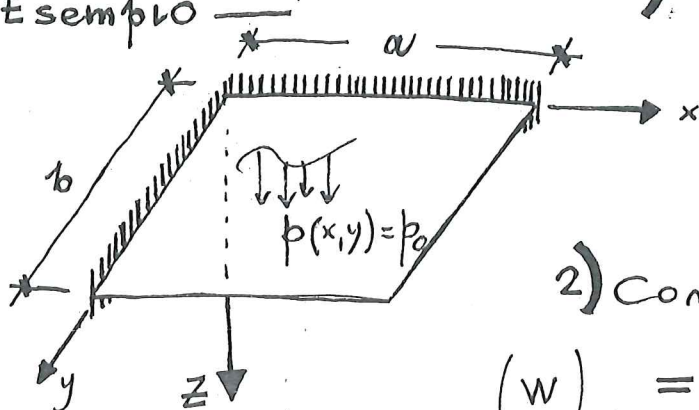
$$\left(\nu_y \right)_c = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial w}{\partial y \partial x^2} \right)_c = 0$$

È in definitiva deve risultare essendo $B \neq 0$:

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_c = 0 \quad \text{bordo } \perp x$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_c = 0 \quad \text{bordo } \perp y$$

Esempio



1) Equazione indefinita di equilibrio elastico

$$\nabla^4 w = \frac{p_0}{B}$$

2) Condizioni al contorno:

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{bordo} \\ \text{incastato} \\ \perp x \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} (w)_{y=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{bordo} \\ \text{incastato} \\ \perp y \end{array}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0; \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad \left. \vphantom{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a}} \right\} \begin{array}{l} \text{bordo libero} \\ \perp x \end{array}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b} = 0; \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad \left. \vphantom{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b}} \right\} \begin{array}{l} \text{bordo libero} \\ \perp y \end{array}$$

Riepilogo.

20/10/03

Nei punti regolari del contorno appoggiato risulta:

$$N_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad N_y = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

essendo:

$$T_x = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad T_y = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)$$

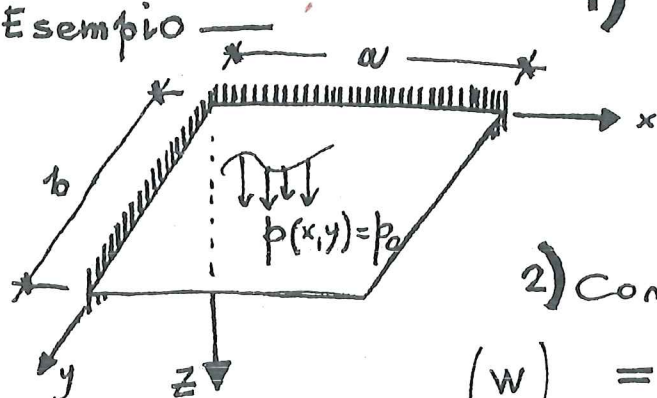
$$M_{xy} = -B(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

risulta:

$$N_x = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad N_y = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)$$

STUDIO DI PIASTRE CON BORDI LIBERI

Esempio



1) Equazione indefinita di equilibrio elastico

$$\nabla^4 w = \frac{p_0}{B}$$

2) Condizioni al contorno:

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{bordo} \\ \text{incastriato} \\ \perp x \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

$$(w)_{y=0} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{bordo} \\ \text{incastriato} \\ \perp y \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{bordo libero} \\ \perp x \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{bordo libero} \\ \perp y \end{array} \right.$$

REAZIONI DISTRIBUITE NEL BORDO INCASTRATO

Consideriamo un bordo incastrato di normale x , di equazione $x=c$. Per esso valgono le condizioni:

$$\begin{aligned} (w)_{x=c} &= 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=c} &= 0 \end{aligned}$$

Le precedenti condizioni sono valide $\forall y$ della retta $x=c$. Essendo $w=w(x,y)$, è: $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=c} = \varphi(y) = \text{cost}$, $\forall y$
L'espressione del momento torcente si scrive:

$$\begin{aligned} (M_{xy})_{x=c} &= -B(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=c} \\ \text{risulta } (M_{xy})_{x=c} &= -B(1-\nu) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=c} \right] \end{aligned}$$

Essendo $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=c} = \text{cost} \forall y$, ne deriva che la

derivata rispetto a y della quantità dentro parentesi quadrata è necessariamente nulla.

Pertanto: Il momento torcente nel bordo incastrato è nullo in ogni punto.

Nei bordi incastrati la espressione del "taglio alla Kirchhoff" si semplifica:

$$(Q_x)_{\text{bordo incastrato}} \equiv T_x$$

essendo la derivata $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ nulla. 52

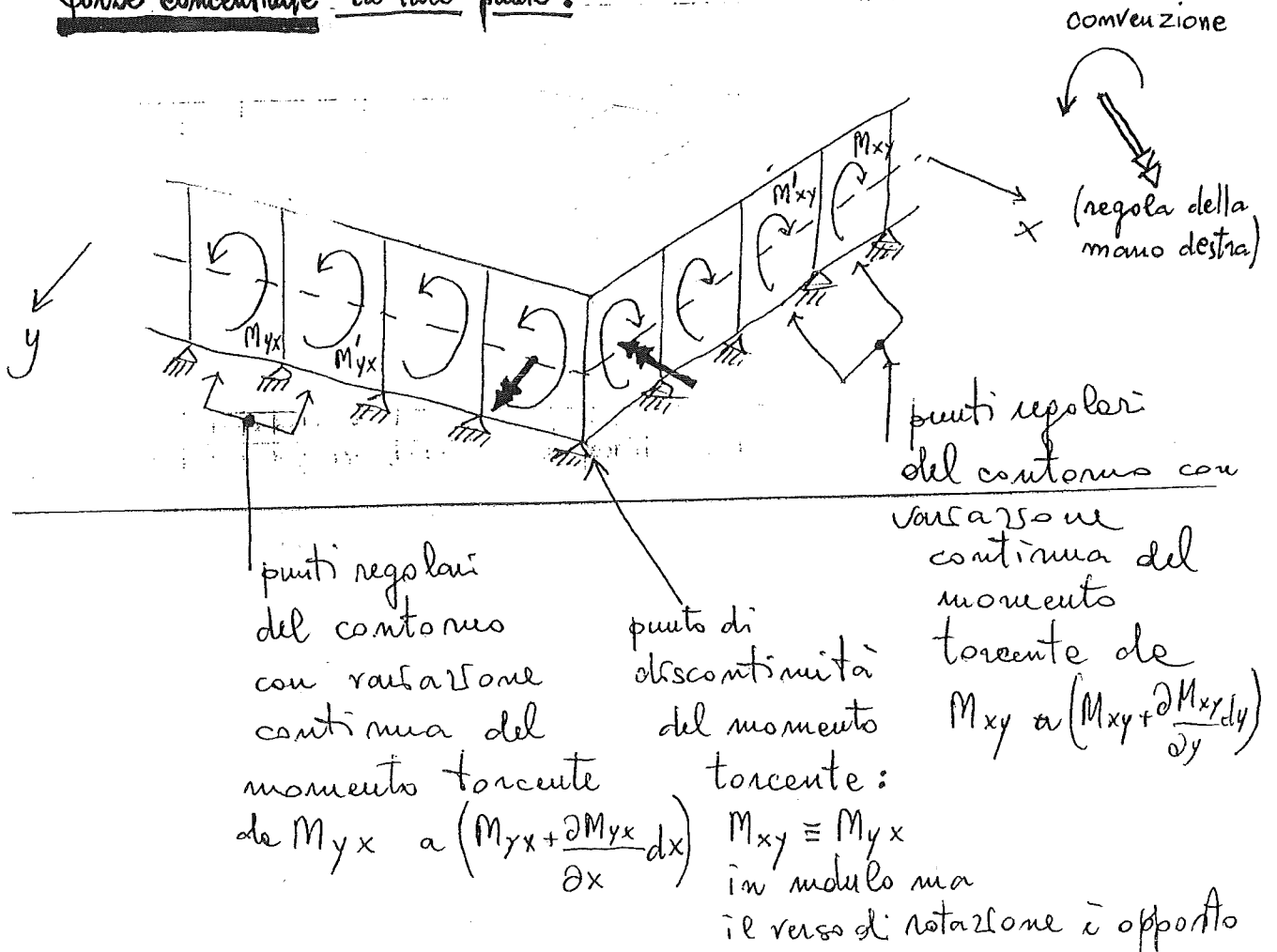
Analogaente :

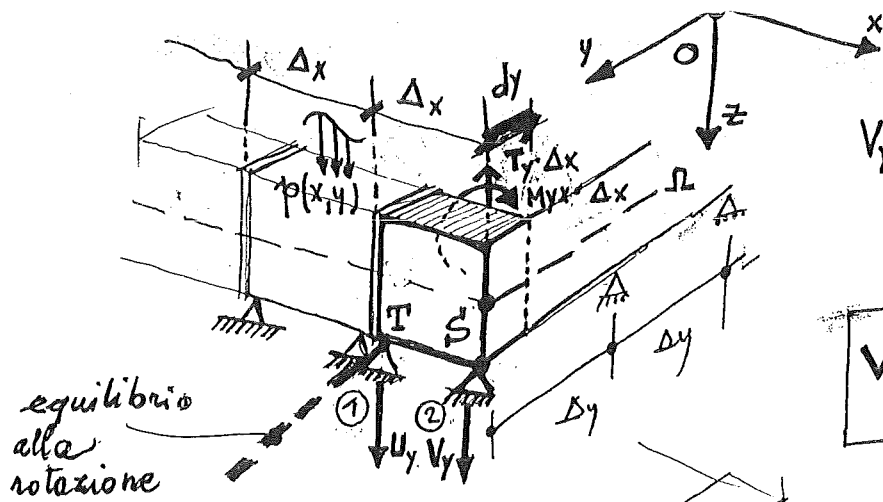
$$(M_y)_{\text{bordo incastrato}} \perp y \equiv T_y$$

LE AZIONI CONCENTRATE NEGLI SPIGOLI

Le precedenti espressioni calcolate per le reazioni valgono per i punti di contorno della piastra, nei quali il momento torcente varia con continuità: punti regolari non di spigolo.

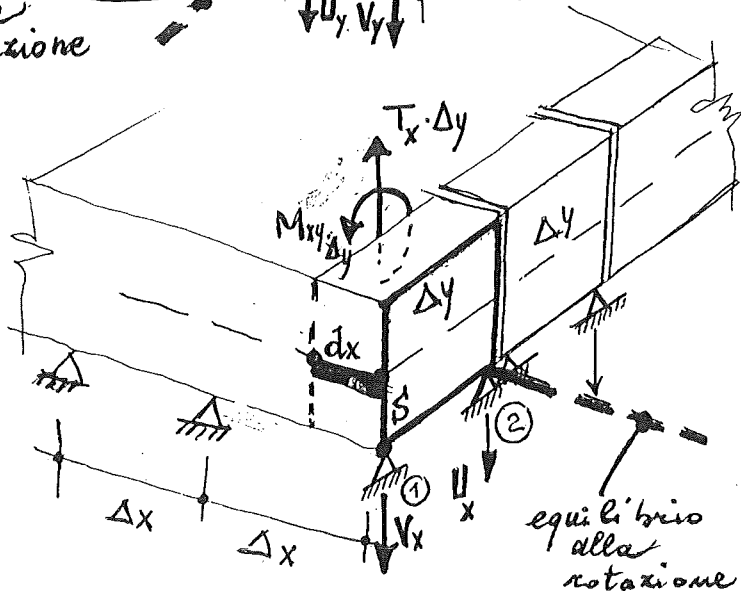
Nel contorno della piastra esistono però anche "punti singolari" dove il momento torcente è discontinuo. Tale circostanza si traduce in una analogia "discontinuità" della reazione di appoggio, con l'insorgere di "forze concentrate" in tale punto.





$$V_y \cdot \Delta x + M_{yx} \cdot \Delta x - T_y \cdot \frac{\Delta x^2}{2} = 0$$

$$V_y = T_y \cdot \frac{\Delta x}{2} - M_{yx}$$



$$V_x \cdot \Delta y + M_{xy} \cdot \Delta y - T_x \cdot \frac{\Delta y^2}{2} = 0$$

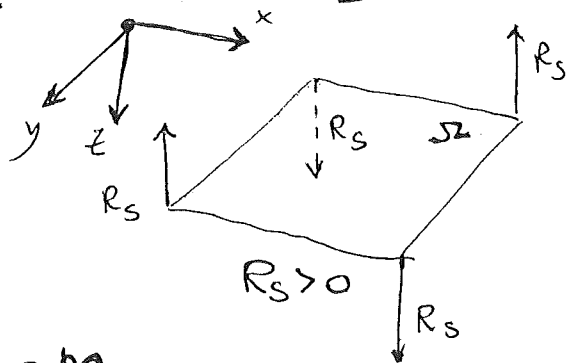
$$V_x = T_x \cdot \frac{\Delta y}{2} - M_{xy}$$

La reazione nell'appoggio sullo spigolo è data evidentemente dalla somma di V_y e V_x . Si ottiene:

$$V_y + V_x = T_y \cdot \frac{\Delta x}{2} - M_{yx} + T_x \cdot \frac{\Delta y}{2} - M_{xy}$$

Si pone:

$$R_s = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [V_y + V_x] =$$

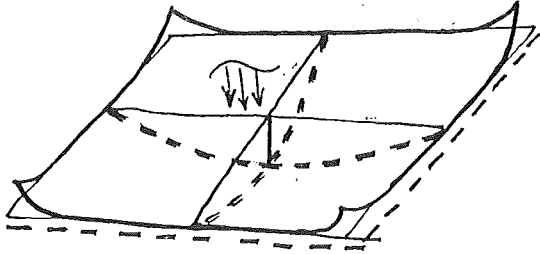


$$= -(M_{yx} + M_{xy}) = -2M_{xy}$$

$$R_s = -2M_{xy}$$

Queste reazioni vincolari sono applicate del vincolo alla piastre e sono dirette verso il basso (in direzione dell'asse z).

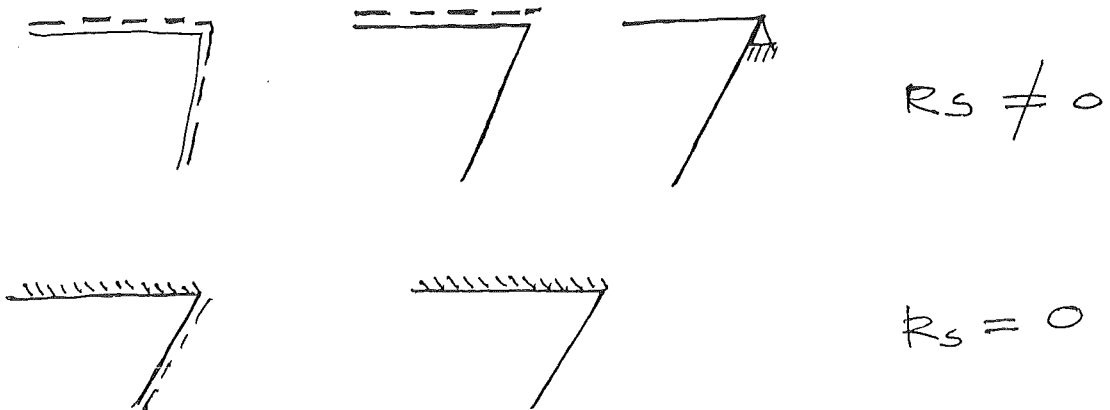
Nel caso di piastre appoggiate sul contorno esistono negli spigoli delle forme, generate dal momento torcente, di intensità pari alle R_s ma dirette verso l'alto, che tendono a produrre il sollevamento degli spigoli. Questo può riuscire se il vincolo è unilaterale (orecchiamento).



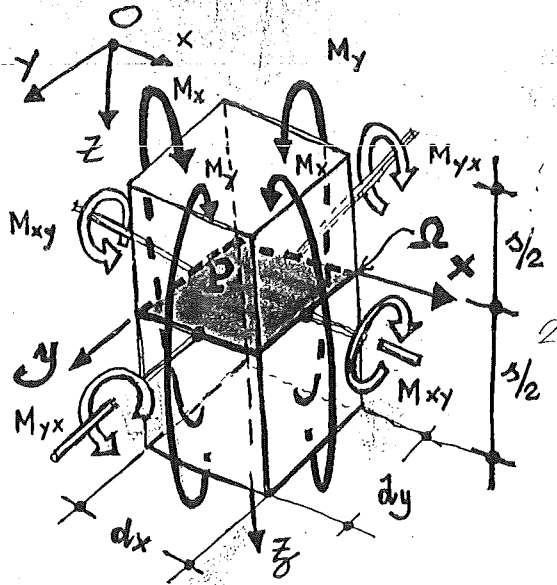
Per impedire questo fenomeno occorre che il vincolo negli spigoli sia bilaterale, in modo che possano essere applicate alla piastra le reazioni R_s prima definite, che impediscono il fenomeno di sollevamento.

La precedente espressione è valida per il calcolo delle reazioni vincolari di spigolo anche per i due casi seguenti:

- spigolo fra bordo appoggiato e bordo libero;
- spigolo fra due bordi liberi con appoggio -



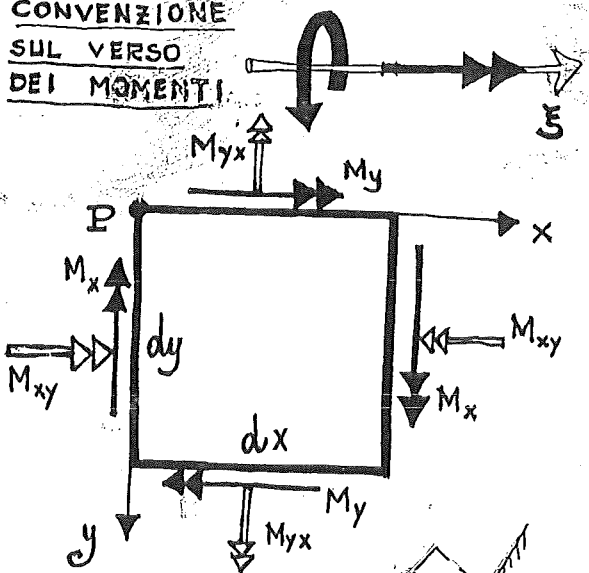
I MOMENTI NELL'INTORNO DI UN PUNTO



Consideriamo un punto P della superficie media di una piastra rettangolare.

22/10/03

CONVENZIONE SUL VERSO DEI MOMENTI



Supponiamo di aver risolto la piastra, e quindi di conoscere le azioni interne che sono correlate alle facce orientate di un elemento prismatico, infinitesimo del 2° ordine, ricavato nell'intorno del punto stesso.

Queste azioni interne sono: il momento flettente (M_x e M_y); il momento torcente $M_{xy} = M_{yx}$; le azioni taglianti T_x e T_y , definite per l'unità di lunghezza della superficie media. Le facce dell'elemento sono evidentemente ortogonali agli assi del sistema di riferimento x e y .

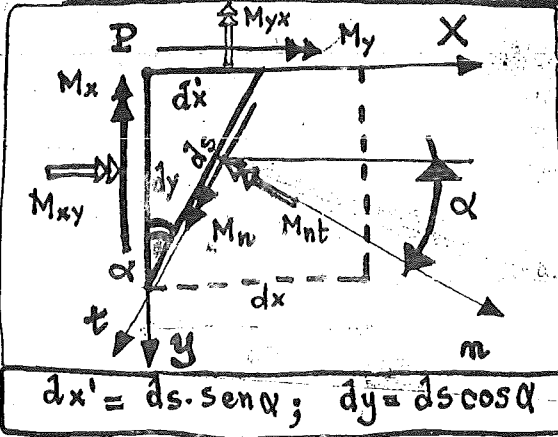
Trascurando inizialmente le azioni taglianti T_x e T_y , poiché per esse si procede separatamente, riferiamoci esclusivamente alle azioni flettenti e torcenti.

Evidentemente se immaginiamo di far ruotare intorno a P l'elemento del 2° ordine, variandone l'orientazione delle facce, varieranno in conseguenza l'orientazione dei momenti flettenti e torcenti e la loro intensità. Ci proponiamo di studiare questo fenomeno.

Introduciamo, per semplificare la trattazione, la convenzione vettoriale di rappresentazione dei momenti.

consideriamo una sezione ad un elemento no

di normale orientata n , formante angolo α con l'asse x .



$$dx' = ds \cdot \sin \alpha; \quad dy' = ds \cdot \cos \alpha$$

Ci proponiamo di determinare il momento flettente M_n e il momento torcente M_{nt} coordinati a detta faccia di normale orientata n .

CALCOLO DI M_n

- equilibrio alla rotazione intorno a t .
- vettori momento (o componenti) positivi se diretti come la direzione positiva di t .

$$M_n \cdot ds - M_y \cdot dx' \cdot \sin \alpha - M_{yx} \cdot dx' \cdot \cos \alpha - M_{xy} \cdot dy \cdot \sin \alpha - M_x \cdot dy \cdot \cos \alpha = 0$$

$$M_n \cdot ds = M_y \cdot ds \sin^2 \alpha + M_{yx} \cdot ds \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} \cdot ds \sin \alpha \cos \alpha + M_x \cdot ds \cos^2 \alpha$$

$$M_n = M_y \cdot \sin^2 \alpha + M_x \cos^2 \alpha + M_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

CALCOLO DI M_{nt}

- equilibrio alla rotazione intorno all'asse n .
- vettori momento (o componenti) positivi se diretti come la direzione positiva di n .

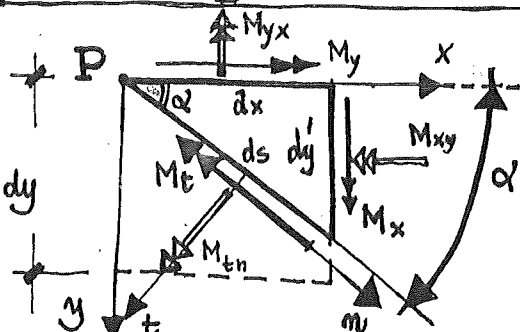
$$-M_{nt} \cdot ds + M_y \cdot dx' \cdot \cos \alpha - M_{yx} \cdot dx' \cdot \sin \alpha + M_{xy} \cdot dy \cdot \cos \alpha - M_x \cdot dy \cdot \sin \alpha = 0$$

$$M_{nt} \cdot ds = M_y \cdot ds \sin \alpha \cos \alpha - M_{yx} \cdot ds \sin^2 \alpha + M_{xy} \cdot ds \cos^2 \alpha - M_x \cdot ds \sin \alpha \cos \alpha$$

$$M_{nt} = \left(\frac{M_y - M_x}{2} \right) \sin 2\alpha + M_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

CALCOLO DI M_t

- equazione di equilibrio alla rotazione rispetto a n .
- momenti (o componenti) positivi se diretti come n .



$$dx = ds \cdot \cos \alpha; \quad dy' = ds \cdot \sin \alpha$$

$$-M_t \cdot ds + M_x \cdot dy' \cdot \sin \alpha - M_{xy} \cdot dy' \cdot \cos \alpha - M_{yx} \cdot dx \cdot \sin \alpha + M_y \cdot dx \cdot \cos \alpha = 0$$

$$M_t \cdot ds = M_x \cdot ds \sin^2 \alpha - M_{xy} \cdot ds \sin \alpha \cos \alpha - M_{yx} \cdot ds \sin \alpha \cos \alpha + M_y \cdot ds \cos^2 \alpha$$

$$M_t = M_y \cdot \cos^2 \alpha + M_x \sin^2 \alpha - M_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

L'INVARIANTE DI FLESSIONE

Sommando membro a membro le espressioni di M_n ed M_t si ottiene:

$$M_n + M_t = M_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + M_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = M_y + M_x = \text{cost.} \quad \text{Questo}$$

per qualunque angolo α che definisca l'orientazione del sistema (n, t) rispetto a quello (x, y) .

La precedente relazione mostra che:

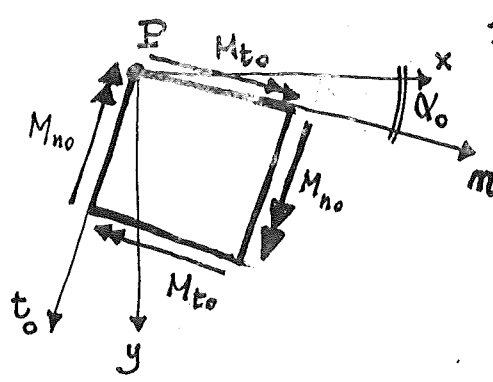
"la somma dei momenti flettenti correlati a due sezioni mutuamente ortogonali, ricavate nell'intorno di un medesimo punto della piastra, è costante."

La precedente quantità è detta "invariante di flessione".

I MOMENTI PRINCIPALI

Per ogni punto della superficie media si individuano due direzioni fra loro ortogonali, n_0 e t_0 , dette "direzioni principali". Esse sono tali che:

- sulle facce dell'elementino del 2° ordine normali ad esse il momento torcente risulta nullo: $M_{n_0 t_0} = M_{t_0 n_0} = 0$.
- i momenti flettenti M_{n_0} ed M_{t_0} , agenti su tali facce si dicono "momenti principali" perché sono uno massimo e uno minimo.



1) - Si ricava preliminarmente il valore dell'angolo α_0 che consente di individuare la direzione dell'asse n_0 (e quella di t_0 che gli è ortogonale), rispetto al riferimento $P(x, y)$.

Imponendo la condizione di nullità del momento torcente si ricava:

$$M_{nt} = 0 \iff \frac{1}{2}(M_y - M_x) \sin 2\alpha_0 + M_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y}$$

La precedente relazione, considerata la periodicità della funzione trigonometrica, è soddisfatta per α_0 (che individua n_0) e $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ (che individua t_0).

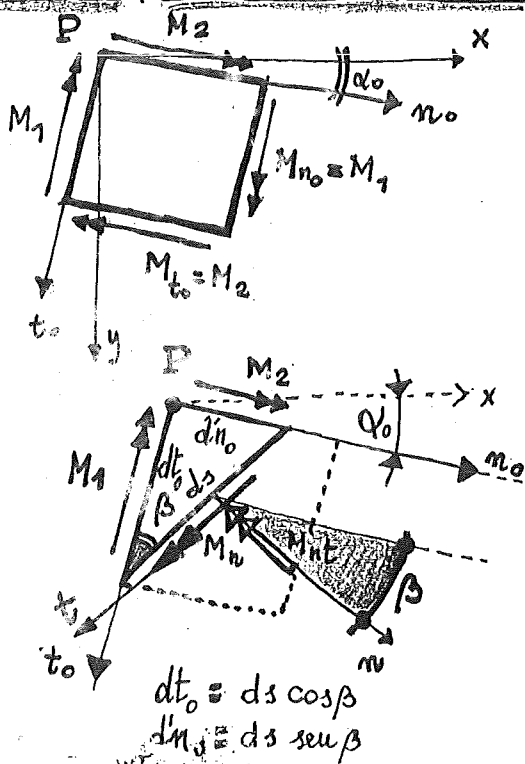
2) - Per dimostrare che il suddetto valore dell'angolo α_0 definisce una direzione principale n_0 (tale che sulla faccia ortogonale ad essa il momento flettente è massimo o minimo) consideriamo l'espressione di M_n come funzione di α , e mostriamo che il valore $\alpha = \alpha_0$ (ovvero M_n max. opp. min.). Si ha così:

$$\frac{dM_n}{d\alpha} = 0 \implies M_y \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha + M_x \cdot 2 \cos \alpha (-\sin \alpha) + M_{xy} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 = 0$$

$$M_y \cdot \sin 2\alpha - M_x \cdot \sin 2\alpha + 2 \cdot M_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \left[\frac{1}{2}(M_y - M_x) \sin 2\alpha + M_{xy} \cdot \cos 2\alpha \right] = 0 \implies M_{nt} = 0$$

Questo mostra che la stazionarietà del momento flettente (\max o opp. \min di M_{nn}) si ottiene per valori dell'angolo α_0 che rendono nulla l'espressione del momento torcente M_{nt} .



3) Il momento torcente è massimo in due sezioni mutuamente ortogonali, inclinate di $\pm \pi/4$ rispetto a quelle su cui agiscono i momenti principali.

Riferiamoci ai momenti principali M_1 ed M_2 . Chiamiamo β l'angolo formato dall'asse nn rispetto alla direzione principale n_0 . Si ottiene allora:

$$M_{nt} = \frac{1}{2}(M_2 - M_1) \sin 2\beta$$

Il massimo valore del momento torcente si ottiene quando è massimo $\sin 2\beta$. Pertanto:

$$\sin 2\beta = 1 \rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \max M_{nt} = \frac{1}{2}(M_2 - M_1)$$

c) Ricaviamo le espressioni dei momenti principali M_1 e M_2 in funzione di M_x , M_y e M_{xy} .

d) Preliminarmente mostriamo come può ottenersi una rappresentazione grafica del modo di variare dei momenti nell'intorno del punto P, detto "cerchio di Mohr".

Le espressioni di M_n ed M_{nt} in funzione di M_x , M_y e M_{xy} e dell'angolo di inclinazione α si ricorda che sono:

$$\begin{cases} M_n = M_y \sin^2 \alpha + M_x \cos^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \\ M_{nt} = \frac{1}{2}(M_y - M_x) \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Allo scopo di eliminare α si pone:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Si ottiene per quanto concerne l'espressione di M_n :

$$M_n = \frac{M_y}{2} - \frac{M_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{M_x}{2} + \frac{M_x}{2} \cos 2\alpha + M_{xy} \sin 2\alpha$$

ovvero:

$$\left[M_n - \frac{1}{2}(M_y + M_x) \right] = - \left(\frac{M_y - M_x}{2} \right) \cos 2\alpha + M_{xy} \cdot \text{Sen } 2\alpha$$

$$M_{nt} = \left(\frac{M_y - M_x}{2} \right) \text{sen } 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha$$

Quadrando ambedue le precedenti espressioni e sommando membro a membro si ottiene in definitiva:

$$\left[M_n - \left(\frac{M_y + M_x}{2} \right) \right]^2 + M_{nt}^2 = \left(\frac{M_y - M_x}{2} \right)^2 + M_{xy}^2$$

La precedente espressione rappresenta nel piano M_n, M_{nt} l'equazione cartesiana di una circonferenza (circolo di Mohr).

La costruzione di questo circolo non presenta difficoltà alcuna.

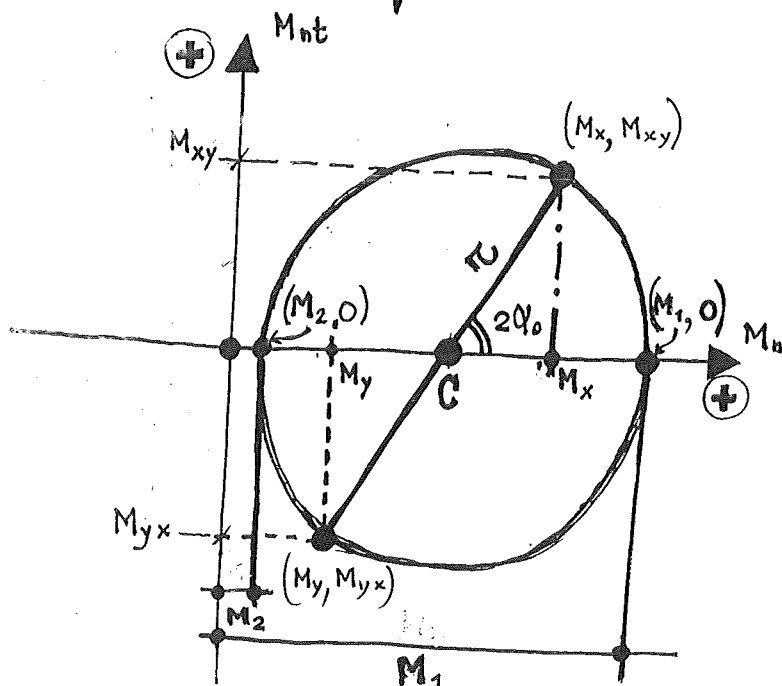
Sono note le coordinate del centro, che ha ordinata nulla e ascissa

$(M_x + M_y)/2$:

$$C \left(\frac{M_x + M_y}{2}; 0 \right)$$

Il raggio del circolo di Mohr vale:

$$r = \sqrt{\left(\frac{M_y - M_x}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(M_y - M_x)^2 + 4M_{xy}^2}$$



Il circolo di Mohr costituisce una sintetica rappresentazione grafica del modo di variare dei momenti nell'intorno di un punto. 61

A tale proposito si deve rammentare che:

a) le coordinate di un punto qualunque del cerchio, come ad esempio (M_x, M_{xy}) , (M_y, M_{yx}) , $(M_1, 0)$ etc. rappresentano i momenti (rispettivamente flettente e torcente) correlati alla faccia ortogonale a un dato asse: es. all'asse x , all'asse y , all'asse m_0 etc.

b) l'angolo al centro, compreso fra due raggi, è pari al doppio dell'angolo compreso fra le facce (o le normali ad esse) cui i momenti corrispondono.

● Poniamo ora calcolare le espressioni dei momenti principali.

L'espressione di M_1 si ottiene sommando alla ascissa del centro C la lunghezza del raggio del cerchio.

Analogamente l'espressione di M_2 si ottiene sottraendo alla ascissa del centro C la lunghezza del raggio r .

Risulta:

$$M_1 = \frac{1}{2}(M_x + M_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}$$
$$M_2 = \frac{1}{2}(M_x + M_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}$$

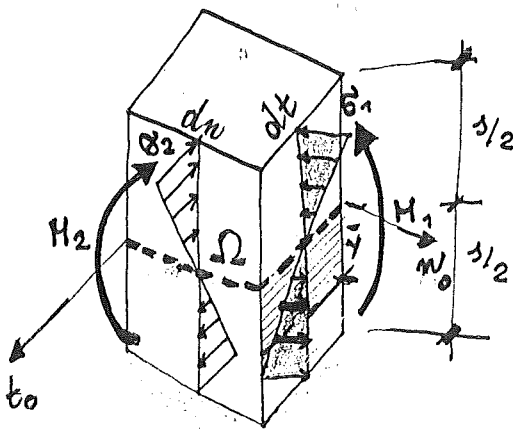
● Si ricava facilmente (tenuto conto di quanto esposto al punto b), con procedura grafica, l'angolo fra la normale alla faccia su cui agisce M_x e quella su cui agisce M_1 :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot M_{xy}}{M_x - M_y}$$

VERIFICA DI RESISTENZA

23/10/03

Consideriamo una piastra di materiale omogeneo ed isotropo (ad esempio di acciaio), vincolata in certo modo nei bordi e soggetta a determinati carichi esterni. Supponiamo di averla già calcolata, e quindi di aver già individuato i momenti $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$ nei punti ove si intende effettuare la verifica di resistenza. E' facile, dopo quanto detto, calcolare in tali punti i momenti principali M_1 ed M_2 .



Risulta facile calcolare la distribuzione delle tensioni σ_1 e σ_2 prodotte da questi momenti con la formula di Navier:

$$\sigma = \frac{M \cdot \bar{y}}{J_n}$$

Ovviamente le tensioni σ hanno andamento lineare e sono nulle nella fibra media (corrispondente alla superficie media Ω della piastra) e max nei lembi superiore e inferiore.

Essendo $\bar{y} = \pm \frac{s}{2}$, $J_n = \frac{1}{12} \cdot dt \cdot s^3 \Rightarrow \max_{\min} \sigma_1 = \frac{M_1 \cdot dt \cdot (\pm \frac{s}{2})}{\frac{1}{12} \cdot dt \cdot s^3} = \pm \frac{6 M_1}{s^2}$

$$\max_{\min} \sigma_2 = \pm \frac{6 M_2}{s^2}$$

La verifica di resistenza si effettua quindi con riferimento al lembo superiore o inferiore (sul piano pratico è lo stesso). Secondo il vigente Regolamento, quando le tensioni sono espresse nel riferimento principale si deve usare la formula:

$$\sigma_{id} = \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_{am}$$

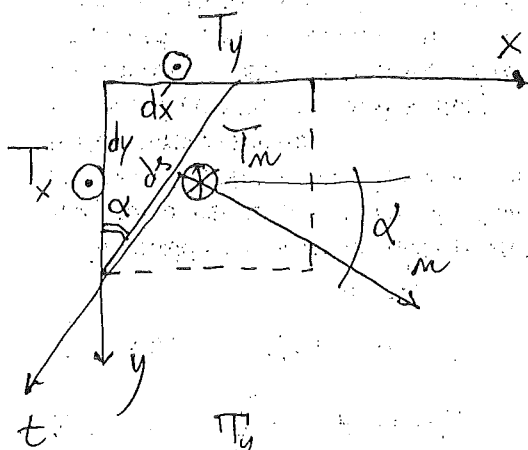
con σ_{am} massima tensione ammissibile nel materiale.

DETERMINAZIONE DEL TAGLIO

Consideriamo un elementino di volume infinitesimo del 2° ordine soggetto al taglio T_x e T_y e al carico esterno $q(x,y)$ ripartito.

Trascuriamo, in quanto producono infinitesimi di ordine superiore nelle equazioni di equilibrio alla traslazione lungo z , gli incrementi delle azioni taglianti nelle facce incrementate $x+dx$ e $y+dy$ e il contributo del carico esterno.

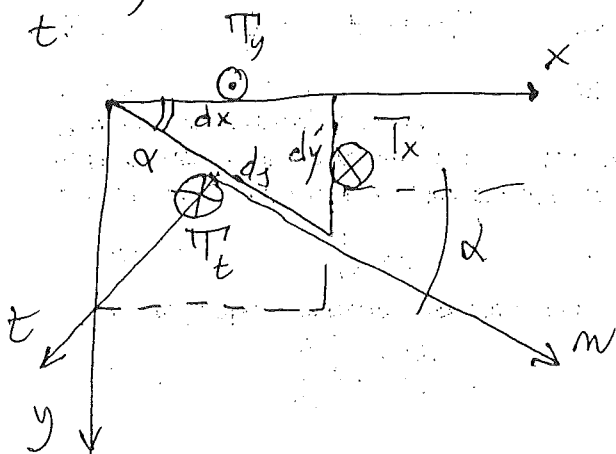
Con riferimento alle due figure che seguono le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo z , scritte per le porzioni triangolari del volume, forniscono:



$$T_x \cdot dy + T_y \cdot dx - T_m \cdot ds = 0$$

$$T_x \cdot ds \cos \alpha + T_y \cdot ds \sin \alpha = T_m \cdot ds$$

$$T_m = T_x \cos \alpha + T_y \sin \alpha$$



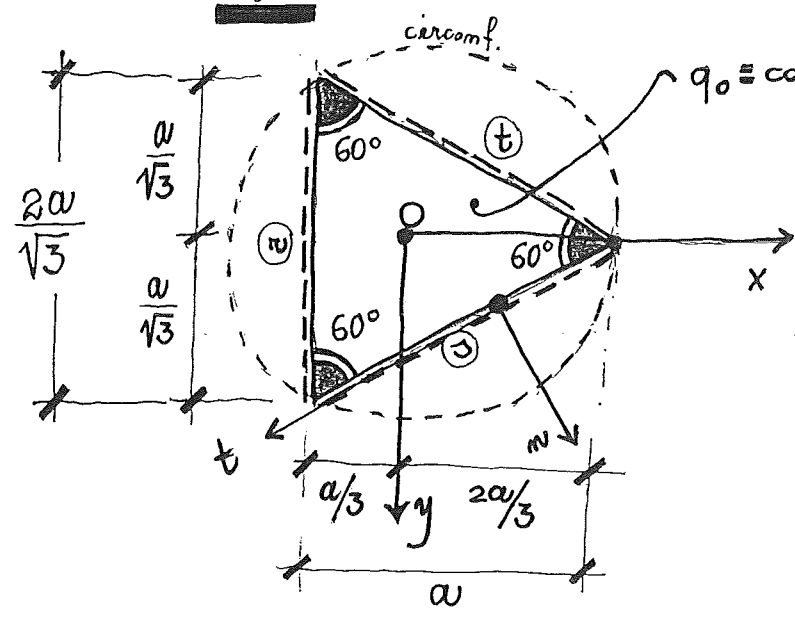
$$T_y \cdot dx - T_x \cdot dy - T_t \cdot ds = 0$$

$$T_y \cdot ds \cos \alpha - T_x \cdot ds \sin \alpha = T_t \cdot ds$$

$$T_t = T_y \cos \alpha - T_x \sin \alpha$$

SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA

③ Soluzione (di Woinowsky-Krieger) per la piastra a forma di triangolo equilatero, con i bordi semplicemente appoggiati e soggetta a carico uniformemente distribuito di intensità q_0 .



La piastra ha altezza pari ad a .
 Ogni lato della piastra ha lunghezza pari a $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.
 Il sistema di riferimento $O(x, y)$ ha origine nel baricentro della piastra. L'asse delle

x è diretto come la bisettrice di uno degli angoli.

1) Assumiamo come funzione caratterizzante la superficie elastica deformata w la seguente espressione:

$$w = C_0 \cdot \underbrace{\left(x + \frac{1}{3}a\right)}_{(r)} \underbrace{\left(x - \frac{2}{3}a + y\sqrt{3}\right)}_{(s)} \underbrace{\left(x - \frac{2}{3}a - y\sqrt{3}\right)}_{(t)} \underbrace{\left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2\right)}_{\text{cerchio}}$$

2) Regoliamo il valore della costante C_0 in modo tale che la funzione w soddisfi l'equazione indefinita di equilibrio elastico: $\nabla^4 w = p(x, y)/B$;

3) Verifichiamo che la funzione w soddisfa alle condizioni al contorno, prescritte per i bordi appoggiati, lungo le rette di equazione: $x = -\frac{1}{3}a$ (r), $x = \frac{2}{3}a - y\sqrt{3}$ (s), $x = \frac{2}{3}a + y\sqrt{3}$ (t)

- 4) Calcoliamo i momenti flettenti e torcenti (M_x , M_y e M_{xy}) nei punti caratteristici della piastra (più sollecitati).
- 5) Effettuiamo le verifiche di resistenza.

SODDISFACIMENTO DELL'EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO ELASTICO

Semplici (anche se fastidiosi) calcoli mostrano che risulta:

$$W = C_0 \cdot \left[x^3 - ax^2 - 3yx^2 - ay^2 + \frac{4a^3}{27} \right] \left[\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right]$$

$$W = C_0 \left[\underline{-x^5 + ax^4} + \frac{4}{9} a^2 x^3 - \frac{16}{27} a^3 x^2 + \right. \\ \left. + \underline{3yx^4} \quad + \underline{2axy^2} + \underline{2y^2x^3} - \frac{4}{3} a^2 y^2 x + \right. \\ \left. + \underline{ay^4} - \frac{16}{27} a^3 y^2 + \frac{16}{243} a^5 \right]$$

Si ottiene quindi:

$$\underline{\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}} = C_0 \cdot [-120x + 24a]$$

$$\underline{\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}} = C_0 \cdot (72x + 24a)$$

$$\underline{\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}} = C_0 \cdot [24x + 8a]$$

Il soddisfacimento dell'equazione indefinita di equilibrio elastico:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q_0}{B}$$

conduce quindi alla relazione:

$$C_0 \left[\cancel{-120x} + 24a + \cancel{2 \cdot 24x} + 2 \cdot 8a + \cancel{72x} + 24a \right] = \frac{q_0}{B}$$

$$C_0 [64a] = \frac{q_0}{B}$$



$$C_0 = \frac{q_0}{64 \cdot a \cdot B}$$

Quindi, in definitiva, si deve assumere:

$$W = \frac{q_0}{64 \cdot a \cdot B} \left(x + \frac{1}{3}a\right) \left(x - \frac{2}{3}a + y\sqrt{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}a - y\sqrt{3}\right) \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2\right)$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Nei tre lati della piastra devono essere soddisfatte le condizioni relative al bordo appoggiato.

Considerate la simmetria della struttura rispetto alle bisettrici dei tre spigoli: possiamo limitarci a effettuare la verifica per il solo bordo (M).

Deve essere:

$$(W)_{x = -\frac{1}{3}a} = 0$$

$$(M_x)_{x = -\frac{1}{3}a} = 0$$

Si verifica immediatamente il soddisfacimento della 1^a condizione osservando che l'espressione di W contiene il termine $\left(x + \frac{1}{3}a\right)$ e che risulta: $\left(x + \frac{1}{3}a\right)_{x = -\frac{1}{3}a} = 0$.

uguagliata a zero è la funzione implicita del bordo.

La seconda condizione

$$(M_x)_{x = -\frac{1}{3}a} = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x = -\frac{1}{3}a} = 0$$

essendo il bordo di equazione $x = -\frac{1}{3}a$ a livello, ovvero tale per cui $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x = -\frac{1}{3}a} = 0$, si semplifica e diventa:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{x = -\frac{1}{3}a} = 0. \quad 67$$

Semplici calcoli mostrano che risulta:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{x=-\frac{1}{3}a} = \left(-20 \cdot X^3 + 12aX^2 + \frac{8}{3}a^2X - \frac{32}{27}a^3 + 4ay^2 + 12yX^2\right)_{x=-\frac{1}{3}a} = 0$$

MASSIMO SPOSTAMENTO

Nel baricentro della piastra ($x=0; y=0$) si ha il massimo spostamento. Risulta:

$$W_{\max} = \frac{q_0 \cdot a^4}{972 \cdot B} = 0,001029 \cdot \frac{q_0 \cdot a^4}{B}$$

MOMENTI FLETTENTI

I momenti flettenti ed il momento torcente hanno espressione:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) =$$

$$= \frac{q_0}{16 \cdot a} \left[(5-\nu) \cdot X^3 - (3+\nu) \cdot aX^2 - \frac{2}{3}a^2(1-\nu)X + \right.$$

$$\left. -3(1+3\nu)XY^2 - (1+3\nu)ay^2 + \frac{8}{27}(1+\nu)a^3 \right]$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) =$$

$$= \frac{q_0}{16 \cdot a} \left[(5\nu-1) \cdot X^3 - (1+3\nu) \cdot aX^2 + \frac{2}{3}(1-\nu)a^2X + \right.$$

$$\left. -3(3+\nu)XY^2 - (3+\nu) \cdot ay^2 + \frac{8}{27}(1+\nu)a^3 \right]$$

$$M_{xy} = -B(1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{q_0}{32 \cdot a} (1-\nu) \cdot \left[6y^3 + 4a xy + 6y x^2 - \frac{4}{3} a^2 y \right]$$

Lungo la bisettrice di equazione $y=0$ risulta evidentemente nullo il momento torcente M_{xy} e pertanto i momenti flettenti M_x ed M_y sono anche momenti principali.

Per $y=0$ le loro espressioni si semplificano, venendo a mancare i termini sottolineati.

Ricaviamo, lungo la bisettrice ($y=0$) l'ascissa per la quale sono massimi M_x ed M_y . Supponiamo $\nu=0,3$ (acciaio)

Risulta per:

$$x = -0,062 \cdot a \quad (M_x)_{\max} = 0,0250 \cdot q_0 \cdot a^2$$

$$(M_y)_{\max} = 0,0218 \cdot q_0 \cdot a^2$$

$$x = 0,129 \cdot a \quad (M_x) = 0,0175 \cdot q_0 \cdot a^2$$

$$(M_y)_{\max} = 0,0259 \cdot q_0 \cdot a^2$$

VERIFICA DI RESISTENZA

Al centro della trave ($x=0, y=0$) i momenti valgono:

$$M_x = M_y = (1+\nu) \cdot \frac{q_0 a^2}{54} = 0,0241 \cdot q_0 \cdot a^2$$

Effettuiamo la verifica di resistenza al centro della
piastro [è il punto più sollecitato].

Si ha $M_1 = M_2 = M_x = M_y = 0,0241 \cdot q_0 \cdot a^2$.

Si ottiene $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm 6 \cdot 0,0241 \cdot \frac{q_0 \cdot a^2}{j^2} = \pm 0,1446 \cdot \frac{q_0 \cdot a^2}{j^2}$ $\left(6 \frac{M_1}{j^2} \right)$

Risulta pertanto considerando ad es. il punto inferiore

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = 0,1446 \cdot \frac{q_0 \cdot a^2}{j^2}$$

Perché la verifica sia positiva deve risultare:

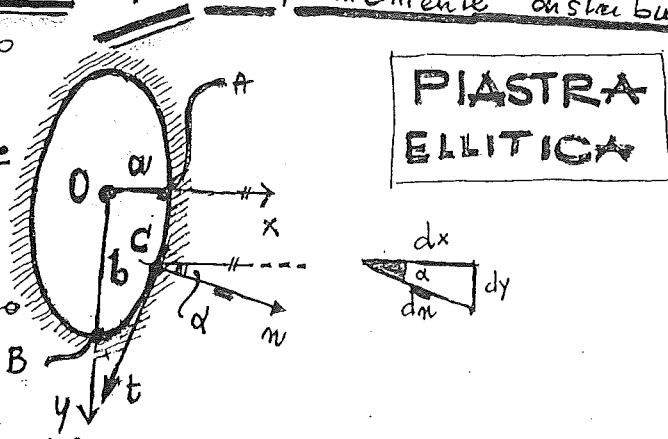
$$0,1446 \cdot \frac{q_0 \cdot a^2}{j^2} \leq \sigma_{am}$$

LE SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA

- ① Accontentiamoci ora di una applicazione banale delle relazioni sin qui trovate: essa consentirà di seguire sino in fondo e senza fatica la soluzione. 27/10/03
È il caso della piastra ellittica, incastrata sul contorno e soggetta a un carico q_0 uniformemente distribuito.

a) Inizialmente determineremo la funzione w imponendo che essa soddisfi l'equazione indefinita di equilibrio elastico.

b) Successivamente verificheremo che questa funzione soddisfa anche le condizioni al contorno, e quindi che costituisce la soluzione del problema.



② Esprimiamo la funzione w della superficie elastica nella forma:

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2$$

dove: a e b sono i semiasse dell'ellisse ($b > a$);
 w_0 è la freccia nell'origine O (baricentro della piastra).

③ Dalla precedente espressione si calcola facilmente che risulta:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{24 \cdot w_0}{a^4},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{24 \cdot w_0}{b^4},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8 \cdot w_0}{a^2 \cdot b^2}.$$

Dal soddisfacimento dell'equazione indefinita di equilibrio elastico:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{B}$$

risulta:

$$\frac{24 \cdot w_0}{a^4} + 16 \cdot \frac{w_0}{a^2 b^2} + \frac{24 w_0}{b^4} = \frac{q_0}{B}$$

e quindi:

$$\underline{w_0} = \frac{q_0}{B \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)} = \frac{q_0}{B \left(\frac{24a^4 + 24b^4 + 16a^2 b^2}{a^4 b^4} \right)} =$$

$$= \frac{q_0 \cdot a^4 b^4}{B (24a^4 + 16a^2 b^2 + 24b^4)} = \underline{\underline{\frac{q_0}{8B} \cdot \frac{a^4 b^4}{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4}}}$$

Si ottiene quindi l'espressione della funzione w :

$$w = \frac{q_0}{8B} \cdot \frac{a^4 b^4}{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2$$

La precedente espressione soddisfa le condizioni al contorno per la piastra incastrata. Queste condizioni

si esprimono:

$$\begin{cases} (w)_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} = 0 & \bullet \text{ spostamento nullo;} \\ \left(\frac{dw}{dn} \right)_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} = 0 & \bullet \text{ derivata della funzione } w, \text{ in direzione} \\ & \text{della normale } n \text{ al contorno, nulla.} \end{cases}$$

Un generico punto del contorno, di coordinate x e y , è tale da soddisfare l'equazione dell'ellisse in forma implicita:

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) = 0$$

Ad es.

$$A(x=a; y=0)$$

$$B(x=0; y=b)$$

È dunque immediato verificare che nei punti del contorno è $w=0$.

Per quanto concerne la seconda C.d.C., risulta: 72

$$\frac{dw}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dn}$$

Essendo: $\frac{dx}{dn} = \cos \alpha$

$\frac{dy}{dn} = \sin \alpha$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dn} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \sin \alpha$$

coseni direttori $\neq 0$

Risulta: $\frac{\partial W}{\partial x} = W_0 \cdot 2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \left(-\frac{2x}{a^2} \right)$,

$\frac{\partial W}{\partial y} = W_0 \cdot 2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \left(-\frac{2y}{b^2} \right)$.

E' quindi immediato osservare che risulta:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0} = 0; \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0} = 0.$$

Qualunque sia il valore dei coseni direttori (cioè il valore dell'angolo α) è dimostrato che risulta:

$$\left(\frac{dW}{dn} \right)_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0} = 0.$$

● L'espressione determinata per la funzione W è quindi la soluzione riponosa del problema.

- 1) La piastra si deforma secondo una superficie le cui curve di livello sono delle ellissi: $W_{max} = W_0 = \frac{q_0}{8B} \cdot \frac{a^4 b^4}{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4}$.
- 2) Possiamo determinare le massime sollecitazioni per effettuare le verifiche di resistenza. Si hanno le espressioni delle curvature

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = W_0 \cdot 2 \left[\left(-\frac{2x}{a^2} \right) \left(-\frac{2x}{a^2} \right) + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(-\frac{2}{a^2} \right) \right] =$$

$$= 2W_0 \left[\frac{4x^2}{a^4} - \frac{2}{a^2} + \frac{2x^2}{a^4} + \frac{2y^2}{a^2 b^2} \right] =$$

$$= -4W_0 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{3x^2}{a^4} - \frac{y^2}{a^2 b^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -4W_0 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{3y^2}{b^4} - \frac{x^2}{a^2 b^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = W_0 \cdot 2 \left(-\frac{2x}{a^2} \right) \cdot \left(-\frac{2y}{b^2} \right) = 8W_0 \cdot \frac{xy}{a^2 b^2}$$

Si ottengono quindi le espressioni dei momenti:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 4 \cdot B \cdot W_0 \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3x^2}{a^4} - \frac{y^2}{a^2 b^2} \right) + \nu \left(\frac{1}{b^2} - \frac{3y^2}{b^4} - \frac{x^2}{a^2 b^2} \right) \right]$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 4 \cdot B \cdot W_0 \left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{3y^2}{b^4} - \frac{x^2}{a^2 b^2} \right) + \nu \left(\frac{1}{a^2} - \frac{3x^2}{a^4} - \frac{y^2}{a^2 b^2} \right) \right]$$

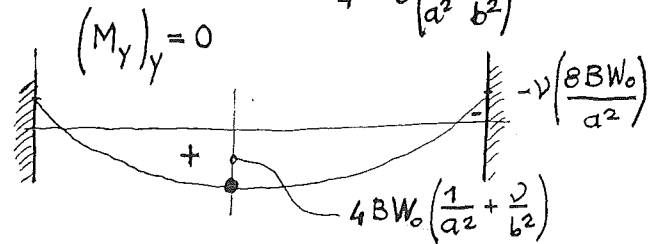
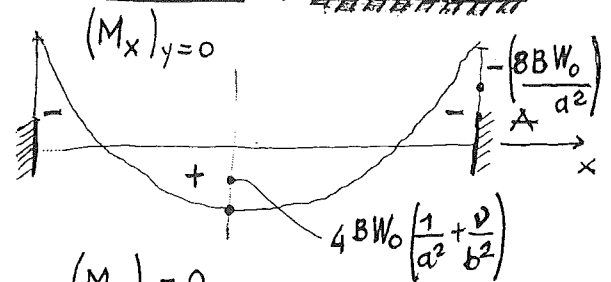
$$M_{xy} = -B(1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -8 \cdot B \cdot W_0 (1-\nu) \cdot \frac{xy}{a^2 b^2}$$

In particolare i momenti, flettenti e torcenti, al centro ($x=y=0$) valgono:

$$(M_x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 4 B W_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right)$$

$$(M_y)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 4 B W_0 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right)$$

$$(M_{xy})_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$$



I momenti flettenti e torcenti sul contorno alla estremità dell'asse più corto ($x=\pm a; y=0$) valgono:

$$(M_x)_{\substack{x=\pm a \\ y=0}} = - \left(\frac{8 B W_0}{a^2} \right);$$

$$(M_{xy})_{\substack{x=\pm a \\ y=0}} = 0;$$

$$(M_y)_{\substack{x=\pm a \\ y=0}} = - \nu \cdot \left(\frac{8 B W_0}{a^2} \right);$$

Il momento flettente $(M_x)_{x=\pm a, y=0}$ rappresenta (in valore assoluto) il momento più elevato che può calcolarsi nella piastra. Nel punto A esso tende le fibre superiori (è negativo).

I momenti flettenti e torcenti nel punto B valgono.

$$(M_x)_{\substack{x=0 \\ y=\pm b}} = -\nu \left(\frac{8Bw_0}{b^2} \right)$$

$$(M_y)_{\substack{x=0 \\ y=\pm b}} = - \left(\frac{8Bw_0}{b^2} \right)$$

$$(M_{xy})_{\substack{x=0 \\ y=\pm b}} = 0$$

È facile vedere che le sollecitazioni M_x e M_y nel punto B sono sensibilmente inferiori a quelle del punto A. A parità di tutti gli altri termini: $b \geq a$.

È appena il caso di osservare che tutti i precedenti momenti sono principali ($M_{xy} = 0$ per simmetria negli assi).

La verifica di resistenza si effettua nel punto di maggior sollecitazione che è il punto A.

Supponiamo $b = a$. Nel punto A si ottiene:

$$M_1 = - \frac{8BW_0}{a^2} \quad M_2 = - \nu \cdot \frac{8BW_0}{a^2}$$

$$\sigma_1 = \pm \frac{6}{j^2} \cdot \frac{8BW_0}{a^2} \quad \sigma_2 = \pm \frac{6}{j^2} \cdot \nu \cdot \frac{8BW_0}{a^2}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{48^2}{(j^2)^2} \cdot \left(\frac{BW_0}{a^2}\right)^2 (1 + \nu^2 - \nu)} =$$

$$= \frac{48}{j^2} \cdot \frac{BW_0}{a^2} \cdot \sqrt{1 + \nu^2 - \nu} =$$

$$= \frac{24}{j^2} \frac{BW_0}{a^2} \cdot 2 \sqrt{1 + \nu^2 - \nu} \leq \sigma_{am}$$

per $\nu = 0,3$ $2 \sqrt{1 + 0,09 - 0,3} = 2 \sqrt{0,79} \approx 2 \cdot 0,88 = \underline{\underline{1,77}}$

La precedente si può confrontare con la relazione che si ottiene nell'origine ($x=0, y=0$):

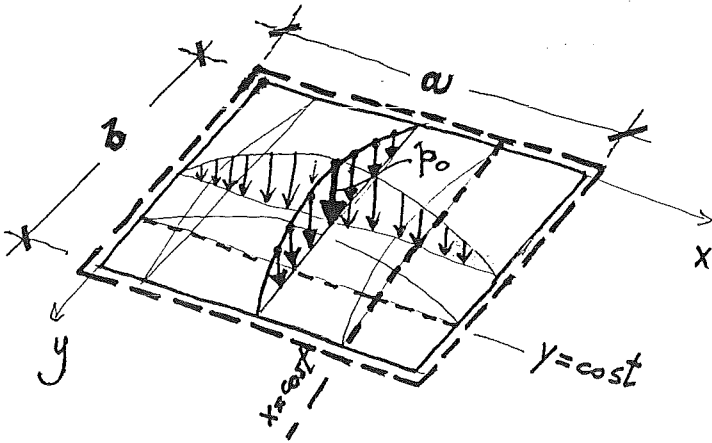
$$\sigma_{id} = \frac{24BW_0}{j^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \leq \sigma_{am}$$

ovvero:

$$\sigma_{id} = \frac{24BW_0}{j^2 \cdot a^2} (1 + \nu) \leq \sigma_{am}$$

essendo: $\eta = \frac{b}{a}$ per $\nu = 0,3$ $1 + \nu = \underline{\underline{1,3}}$

④ Piastra rettangolare appoggiata con carico "a collina"



- 4 lati appoggiati.
- carico "a collina" di equazione:

$$p(x, y) = p_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\text{per } y = \frac{b}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{b} \cdot \frac{b}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{" } x = \frac{a}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} \cdot \frac{a}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

Risulta quindi per $y = \frac{b}{2}$ e $x = \frac{a}{2}$: $p(x, y) = p_0$ (massima intensità del carico). Una qualunque sezione del carico (effettuata per $x = \text{cost}$ oppure per $y = \text{cost}$) individua un andamento sinusoidale: il carico è nullo in prossimità degli appoggi e massimo in prossimità degli assi della piastra.

- ① Assumiamo come funzione caratterizzante la superficie elastica deformata la seguente espressione:

$$W = W_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

- ② Calcoliamo il valore della costante W_0 (che rappresenta lo spostamento del baricentro della piastra) in modo che la funzione W soddisfi l'equazione indefinita di equilibrio elastico:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{B}$$

- ③ Verifichiamo che la funzione W soddisfa le condizioni al contorno.

- ④ determiniamo i momenti flettenti e torcenti;

- ⑤ Effettuiamo le verifiche di resistenza.

② determinazione della costante W₀.

Risultato:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W_0 \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \left(\frac{\pi}{a}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = W_0 \cdot \left(-\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \left(\frac{\pi^2}{a^2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = W_0 \cdot \left(-\cos \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \left(\frac{\pi^3}{a^3}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = W_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \cdot \left(\frac{\pi^4}{a^4}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = W_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \cdot \left(\frac{\pi^4}{b^4}\right)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = W_0 \left(-\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi^2}{a^2}\right) \left(-\operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}\right) \left(\frac{\pi^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = W_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \cdot \left(\frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{\pi^2}{b^2}\right)$$

Si ottiene quindi, imponendo il soddisfacimento della equazione indefinita di equilibrio elastico:

$$W_0 \left(\frac{\pi^4}{a^4} + 2 \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^4}{b^4}\right) \cdot \cancel{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}} \cdot \cancel{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}} = \frac{p_0}{B} \cdot \cancel{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}} \cdot \cancel{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}}$$

$$W_0 = \frac{p_0}{B \left[\frac{\pi^4}{a^4} + 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4}\right]} = \frac{p_0 \cdot a^4 b^4}{\pi^4 \cdot B [a^2 + b^2]^2}$$

Si deve quindi assumere:

$$W = p_0 \cdot \frac{a^4 b^4}{\pi^4 \cdot B \cdot [a^2 + b^2]^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

③ Per i lati appoggiati ortogonali a x deve risultare:

$$(W)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0$$

$$(W)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0$$

Essendo:

$$W = W_0 \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi x}{a}} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi y}{b}}; \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = -W_0 \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right) \underbrace{\sin \frac{\pi x}{a}} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi y}{b}}$$

è facile verificare, che risulta $\sin \frac{\pi x}{a} = 0$ sia per $x=0$ sia per $x=a$; le condizioni risultano quindi tutte verificate.

In modo perfettamente analogo per i lati appoggiati ortogonali a y si verifica che risulta.

$$(W)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$$

$$(W)_{y=b} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0$$

④ Poiché la funzione W determinata rappresenta la soluzione rigorosa del problema possiamo determinare le espressioni dei momenti flettenti e torcenti e delle azioni taglianti. Risultata:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{\pi^2} (b^2 + \nu a^2) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{\pi^2} \left[a^2 + \nu b^2 \right] \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = -B (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \frac{p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{(ab)^3}{\pi^2} \cdot (1-\nu) \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$T_x = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{p_0}{a^2 + b^2} \cdot \frac{ab^2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$T_y = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{p_0}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 b}{\pi} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{b}$$

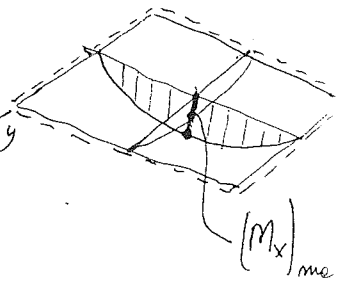
I momenti torcenti M_{xy} sono nulli per $x = a/2$ e per $y = b/2$, mentre assumono i valori massimi negli spigoli:



I momenti flettenti sono nulli nei bordi appoggiati e raggiungono il valore massimo nel baricentro della piastra ($x = a/2$; $y = b/2$). In tale punto si ha:

$$(M_x)_{\max} = \frac{p_0 \cdot a^2 b^2}{\pi^2 (a^2 + b^2)^2} (b^2 + \nu a^2) \quad (\equiv M_1)$$

$$(M_y)_{\max} = \frac{p_0 a^2 b^2}{\pi^2 (a^2 + b^2)^2} (a^2 + \nu b^2) \quad (\equiv M_2)$$



I suddetti momenti, per la nullità del momento torcente, sono "momenti principali". È agevole determinare gli spessori principali σ_1 e σ_2 in detto punto e effettuare la verifica di resistenza dopo calcolata la σ_{tolo} . Il massimo spostamento interviene ancora al centro della piastra ($x = a/2$; $y = b/2$) e vale:

$$(w)_{\max} = \frac{p_0 a^4 b^4}{\pi^4 B (a^2 + b^2)^2}$$

Determiniamo le reazioni vincolari al contorno. Le reazioni distribuite sui bordi $\perp x$ ne determinano con la relazione che fornisce il "taglio alla Kirchhoff":

$$N_x = \left(T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = \frac{p_0}{a^2 + b^2} \cdot \frac{ab^2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} +$$

$$- \frac{p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{a^3 b^2}{\pi^2} (1 - \nu) \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \left(- \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \right) \cdot \frac{\pi}{b} =$$

$$= \frac{p_0}{(a^2 + b^2)} \cdot \frac{2a^2 + b^2 - \nu a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{ab^2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

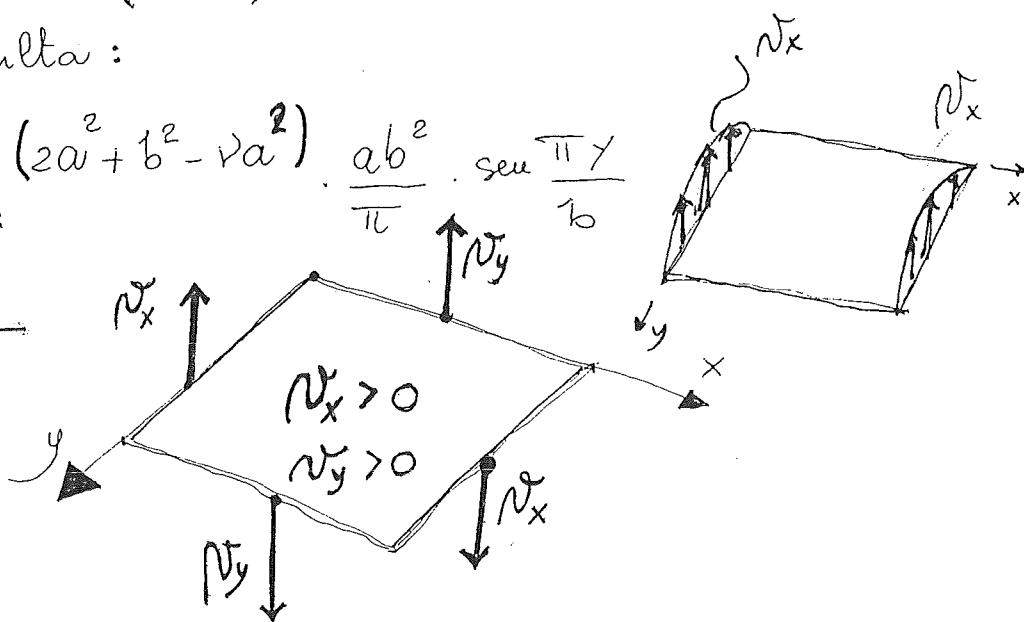
Per $x=0$ risulta:

$$(N_x)_{x=0} = \frac{p_0}{(a^2 + b^2)^2} (2a^2 + b^2 - \nu a^2) \frac{ab^2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

CONVENZIONE:
VERSI

POSITIVI
DI

N_x e N_y



Essendo $\int_0^b \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} dy = \left[-\frac{1}{\frac{\pi}{b}} \cos \frac{\pi y}{b} \right]_0^b = \frac{2b}{\pi}$

$$(V_x)_{x=0} = \frac{p_0}{(a^2 + b^2)^2} (2a^2 + b^2 - \nu a^2) \cdot \frac{ab^2}{\pi} \cdot \frac{2b}{\pi} \leftarrow \text{risultante delle } N_x \text{ per } x=0.$$

La risultante delle reazioni vincolari su ambedue i bordi $\perp x$, diretta verso l'alto, è pari al doppio della precedente quantità:

$$2 \cdot V_x = \frac{4 p_0}{(a^2 + b^2)^2} (2a^2 + b^2 - \nu a^2) \cdot \frac{ab^3}{\pi^2}$$

Si ottiene analogamente che la risultante delle reazioni vincolari distribuite su ambedue i bordi $\perp y$, diretta verso l'alto, è pari a:

$$2 \cdot V_y = \frac{4 p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot (2b^2 + a^2 - \nu b^2) \cdot \frac{b a^3}{\pi^2}$$

Si ottiene in definitiva la risultante delle reazioni ripartite applicate nel contorno =

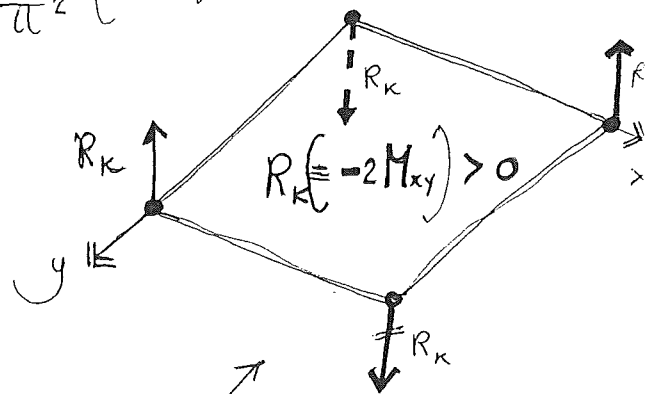
$$\begin{aligned} V &= 2V_x + 2V_y = \frac{4 p_0 \cdot a b}{(a^2 + b^2)^2 \cdot \pi^2} \left[b^2 [b^2 + a^2 (2 - \nu)] + a^2 [a^2 + b^2 (2 - \nu)] \right] \\ &= \frac{4 p_0 a b}{(a^2 + b^2)^2 \cdot \pi^2} \cdot (b^4 + a^4 + 2a^2 b^2 (2 - \nu)) \end{aligned}$$

La reazione concentrata nello spigolo di coordinate x e y vale:

$$R_K = (-2M_{xy}) = \frac{2 p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{a^3 b^3}{\pi^2} (1 - \nu) \cdot \left(\cos \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

Per $x=a$ e $y=b$ si ha:

$$(R_K)_{x=a, y=b} = \frac{2 p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{a^3 b^3}{\pi^2} (1 - \nu)$$



Convezione reazioni concentrate

La risultante delle reazioni vincolari concentrate negli spigoli è diretta verso il basso ed è pari a $4 R_K$. Si ottiene:

$$4 R_K = \frac{8 p_0}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{a^3 b^3}{\pi^2} (1 - \nu)$$

La risultante delle reazioni vincolari sul contorno (ripartite e concentrate) è pari a:

$$\begin{aligned} (\bar{V} - 4 R_K) &= \frac{4 p_0 \cdot ab}{(a^2 + b^2)^2 \cdot \pi^2} \left[a^4 + b^4 + \underline{4a^2 b^2} - \cancel{2a^2 b^2 \nu} - \underline{2a^2 b^2} + \cancel{2a^2 b^2} \right] \\ &= \frac{4 p_0 \cdot ab}{\cancel{(a^2 + b^2)^2} \cdot \pi^2} \cdot \left[\cancel{a^4 + b^4} + \cancel{2a^2 b^2} \right] = \frac{4 p_0 \cdot ab}{\pi^2} \end{aligned}$$

La risultante dei carichi esterni sulla piastra, essendo

$$p(x, y) = p_0 \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{a} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{b} \text{ vale:}$$

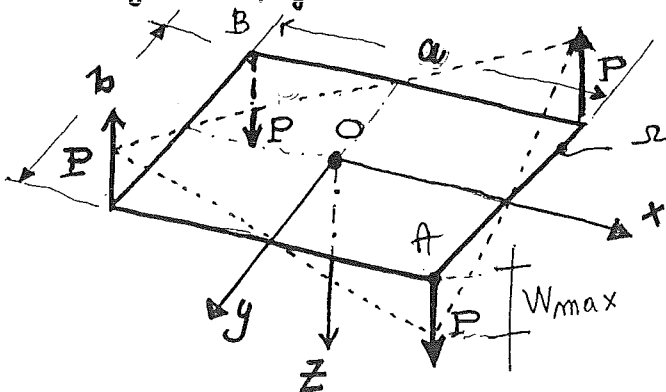
$$R = p_0 \int_0^a \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{a} dx \cdot \int_0^b \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{b} dy = p_0 \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2b}{\pi}$$

$$\int \sin kx \cdot dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C = \frac{4 p_0 ab}{\pi^2}$$

È risulta quindi verificato l'equilibrio globale alla traslazione in direzione dell'asse Z .

LE SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA 7/11/03

② Piastra rettangolare soggetta a forze concentrate P negli spigoli:



Il problema è quello che corrisponde alla flessione di una piastra rettangolare, sollecitata da quattro forze di intensità P agenti nei vertici, aventi direzioni ortogonali alla superficie media ed i versi riportati in figura =

1)

In questo caso la superficie della piastra non è soggetta a carico ripartito ($p(x,y) \equiv 0$) e l'equazione indefinita di equilibrio elastico diventa omogenea: $\nabla^4 w = 0$

2)

Le condizioni al contorno corrispondono a quelle dei bordi liberi:

lati $\perp x$:	$(M_x)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0$	$(N_x)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0$
lati $\perp y$:	$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0$	$(N_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0$

Si assume per la deformata elastica una funzione del tipo:

$$w = C \cdot xy$$

essendo C una opportuna costante da determinare.

È facile verificare che la funzione w , indipendentemente dal valore numerico della costante C , soddisfa sia le condizioni al contorno che l'equazione indefinita di equilibrio elastico.

Per quanto concerne il valore da assegnare alla costante C si osserva che, data l'espressione assegnata alla funzione w , il valore del momento torcente ^{è costante} in ogni punto della piastra (e quindi anche nel contorno) vale:

$$M_{xy} = -B(1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -B(1-\nu) \cdot C$$

A causa della discontinuità del momento torcente, negli spigoli, si hanno le forze concentrate:

$$P = -2M_{xy} = 2(1-\nu) \cdot B \cdot C$$

$$C = \frac{P}{2B(1-\nu)}$$

Pertanto la funzione w ha la forma:

$$w = \frac{P}{2B(1-\nu)} \cdot xy$$

Il massimo spostamento positivo si verifica nei punti A ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) e B ($x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2}$). Quello negativo (identico in valore assoluto) nei due spigoli restanti. Si ha:

$$w_{max} = \frac{Pab}{8B(1-\nu)}$$

La deformata è costituita da un paraboloide iperbolico con spostamenti nulli per $x=0$ e $y=0$ e variazioni lineari per $x=cost$ e $y=cost$.

Per quanto concerne le azioni interne è facile verificare che risulta:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$M_{xy} = -B \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -B(1-\nu) \cdot \frac{P}{2B(1-\nu)} = -\frac{P}{2} = \text{cost}$$

In ciascun punto della piastra i momenti flettenti sono nulli mentre il momento torcente è costante

Si individuano preliminarmente le direzioni principali
Risulta in ogni punto:

$$M_{nt} = \frac{M_y - M_x}{2} \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha \stackrel{=0}{=} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2M_{xy}}{M_y - M_x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow M_{nt} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty$$

Determino l'orientazione dell'asse n_0 .

$$\text{Si ottiene: } 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

In corrispondenza il momento principale M_1

$$\text{vale: } M_1 = \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} = \frac{P}{2}$$

La precedente relazione è valida anche per $\alpha_0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$, angolo che individua l'asse t_0 .

In corrispondenza si ha:

$$M_2 = \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} = -\frac{P}{2}$$

Noti i valori dei momenti principali si può effettuare la verifica di resistenza.

$$\sigma_1 = \pm \frac{6 \cdot \frac{P}{2}}{j^2}$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{6 \left(-\frac{P}{2} \right)}{j^2} = \mp \frac{6 \cdot \frac{P}{2}}{j^2}$$

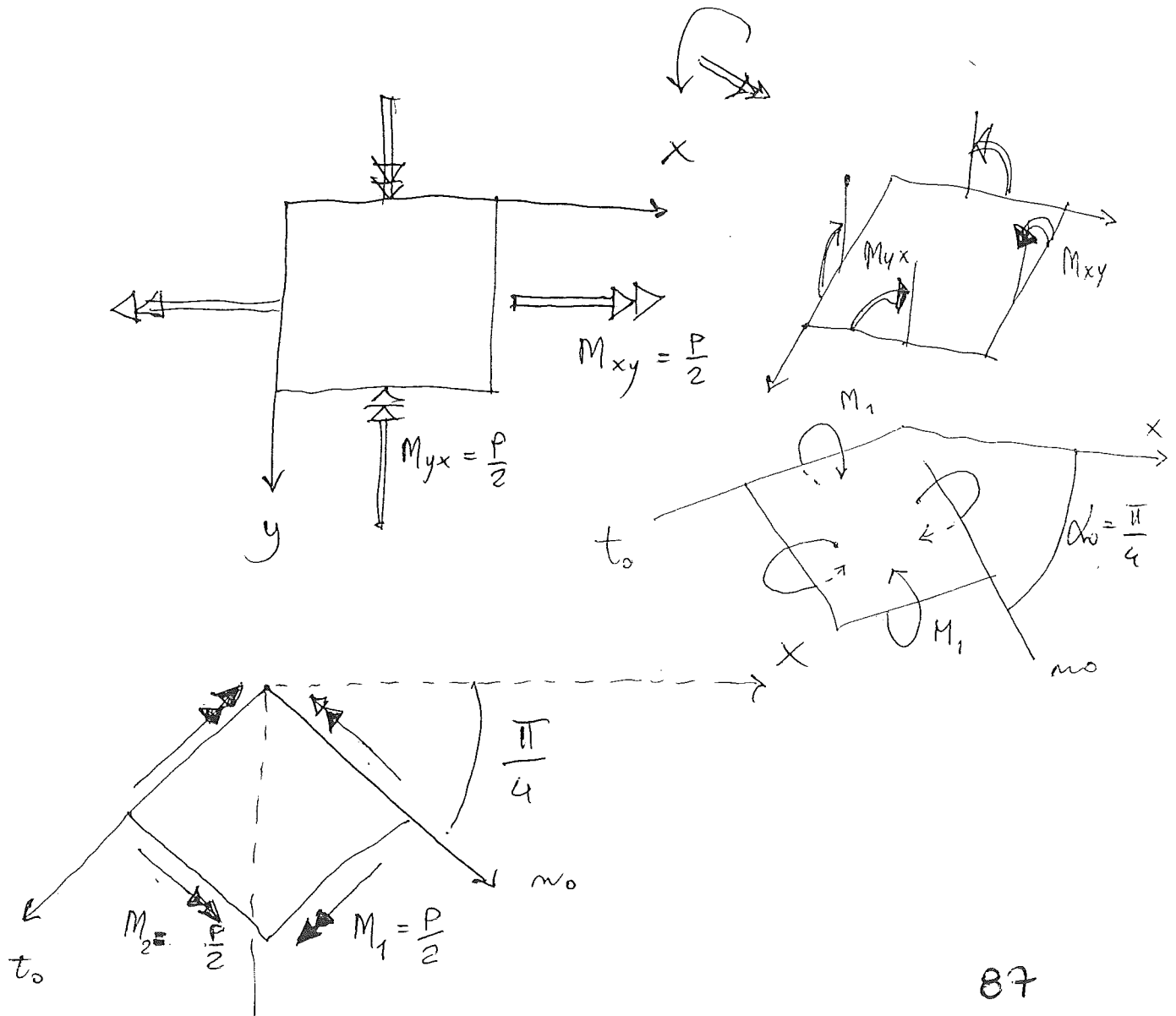
Riferendoci alle superficie limite inferiori si

ha:




$$\sigma_1 = + \frac{3P}{j^2}$$

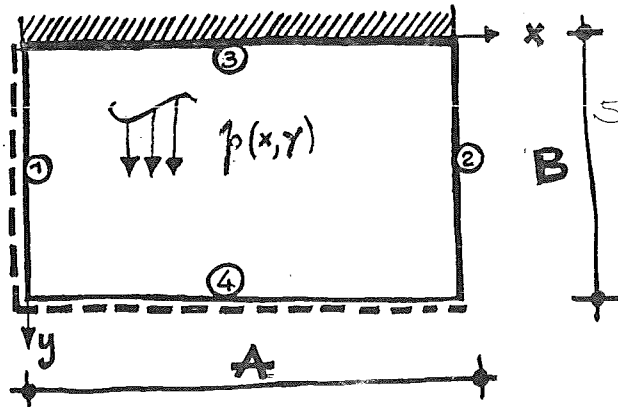
$$\sigma_2 = - \frac{3P}{j^2}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{9P^2}{j^2} + \frac{9P^2}{j^2} + \frac{9P^2}{j^2}} = \frac{3P}{j^2} \sqrt{3} \leq \sigma_{amm}$$



RISOLUZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE

-  bordo incastrato
-  bordo appoggiato
-  bordo libero



5/11/03
 Consideriamo la piastra rettangolare in figura. Supponiamo che questa piastra sia soggetta a carico uniformemente distribuito $p(x, y) = p_0 = \text{cost.}$

La risoluzione del problema richiede, secondo il metodo statico:

A: l'individuazione di una funzione $W(x, y)$ che soddisfi all'equazione alle derivate parziali del 4° ordine che regge il problema dell'equilibrio elastico delle piastre rettangolari:

$$\nabla^4 W = \frac{p(x, y)}{B} \Rightarrow \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{B} \quad \left(\text{con } B = \frac{E_3^3}{12(1-\nu^2)} \right)$$

rispetti le specifiche condizioni al contorno:

$(W)_{x=0} = 0$	$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0$	} ① BORDO $\perp x$ APPOGGIATO
$(M_x)_{x=A} = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=A} = 0$	$(\nu_x)_{x=A} = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=A} = 0$	
$(W)_{y=0} = 0$	$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$	} ③ BORDO $\perp y$ INCASTRATO
$(W)_{y=B} = 0$	$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{y=B} = 0$	

B: il calcolo delle componenti di azione interna:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad T_x = -B \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad T_y = -B \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -B(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

almeno nei punti più significativi della piastra.

C: La verifica della struttura (eventualmente preceduta dal dimensionamento delle armature se è in calcestruzzo armato) -

IL METODO DI RISOLUZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE

● L'integrale di equazioni differenziali alle derivate parziali (come quella che si incontra nelle piastre rettangolari) solo in casi molto particolari può essere fornito in "forma chiusa" (cioè deducendo l'espressione analitica della funzione $w(x, y)$).

Parzialmente può essere ottenuta in "forma aperta" (cioè approssimandola con un numero indefinito di termini) mediante i metodi di sviluppo in serie ("serie doppie di Fourier" o "serie semplici di Levy").

Nella grande parte dei casi di interesse tecnico si deve ricorrere ai metodi di soluzione numerica.

Uno dei più importanti è il metodo di integrazione delle equazioni differenziali detto delle differenze finite.

● Secondo questo metodo, preso atto della difficoltà insita nella determinazione degli spostamenti w negli ∞^2 punti della piastra (ovvero nella determinazione della funzione $w(x, y)$), ci si accontenta di determinare gli spostamenti w_i in un numero limitato di punti i , scelti appositamente nella piastra.

● Alle Differenze finite sia l'equazione indefinita di equilibrio sia le condizioni al contorno sia le espressioni delle azioni interne ($M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y$) vengono tradotte in equazioni di tipo algebrico, lineari negli spostamenti w_i .

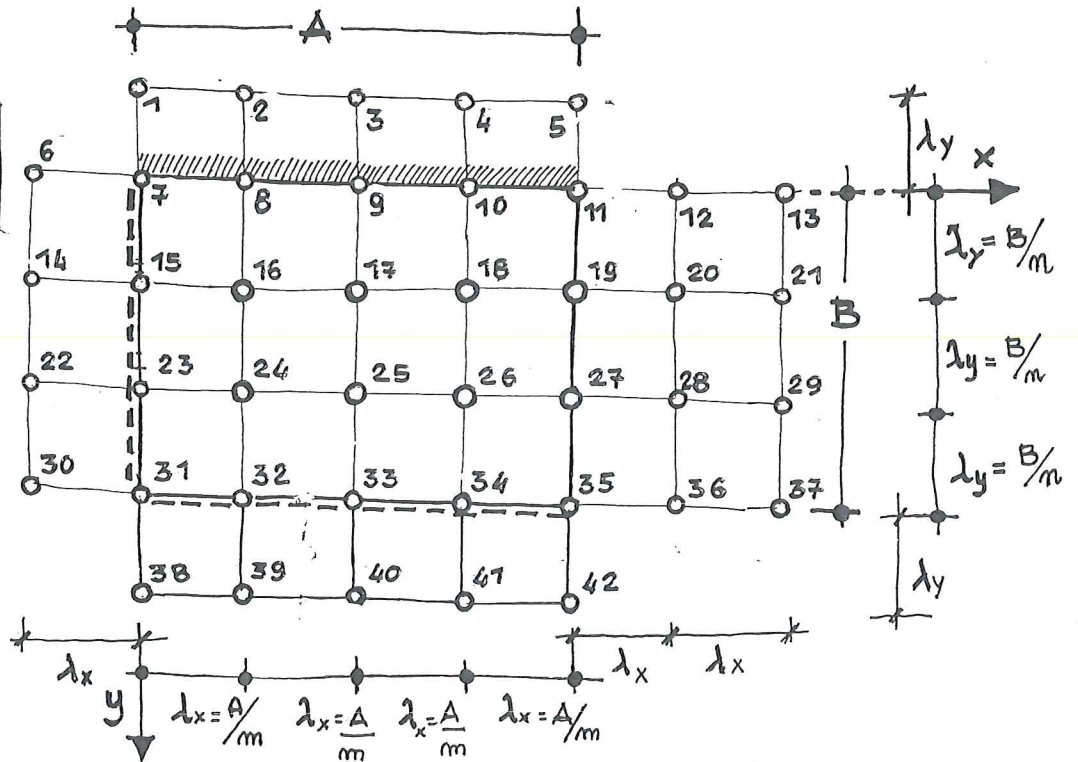
● Come si vedrà, scelti i punti i nei quali calcolare gli spostamenti w_i è possibile scrivere, utilizzando l'equazione indefinita di equilibrio e le condizioni al contorno (alle differenze finite), tante equazioni indipendenti quanti sono i punti i .

Risolto il sistema di equazioni si ottengono gli spostamenti w_i , che poi consentono il calcolo delle azioni interne M_x, M_y, M_{xy}, T_x e T_y nei punti interni della piastra e nei suoi bordi.

SCELTA DEI PUNTI i

$m = 4$

$n = 3$



L'individuazione degli i punti nei quali calcolare gli spostamenti w_i si effettua in questo modo:

(a) si suddivide la piastra di dimensioni A e B in m strisce lungo x ed n strisce lungo y . Si ottengono gli intervalli $\lambda_x = A/m$ e $\lambda_y = B/m$ (evidentemente m, n sono interi). La scelta di m ed n non è soggetta ad alcuna limitazione, in linea di principio. Più m ed n sono grandi più sono precisi i risultati che generalmente si ottengono ma, in compenso, aumenta la mole dei calcoli. Nel caso in figura si ha $m=4$ $n=3$.

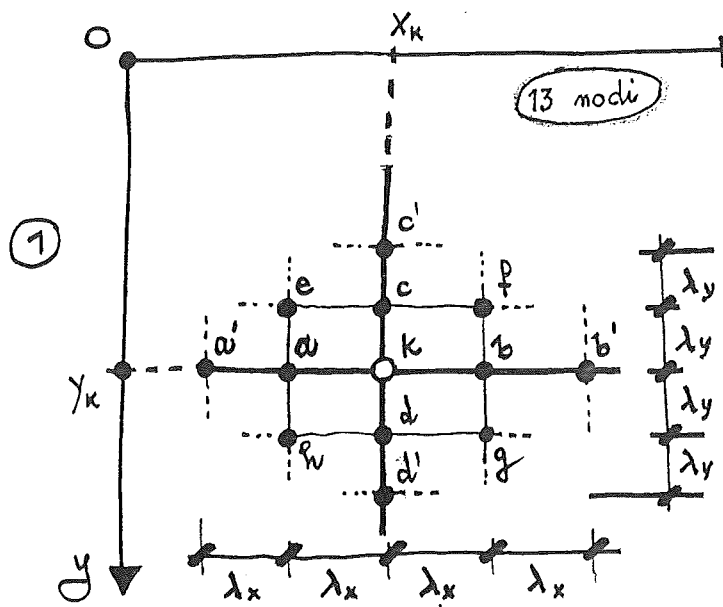
(b) si individua un reticolo di punti, distanziati di λ_x e λ_y , ricadenti dentro la piastra e sul contorno.

(c) si amplia il reticolo inserendo strisce supplementari esterne larghe λ_x lungo x e λ_y lungo y . Il numero di strisce dipende dal tipo di bordo:

- { bordi incastrati o appoggiati richiedono 1 striscia
- { bordi liberi _____ richiedono 2 strisce.

I nodi introdotti con le strisce supplementari hanno la funzione di consentire la imposizione della condizione al contorno.

LE "DIFFERENZE CENTRALI"

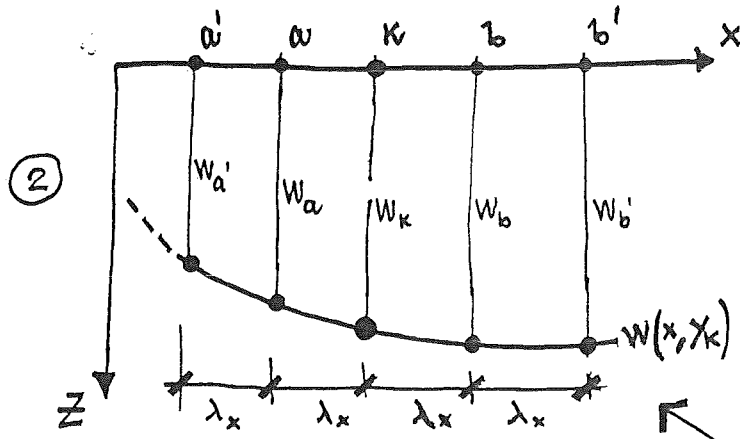


Consideriamo quindi un tipico nodo k , appartenente al reticolo prima disegnato.

È possibile ora introdurre il concetto di "differenza centrale".

Le "differenze centrali" sono le espressioni che, nel metodo delle differenze finite, approssimano le derivate parziali della $W(x, y)$.

Si parla di "differenza centrale prima", "differenza centrale seconda" etc....



Si consideri una sezione della piastra con un piano passante per k e b all'asse y .

La sezione produce una traccia della funzione W dipendente dalla sola variabile x : $W(x, y_k)$.

La definizione di derivata parziale destra della funzione W rispetto alla variabile indipendente x , afferma che esiste il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \lim_{\lambda_x \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_x} [W(x + \lambda_x; y) - W(x; y)]$$

Per valori sufficientemente piccoli dell'incremento λx si può scrivere:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) \cong \frac{1}{\lambda x} [W(x+\lambda x; y) - W(x, y)]$$

ovvero: "che la derivata è approssimativamente uguale al rapporto incrementale"

Si scrive:

$$\lambda x \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) \cong (W(x+\lambda x; y) - W(x, y)) = \Delta_x \cdot W(x, y)$$

dove si è introdotto l'operatore alle differenze Δ_x detto "prima differenza in avanti secondo x"

Se, ad esempio, ci riferiamo al punto k , di coordinate x_k e y_k , si verifica facilmente, tenendo anche conto della fig. (2), che risulta =

$$\lambda x \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_k \cong \Delta_x \cdot W_k = (W(x_k + \lambda x; y_k) - W(x_k; y_k)) = W_b - W_k$$

e quindi: $\Delta_x \cdot W_k$ rappresenta la "prima differenza in avanti" della funzione W nel punto k che vale $(W_b - W_k)$.

Im modo perfettamente analogo, a partire dalla definizione di derivata parziale sinistra della funzione W secondo x , si perviene alla introduzione dell'operatore ∇_x detto "prima differenza all'indietro secondo x ".

Si ha:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \lim_{\lambda x \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda x} [W(x; y) - W(x - \lambda x; y)],$$

e poiché per valori sufficientemente piccoli dell'incremento λx si può ammettere che la derivata è approssimativamente uguale al corrispondente rapporto incrementale si può porre:

$$\lambda x \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) \cong [W(x; y) - W(x - \lambda x; y)] = \nabla_x \cdot W(x, y)$$

● Riferendoci ancora, a titolo esemplificativo, al nodo K , di coordinate x_K, y_K si ha:

$$\lambda_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_K \cong \nabla_x \cdot W_K = [W(x_K, y_K) - W(x_K - \lambda_x, y_K)] = W_K - W_a$$

e quindi: $\nabla_x \cdot W_K$ rappresenta la prima differenza all'indietro in direzione x della funzione W nel nodo K e vale $(W_K - W_a)$.

□ Possiamo ora introdurre l'operatore δ_x detto "prima differenza centrale secondo x ". Per definizione:

$$\lambda_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \cong \delta_x \cdot W(x, y) = \frac{1}{2} [\Delta_x \cdot W(x, y) + \nabla_x \cdot W(x, y)]$$

ovvero:

$$\lambda_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \cong \delta_x \cdot W(x, y) = \frac{W(x + \lambda_x, y) - W(x - \lambda_x, y)}{2}$$

● Riferendoci a titolo esemplificativo al nodo K , di coordinate x_K, y_K , otteniamo:

$$\lambda_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_K \cong \delta_x \cdot W_K = \frac{W(x_K + \lambda_x, y_K) - W(x_K - \lambda_x, y_K)}{2} = \frac{W_b - W_a}{2}$$

e quindi: $\delta_x \cdot W_K$ rappresenta la prima differenza centrale della funzione W , in direzione x , nel nodo K e vale: $\frac{W_b - W_a}{2}$.

□ Introduciamo ora l'operatore δ_x^2 detto "seconda differenza centrale secondo x ". Per definizione:

$$\lambda_x^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \cong \delta_x^2 \cdot W(x, y) = \Delta_x (\nabla_x \cdot W(x, y)) = \nabla_x (\Delta_x \cdot W(x, y)) = W(x - \lambda_x, y) - 2W(x, y) + W(x + \lambda_x, y)$$

● Considerando ancora a titolo esemplificativo il nodo K , di coordinate x_K, y_K si ottiene:

$$\lambda_x^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_K \cong \delta_x^2 \cdot W_K = W(x_K - \lambda_x, y_K) - 2W(x_K, y_K) + W(x_K + \lambda_x, y_K) = W_a - 2W_K + W_b$$

e quindi: $\delta_x^2 \cdot W_K$ rappresenta la seconda differenza centrale in direzione x nel nodo K e vale: $W_a - 2W_K + W_b$

● L'introduzione dell'operatore δ_x "differenza centrale prima" e δ_x^2 "differenza centrale seconda" consente di ottenere, in funzione di un numero discreto di valori della funzione W , delle utili approssimazioni delle derivate parziali in direzione x . Il valore di queste, nel modo k , si desume dalle relazioni precedenti:

$$\lambda_x \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_k \approx \frac{W_b - W_a}{2} = \delta_x \cdot W_k$$

$$\lambda_x^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_k \approx W_a - 2W_k + W_b = \delta_x^2 \cdot W_k$$

● Utilizzando i predetti operatori possiamo calcolare le differenze centrali terze e quarte, e quindi ottenere le espressioni mediante le quali approssimare le derivate parziali secondo x , di grado più elevato, nel modo k .

Terremo conto della proprietà: $\delta^{m+n} = \delta^m \cdot \delta^n$

Per la derivata terza:

$$\begin{aligned} \lambda_x^3 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)_k &\approx \delta_x^3 \cdot W_k = \delta_x (\delta_x^2 \cdot W_k) = \delta_x (W_a - 2W_k + W_b) = (\delta_x \cdot W_a - 2\delta_x \cdot W_k + \delta_x \cdot W_b) = \\ &= \left(\frac{W_k - W_a}{2} - 2 \cdot \frac{W_b - W_a}{2} + \frac{W_b' - W_k}{2} \right) = \frac{-W_a' + 2W_a - 2W_b + W_b'}{2} \end{aligned}$$

Per la derivata quarta:

$$\begin{aligned} \lambda_x^4 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right)_k &\approx \delta_x^4 \cdot W_k = \delta_x^2 (\delta_x^2 \cdot W_k) = \delta_x^2 (W_a - 2W_k + W_b) = (\delta_x^2 \cdot W_a - 2\delta_x^2 \cdot W_k + \delta_x^2 \cdot W_b) = \\ &= \left((W_a' - 2W_a + W_k) - 2(W_a - 2W_k + W_b) + (W_k - 2W_b + W_b') \right) = \\ &= W_a' - 4W_a + 6W_k - 4W_b + W_b' \end{aligned}$$

In definitiva le derivate parziali nel modo k , in direzione x , sono approssimate dalle seguenti espressioni:

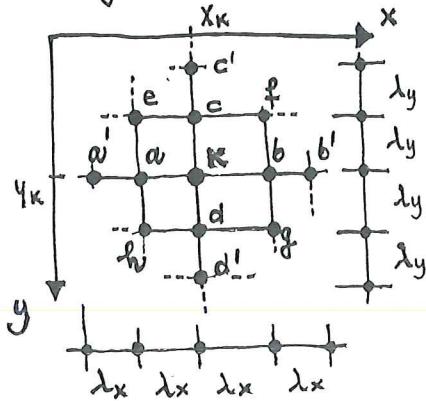
$$\lambda_x^3 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)_k \approx \frac{-W_a' + 2W_a - 2W_b + W_b'}{2} = \delta_x^3 \cdot W_k$$

$$\lambda_x^4 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right)_k \approx W_a' - 4W_a + 6W_k - 4W_b + W_b' = \delta_x^4 \cdot W_k$$

SOLUZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE

Riepilogo dei risultati conseguiti -

6.11.03



Abbiamo visto come si possono approssimare alle differenze finite le espressioni delle derivate parziali della funzione $w(x,y)$ nel modo k di un reticolo di punti di una piastra rettangolare -

Abbiamo ottenuto che:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k \approx \frac{W_b - W_a}{2\lambda_x}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k \approx \frac{W_d - W_c}{2\lambda_y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k \approx \frac{W_a - 2W_k + W_b}{\lambda_x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k \approx \frac{W_c - 2W_k + W_d}{\lambda_y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k \approx \frac{W_e + W_g - W_f - W_h}{4 \cdot \lambda_x \lambda_y}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_k \approx \frac{-W_{a'} + 2W_a - 2W_b + W_{b'}}{2\lambda_x^3}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_k \approx \frac{-W_{c'} + 2W_c - 2W_d + W_{d'}}{2\lambda_y^3}$$

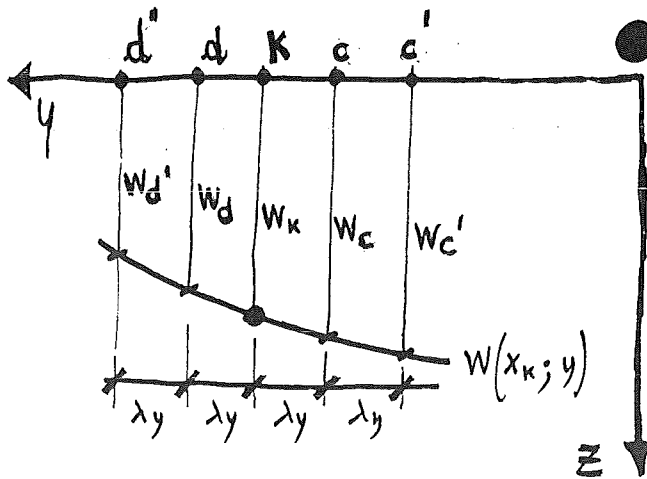
$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_k \approx \frac{W_f + W_g - W_e - W_h - 2W_b + 2W_a}{2\lambda_x \lambda_y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)_k \approx \frac{W_g + W_h - W_e - W_f - 2W_d + 2W_c}{2\lambda_y \lambda_x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k \approx \frac{W_{a'} - 4W_a + 6W_k - 4W_b + W_{b'}}{\lambda_x^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k \approx \frac{W_{c'} - 4W_c + 6W_k - 4W_d + W_{d'}}{\lambda_y^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k \approx \frac{(W_e + W_f + W_g + W_h) - 2(W_a + W_b + W_c + W_d) + 4W_k}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}$$



Una trattazione perfettamente analoga può essere sviluppata in direzione y.

Scambiando: y con x
 c con d
 c' con d'
 d con b
 d' con b'
 λ_y con λ_x

si ottiene in definitiva:

$$\lambda_y \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_K \approx \frac{W_d - W_c}{2} = \delta_y \cdot W_K$$

$$\lambda_y^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_K \approx W_c - 2W_K + W_d = \delta_y^2 \cdot W_K$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right)_K \approx \frac{-W_{c'} + 2W_c - 2W_d + W_{d'}}{2 \cdot \lambda_y^3}$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right)_K \approx \frac{W_{c'} - 4W_c + 6W_K - 4W_d + W_{d'}}{\lambda_y^4}$$

L'uso degli operatori differenza centrale consente poi di definire le derivate miste della funzione W nel nodo K.
 Si ha ad esempio:

$$\lambda_x \cdot \lambda_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_K \approx \delta_x (\delta_y \cdot W_K) = \delta_x \left(\frac{W_d - W_c}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{W_g - W_h}{2} - \frac{W_f - W_e}{2} \right) = \frac{W_e + W_g - W_f - W_h}{4}$$

e in definitiva:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_K \approx \frac{W_e + W_g - W_f - W_h}{4 \lambda_x \cdot \lambda_y}$$

Analogamente:

$$\lambda_y \cdot \lambda_x^2 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right)_K \approx \delta_y (\delta_x^2 \cdot W_K) = \delta_y (W_a - 2W_K + W_b) = (\delta_y W_a - 2\delta_y W_K + \delta_y W_b) = \left(\frac{W_h - W_e}{2} - 2 \cdot \frac{W_d - W_c}{2} + \frac{W_g - W_f}{2} \right) = \frac{1}{2} (W_g + W_h - (W_e + W_f) - 2(W_d - W_c))$$

e in definitiva:

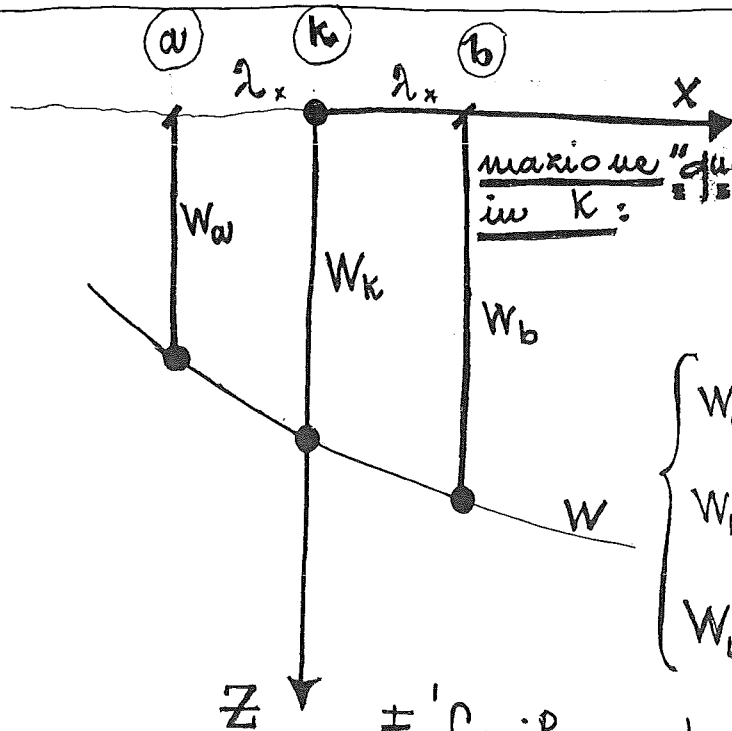
$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right)_K \approx \frac{W_g + W_h - (W_e + W_f) - 2(W_d - W_c)}{2 \cdot \lambda_y \cdot \lambda_x^2}$$

A seguito di quanto visto risulta immediato mostrare che risulta:

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right)_k \stackrel{||S}{=} \frac{W_f + W_g - (W_e + W_h) - 2(W_b - W_a)}{2 \lambda_x \lambda_y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_k \stackrel{||S}{=} \frac{W_e + W_f + W_g + W_h - 2(W_a + W_b + W_c + W_d) + 4W_k}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}$$

APPROSSIMAZIONE UTILIZZATA



Si mostra facilmente che le espressioni ottenute da livello da una approssimazione "quadratica" della funzione W

$$W = A \cdot X^2 + B \cdot X + C$$

$$\begin{cases} W_a = A \cdot \lambda_x^2 - B \cdot \lambda_x + C \\ W_k = C \\ W_b = A \cdot \lambda_x^2 + B \cdot \lambda_x + C \end{cases}$$

È facile vedere che risulta:

$$C = W_k$$

$$A = \frac{W_a - 2W_k + W_b}{2\lambda_x^2}$$

$$B = \frac{W_b - W_a}{2\lambda_x}$$

Allora:

$$W = \left(\frac{W_a - 2W_k + W_b}{2\lambda_x^2} \right) \cdot X^2 + \left(\frac{W_b - W_a}{2\lambda_x} \right) \cdot X + (W_k)$$

Se quindi calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione W nel nodo k ($x=0$), otteniamo:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)_k = \left(\frac{W_b - W_a}{2\lambda_x} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)_k = \left(\frac{W_a - 2W_k + W_b}{\lambda_x^2} \right) \quad 98$$

LE AZIONI INTERNE $M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y$

Siamo in grado di scrivere le espressioni delle azioni interne nel punto K della piastra, sostituendo alle derivate parziali nel punto le espressioni alle differenze finite che tali derivate approssimano.

Si ha:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_x \approx -B \left(\frac{w_a - 2w_k + w_b}{\lambda_x^2} + \nu \frac{w_c - 2w_k + w_d}{\lambda_y^2} \right)$$

e per $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$:

$$M_x \approx -\frac{B}{\lambda^2} \left[(w_a + w_b) + \nu(w_c + w_d) - 2(1+\nu) \cdot w_k \right]$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_y \approx -B \left(\frac{w_c - 2w_k + w_d}{\lambda_y^2} + \nu \frac{w_a - 2w_k + w_b}{\lambda_x^2} \right)$$

e per $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$:

$$M_y \approx -\frac{B}{\lambda^2} \left(\nu(w_a + w_b) + (w_c + w_d) - 2(1+\nu) \cdot w_k \right)$$

$$M_{xy} = -B(1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{xy} \approx -B(1-\nu) \cdot \frac{w_e + w_g - w_f - w_h}{4 \cdot \lambda_x \lambda_y}$$

e per $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$:

$$M_{xy} \approx -\frac{B(1-\nu)}{\lambda^2} \cdot \frac{w_e + w_g - w_f - w_h}{4}$$

$$T_x = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$T_x \approx -B \left(\frac{-w_a' + 2w_a - 2w_b + w_b'}{2\lambda_x^3} + \frac{w_f + w_g - (w_e + w_h) - 2(w_b - w_a)}{2\lambda_x \lambda_y^2} \right)$$

e per $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$:

$$T_x \approx -\frac{B}{\lambda^3} \left(\frac{-w_a' + 4w_a - 4w_b + w_b' + w_f + w_g - w_e - w_h}{2} \right)$$

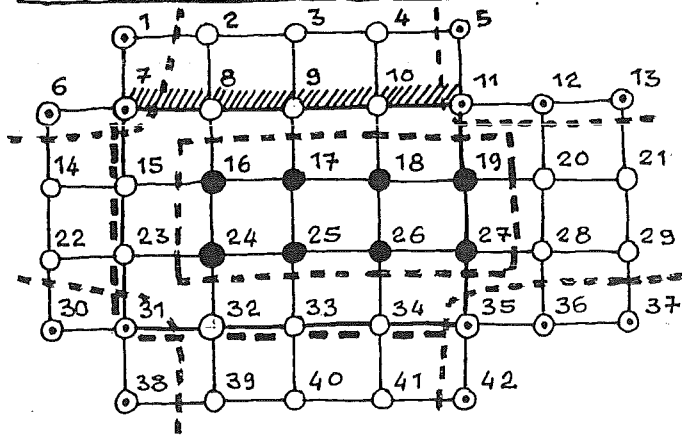
$$T_y = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)$$

$$T_y \approx -B \left(\frac{-w_c' + 2w_c - 2w_d + w_d'}{2\lambda_y^3} + \frac{w_g + w_h - (w_e + w_f) - 2(w_d - w_c)}{2\lambda_x^2 \lambda_y} \right)$$

e per $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$:

$$T_y \approx -\frac{B}{\lambda^3} \left(\frac{-w_c' + 4w_c - 4w_d + w_d' + w_g + w_h - w_e - w_f}{2} \right)$$

IL SISTEMA RISOLVENTE



Si è visto in precedenza come, data una piastra rettangolare di spessore costante, comunque vincolata sul contorno, si costruisce il reticolo dei nodi per l'applicazione del metodo alle differenze finite.

Abbiamo a titolo esemplificativo applicato il metodo alla piastra che si riporta a lato

adottando $m=4$ e $n=3$ e ottenendo in tal modo un reticolo di 42 nodi.

Ammettiamo nel seguito, al solo scopo di fissare le idee, che le dimensioni A e B (lati della piastra) siano tali per cui $\lambda_x = A/4$ e $\lambda_y = B/3$ siano uguali, ovvero $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$. Se con non fosse il ragionamento che segue non perderebbe comunque di validità: solamente, anziché usare le formule particolari con $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ si devono usare quelle generali con $\lambda_x \neq \lambda_y$.

Prevedendo quanto sopra si è detto anche che utilizzando l'espressione dell'equazione indefinita di equilibrio alle differenze finite e le espressioni delle condizioni al contorno alle differenze finite si sarebbero potute scrivere tante equazioni indipendenti quanti sono i nodi del reticolo (e ricavare così, risolvendo il sistema, gli spostamenti w_i di ciascun nodo i del reticolo).

Vediamo di approfondire questo aspetto della procedura risolutiva.

Prescindendo dai numeri assegnati ai nodi, si consideri che questi possono suddividersi, in ogni caso, in tre gruppi.

1° GRUPPO

Nodi interi alla piastra o ricadenti sui bordi liberi per i quali, non sussistendo alcun vincolo esterno che ne impedisca lo spostamento verticale, ha significato la scrittura di una equazione di equilibrio alla traslazione verticale. Tali nodi sono indicati con un cerchio nero nell'esempio (modi 16, 17, 18, 19, 24, 25, 26, 27). In ciascuno di questi punti si deve scrivere l'equazione di equilibrio elastico alle differenze finite.

2° GRUPPO

Nodi giacenti sui bordi appoggiati o incastrati (ma non di spigolo) e sulle linee supplementari (esclusi quelli sulle linee che prolungano i bordi), indicati con cerchio bianco. Essi possono essere considerati a gruppi di 2, giacenti sulla normale al bordo cui competono (es.: 20 e 21 oppure 28 e 29 sul bordo libero; 9 e 3 sul bordo incastrato; 33 e 40 su un bordo appoggiato etc.). Per ciascuna coppia di punti, come sopra definita si scrivono due equazioni indipendenti, quante sono le condizioni al contorno che competono in ciascun tipo di bordo.

3° GRUPPO

Sono i modi di spigolo e quelli giacenti sulle linee del reticolo di prolungamento dei bordi. Nell'esempio in figura sono indicati con cerchio e punto centrale.

Per i suddetti punti è necessaria una discussione particolare, in quanto non tutti sono coinvolti nella scrittura delle equazioni di equilibrio elastico che si effettua per i nodi del 1° gruppo. Specificheremo caso per caso quali nodi è necessario mantenere e quali condizioni al contorno si devono scrivere.

Troveremo inoltre, in un caso speciale, che occorre invece aggiungere nodi al reticolo. Specificheremo anche in questo caso le C. al C. da imporre.

ESPRESSIONE ALLE DIFFERENZE FINITE DELL'EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO ELASTICO NEL NODO K

$$\boxed{\nabla^4 W = \frac{p(x,y)}{B}} \iff \boxed{\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{B}}$$

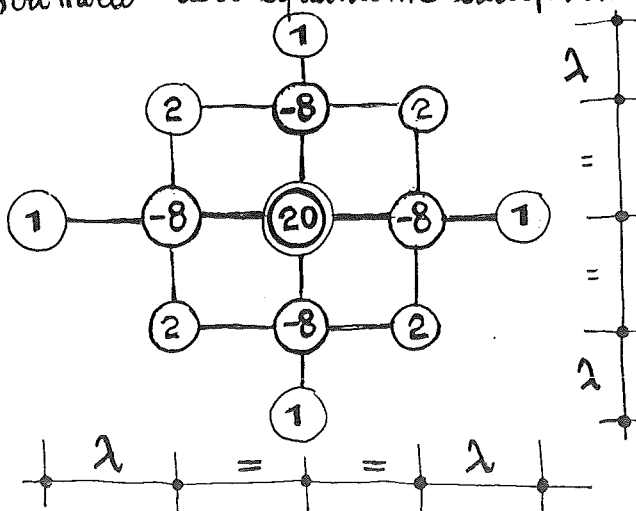
- Nel generico punto K evidentemente il carico ripartito per unità di superficie vale: $p(x_K, y_K) = p_K$, mentre le derivate parziali possono scriversi localmente in modo approssimato utilizzando le espressioni alle differenze finite prima ricavate. Si ottiene operando ovvie sostituzioni e semplificazioni:

$$\lambda_y^4 (W_a' - 4W_a + 6W_K - 4W_b + W_b') + 2\lambda_x^2 \lambda_y^2 [W_e + W_f + W_g + W_h - 2(W_a + W_b + W_c + W_d) + 4W_K] + \lambda_x^4 (W_c' - 4W_c + 6W_K - 4W_d + W_d') = \frac{p_K \cdot \lambda_x^4 \lambda_y^4}{B}$$

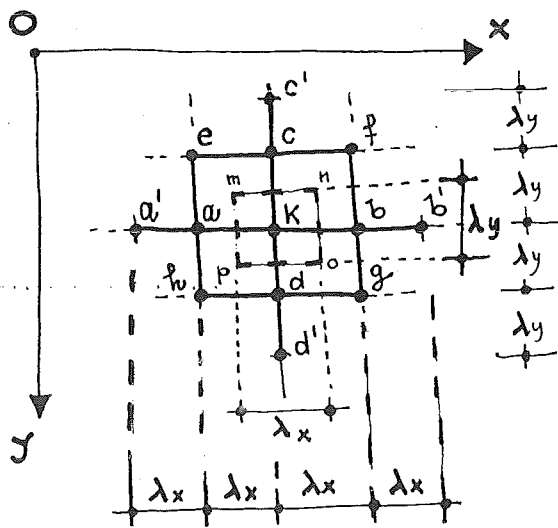
- Qualora il reticolo dei nodi sia quadrato, ovvero $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$:

$$\boxed{(W_a' + W_b' + W_c' + W_d') - 8(W_a + W_b + W_c + W_d) + 2(W_e + W_f + W_g + W_h) + 20W_K = \frac{p_K \cdot \lambda^4}{B}}$$

In questo ultimo caso si può fornire una rappresentazione grafica dei coefficienti che moltiplicano gli spostamenti W_i degli i nodi che la scrittura dell'equazione indefinita di equilibrio coinvolge.



CARICHI CONCENTRATI



Può capitare l'eventualità che internamente alla piastra oltre al carico distribuito $p(x,y)$ agiscano carichi concentrati.

Sia ad esempio P_k il carico concentrato agente nel modo k . Possiamo pensare di sostituirgli un carico uniformemente distribuito su un rettangolo $m \times p$, di lati λ_x e λ_y , e avente intensità:

$$p'_k = \frac{P_k}{\lambda_x \cdot \lambda_y}$$

Il termine a destra dell'equazione indefinita di equilibrio si modifica

$$\text{-----} = \frac{(p_k + p'_k) \lambda_x^4 \cdot \lambda_y^4}{B} = \frac{(p_k \cdot \lambda_x \lambda_y + P_k) \cdot \lambda_x^3 \lambda_y^3}{B}$$

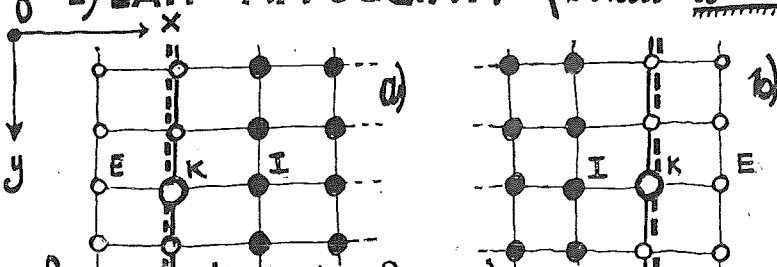
Qualora il reticolo abbia una maglia quadrata ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda$) si ha ovviamente:

$$\text{-----} = \frac{(p_k \cdot \lambda^2 + P_k) \cdot \lambda^2}{B}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO NEI BORDI

10/11/03

1) LATI APPOGIATI (bordi "a livello", ovvero vincoli "rigidi")



Consideriamo un punto K , appartenente a un bordo appoggiato con continuità \perp a x . Possiamo verificarci i due casi in figura.

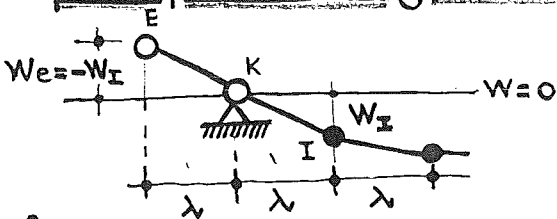
Le condizioni al contorno si scrivono: in forma differenziale

$$\begin{cases} [W(x,y)]_K = 0 \\ \left[\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} \right]_K = 0 \end{cases}$$

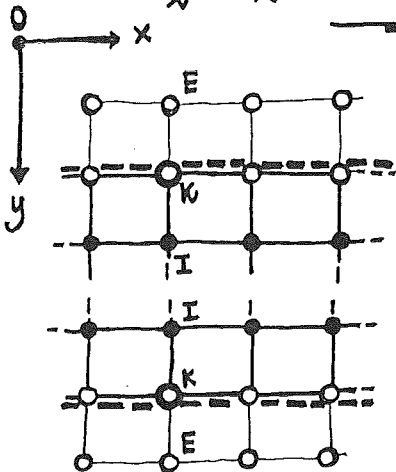
alle differenze finite

$$\begin{cases} W_K = 0 \\ \frac{W_E - 2W_K + W_I}{\lambda^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_K = 0 \\ W_E = -W_I \end{cases}$$

Interpretazione geometrica



Il punto supplementare E (esterno), il punto di bordo K e il punto I (interno) giacciono su una stessa retta passante per K.



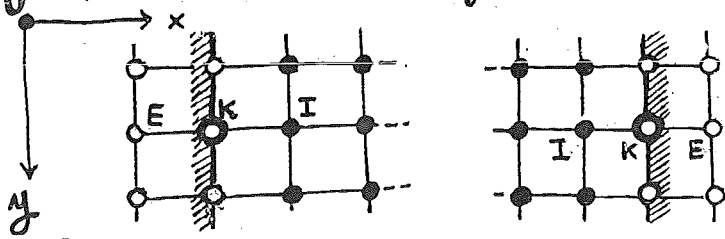
Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} [W(x,y)]_K = 0 \\ \left[\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} \right]_K = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_K = 0 \\ \frac{W_E - 2W_K + W_I}{\lambda^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_K = 0 \\ W_E = -W_I \end{cases}$$

Allo stesso identico risultato si perviene ovviamente se il lato è $\perp y$.

2) LATI INCASTRATI (bordi "a livello")

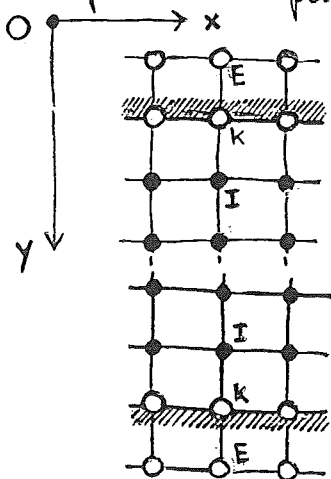


Consideriamo un punto k , appartenente a un bordo incastrato con continuità \perp a x .
Possiamo considerarsi le due situazioni in figura =

Le condizioni al contorno si scrivono:
in forma differenziale alle D.F.

$$\begin{cases} (w(x,y))_k = 0 \\ \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right)_k = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_k = 0 \\ \frac{w_I - w_E}{2\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_k = 0 \\ w_E = w_I \end{cases}$$

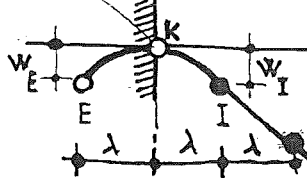
Si procede in perfetta analogia al caso precedente se il bordo è \perp a y .



Le condizioni al contorno sono:

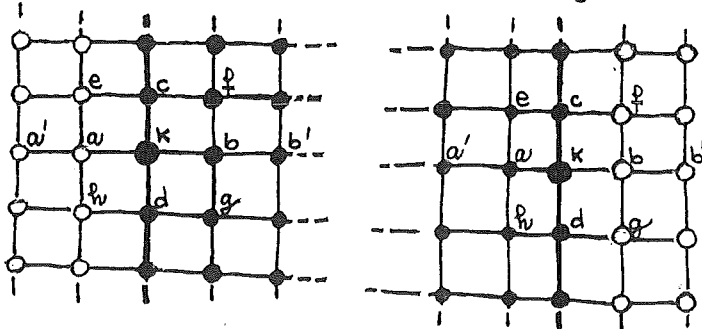
$$\begin{cases} [w(x,y)]_k = 0 \\ \left[\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right]_k = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_k = 0 \\ \frac{w_I - w_E}{2\lambda} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_k = 0 \\ w_E = w_I \end{cases}$$

vertice della parabola



Interpretazione geometrica: Tre punti allineati del reticolo (E, K, I) nella approssimazione quadratica sono "legati" da una equazione parabolica. **NEL CASO DELL'INCASTRO** la parabola è simmetrica rispetto alla verticale in K.

LATO LIBERO (\perp a x)



Consideriamo un punto k appartenente a un bordo libero \perp a x .
Possiamo verificarci le due situazioni in figura =

Il punto k è supposto non appartenere a un angolo.

Le due condizioni al contorno in forma di derivata sono:

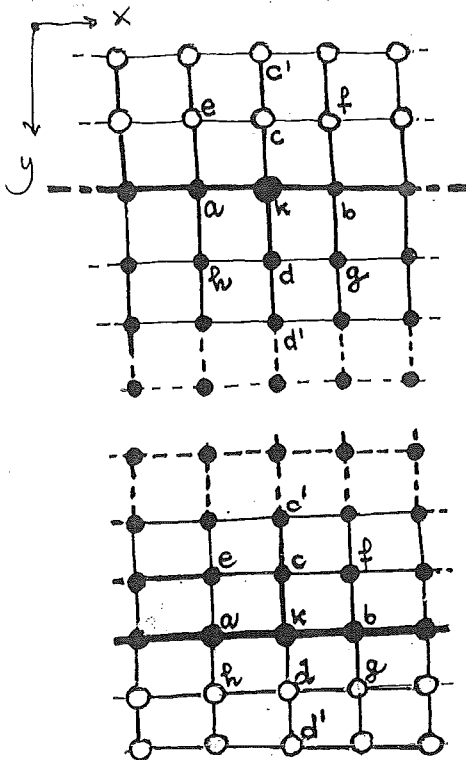
$$(M_x)_k = 0 \Rightarrow -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_k = 0 ; (N_x)_k = 0 \Rightarrow -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_k = 0$$

Alle differenze finite risulta:

$$(W_a - 2W_k + W_b) + \nu (W_c - 2W_k + W_d) = 0$$

$$-W_{a'} + 2W_a - 2W_b + W_{b'} + (2-\nu)(W_f + W_g - W_e - W_h - 2W_b + 2W_a) = 0$$

LATO LIBERO \perp a y.



Consideriamo il caso in cui il punto k appartenga a un bordo libero \perp a y.

Anche in questo caso possono verificarsi due circostanze come indicato in figura.

Le condizioni al contorno sono:

$$(M_y)_k = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k = 0$$

$$(N_y)_k = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_k = 0$$

Alle differenze finite le precedenti relazioni diventano:

$$(W_c - 2W_k + W_d) + \nu (W_a - 2W_k + W_b) = 0$$

$$-W_{c'} + 2W_c - 2W_d + W_{d'} + (2-\nu)(W_g + W_h - W_e - W_f - 2W_d + 2W_c) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k \approx \frac{W_a - 2W_k + W_b}{\lambda_x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_k \approx \frac{W_c - 2W_k + W_d}{\lambda_y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_k \approx \frac{-W_{a'} + 2W_a - 2W_b + W_{b'}}{2\lambda_x^3}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_k \approx \frac{W_f + W_g - W_e - W_h - 2(W_b - W_a)}{2\lambda_x \lambda_y^2}$$

LE CONDIZIONI AL CONTORNO NEGLI SPIGOLI

12/11/0

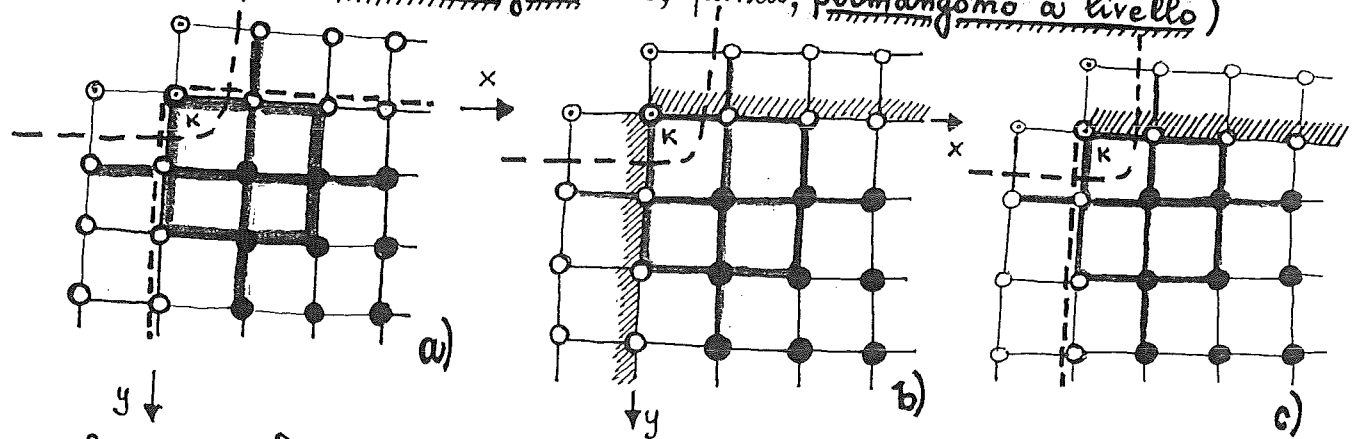
3 modi del reticolo appartenenti al 3° gruppo:
i nodi di spigolo ed i nodi giacenti nelle strisce supplementari, sul prolungamento dei bordi.
 necessitano di un chiarimento.

Alcuni di essi, ai fini della scrittura del sistema risolvente finale, possono essere soppressi; viceversa in qualche caso essi vanno tutti mantenuti e, addirittura, occorre integrare il reticolo con nuovi modi.

Per decidere se un modo, ai fini della scrittura del sistema risolvente, deve essere mantenuto o soppresso si fa riferimento ai nodi coinvolti nella scrittura dell'equazione indefinita di equilibrio dal modo più vicino allo spigolo.

SPIGOLO FORMATO DA BORDI APPOGGIATI O INCASTRATI

(Bordi dotati di vincoli rigidi che, quindi, permangono a livello)



Gli schemi in figura indicano le tre possibili situazioni di spigolo fra bordi vincolati con incastri e appoggi.

Indipendentemente dalla posizione dello spigolo nella piastra (inessenziale ai fini del discorso), se consideriamo il modo più vicino allo spigolo nel quale si scrive l'equazione indefinita di equilibrio, è facile individuare i nodi coinvolti dalla suddetta equazione (collegati a tratto grosso).

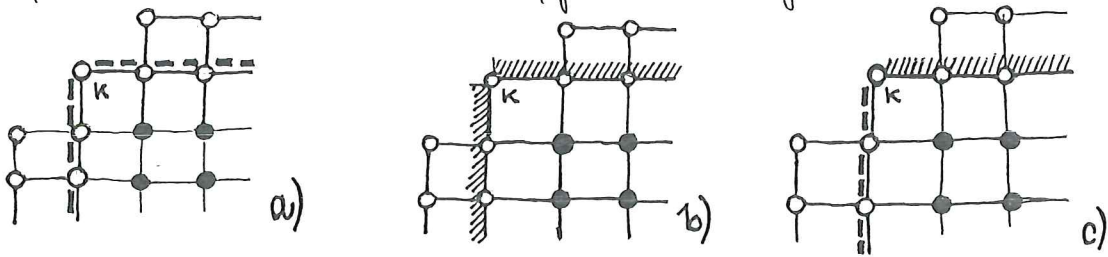
Si controlla immediatamente che solo i nodi di spigolo sono coinvolti dall'equazione: essi pertanto devono essere mantenuti e richiedono una equazione indipendente.

Poiché il nodo appartiene a bordi vincolati a rimanere a livello deve essere imposta la condizione al contorno:

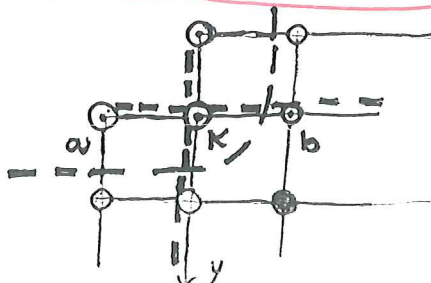
$$[W(x,y)]_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_k = 0}$$

○ Per quanto attiene i nodi che giacciono sul prolungamento dei bordi si deve concludere che essi non sono necessari, poiché nessuna equazione di equilibrio scritta per i nodi del 1° gruppo li coinvolge. Pertanto in sede di scrittura del sistema algebrico risolvibile la piattaforma essi vanno soppressi, non risultando fra le incognite del problema.

Il reticolo dei nodi, in definitiva, per i tre casi precedenti deve modificarsi come indicato nelle figure che seguono:



○ Si deve rilevare che i valori degli spostamenti dei nodi soppressi possono essere calcolati "a priori" sulla base del fatto che nel punto k devono annullarsi (per la rigidità di bordi) le derivate di qualunque ordine, sia in direzione x che y. Nel caso in figure si ha

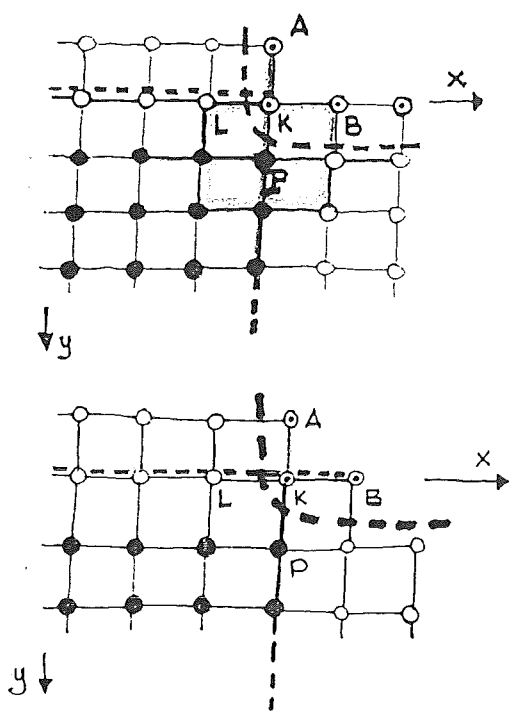


certamente: $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_k = 0$

essendo $W_a - 2W_k + W_b = 0 \Rightarrow W_a = 0$
 e anche $W_k = W_b = 0$

Si parla di "prolungamento dei bordi a livello" nelle rotture supplementari per porre in conto questa circostanza (vedi figura).

SPIGOLO FRA BORDO APPOGGIATO E BORDO LIBERO



L'equazione indefinita di equilibrio, scritta alle differenze finite nel modo P del bordo libero, che risulta il più vicino allo spigolo, coinvolge esclusivamente i modi A, K, B

In conseguenza solo tali modi devono essere mantenuti, poiché rappresentano incognite del problema, mentre il quarto modo (cui non si è fatta corrispondere alcuna lettera) deve essere soppresso.

Pertanto, modificato il reticolo in modo da ottenere quello a lato, si devono fornire tre condizioni indipendenti per i modi A, K e B

- Al nodo K e al nodo A si fanno corrispondere le ordinarie condizioni al contorno del bordo appoggiato $\perp y$ (appoggio rigido):

$$[W(x,y)]_K = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]_K = 0$$

alle
D.F. \rightarrow

$$W_K = 0$$

$$\frac{W_A - 2W_K + W_B}{\lambda^2} = 0$$

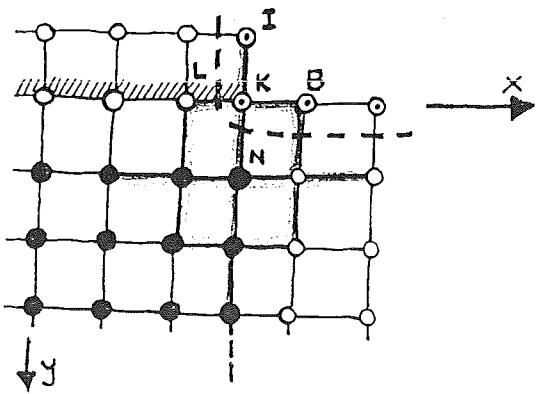
$$W_K = 0$$

$$W_A = -W_B$$

- Per quanto concerne il nodo B si applica il principio di prolungamento dei bordi a livello e si ottiene:

$$W_B = 0$$

SPIGOLO FRA BORDO INCASTRATO E BORDO LIBERO

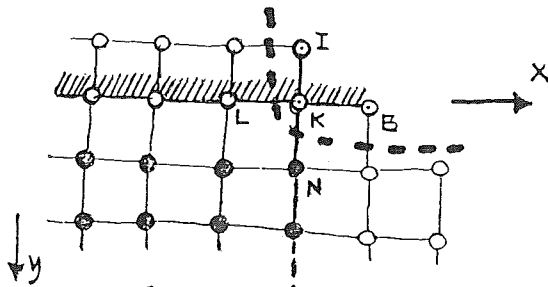


Si osserva che l'equazione indefinita di equilibrio scritta alle differenze finite nel nodo N del bordo libero, più vicino allo spigolo, coinvolge esclusivamente i nodi I, K, B.

In conseguenza solo tali nodi devono essere mantenuti poiché rappresentano incognite del problema.

Il quarto nodo (al quale in figura non si è fatta corrispondere alcuna lettera) deve essere rimosso.

In conclusione si deve modificare il reticolo in prossimità dello



spigolo in modo da ottenere quello a lato, e fornire tre condizioni indipendenti per i nodi K, I e B,

• Al nodo K e al nodo I si fanno corrispondere le due ordinarie condizioni al contorno per il bordo incastrato $\perp y$:

$$[W(x, y)]_K = 0$$

$$W_K = 0$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_K = 0$$



$$\frac{W_N - W_I}{2\lambda} = 0$$

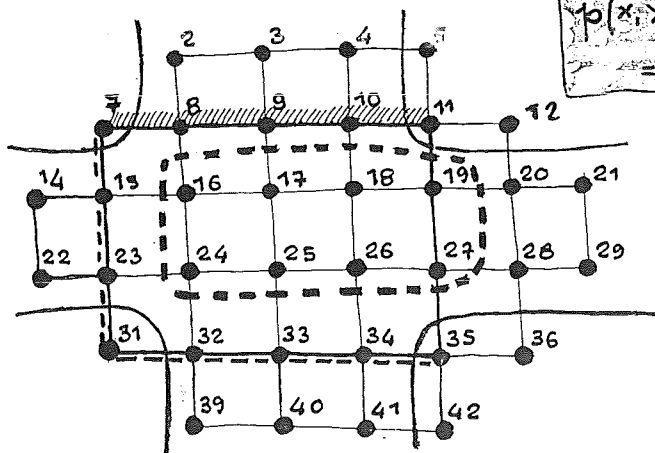


$$W_I = W_N$$

• Per quanto concerne il nodo B si applica il principio di prolungamento dei bordi a livello e si ottiene:

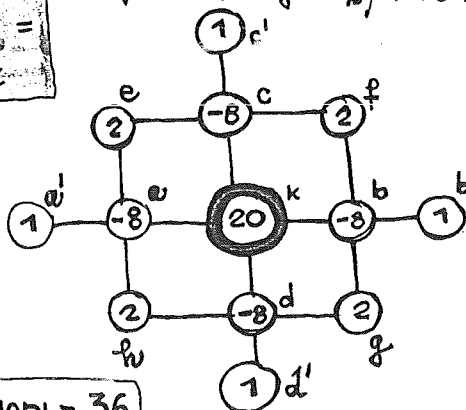
$$W_B = 0$$

ESEMPIO APPLICATIVO



$$p(x,y) = p_0 = \text{cost}$$

$$(W_{a'} + W_{b'} + W_{c'} + W_{d'}) - 8(W_a + W_b + W_c + W_d) + 2(W_e + W_f + W_g + W_h) + 20W_k = \frac{p_0 \lambda^4}{B} \quad (1)$$



N° NODI = 36

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO NEI PUNTI : 16-17-18-19
24-25-26-27

$$\begin{aligned} (W_{14} + W_{18} + W_2 + W_{32}) - 8(W_{15} + W_{17} + W_8 + W_{24}) + 2(W_7 + W_9 + W_{25} + W_{23}) + 20W_{16} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{15} + W_{19} + W_3 + W_{33}) - 8(W_{16} + W_{18} + W_9 + W_{25}) + 2(W_8 + W_{10} + W_{26} + W_{24}) + 20W_{17} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{16} + W_{20} + W_4 + W_{34}) - 8(W_{17} + W_{19} + W_{10} + W_{26}) + 2(W_9 + W_{11} + W_{27} + W_{25}) + 20W_{18} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{17} + W_{21} + W_5 + W_{35}) - 8(W_{18} + W_{20} + W_{11} + W_{27}) + 2(W_{10} + W_{12} + W_{28} + W_{26}) + 20W_{19} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{22} + W_{26} + W_8 + W_{39}) - 8(W_{23} + W_{25} + W_{16} + W_{32}) + 2(W_{15} + W_{17} + W_{33} + W_{31}) + 20W_{24} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{23} + W_{27} + W_9 + W_{40}) - 8(W_{24} + W_{26} + W_{17} + W_{33}) + 2(W_{16} + W_{18} + W_{34} + W_{32}) + 20W_{25} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{24} + W_{28} + W_{10} + W_{41}) - 8(W_{25} + W_{27} + W_{18} + W_{34}) + 2(W_{17} + W_{19} + W_{35} + W_{33}) + 20W_{26} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ (W_{25} + W_{29} + W_{11} + W_{42}) - 8(W_{26} + W_{28} + W_{19} + W_{35}) + 2(W_{18} + W_{20} + W_{36} + W_{34}) + 20W_{27} &= \frac{p_0 \lambda^4}{B} \end{aligned}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO SUI BORDI (SPIGOLI ESCLUSI)

LATO INCASTRATO
ortogonale y :

$$\begin{aligned} W_8 &= 0 \\ W_2 &= W_{16} \\ W_9 &= 0 \\ W_3 &= W_{17} \\ W_{10} &= 0 \\ W_4 &= W_{18} \end{aligned}$$

LATO APPOGGIATO
ortogonale x :

$$\begin{aligned} W_{15} &= 0 \\ W_{14} &= -W_{16} \\ W_{23} &= 0 \\ W_{22} &= -W_{24} \end{aligned}$$

LATO APPOGGIATO $\perp y$:

$$W_{32} = 0$$

$$W_{39} = -W_{24}$$

$$W_{33} = 0$$

$$W_{40} = -W_{25}$$

$$W_{34} = 0$$

$$W_{41} = -W_{26}$$

LATO LIBERO $\perp x$:

$$W_{18} - 2W_{19} + W_{20} + \nu(W_{11} - 2W_{19} + W_{27}) = 0$$

$$-W_{17} + 2W_{18} - 2W_{20} + W_{21} + (2-\nu)(W_{12} + W_{28} - W_{10} - W_{26} - 2W_{20} + 2W_{18}) = 0$$

$$W_{26} - 2W_{27} + W_{28} + \nu(W_{19} - 2W_{27} + W_{35}) = 0$$

$$-W_{25} + 2W_{26} - 2W_{28} + W_{29} + (2-\nu)(W_{20} + W_{36} - W_{18} - W_{34} - 2W_{28} + 2W_{26}) = 0$$

CONDIZIONI AL CONTORNO NEGLI SPIGOLI

SPIGOLO FRA BORDO INCASTRATO E BORDO APPOGGIATO

$$W_7 = 0$$

SPIGOLO FRA BORDI APPOGGIATI

$$W_{31} = 0$$

SPIGOLO FRA BORDO APPOGGIATO E BORDO LIBERO :

$$W_{35} = 0$$

$$W_{36} = 0$$

$$W_{42} = -W_{27}$$

SPIGOLO FRA BORDO INCASTRATO E BORDO LIBERO :

$$W_{11} = 0$$

$$W_{12} = 0$$

$$W_5 = W_{19}$$

Si sono quindi verite $8 + 6 + 4 + 6 + 4 + 1 + 1 + 3 + 3 = 36$ equazioni, tante quanti sono i modi del reticolo.

Raggruppiamo le 8 equazioni indefinite di equilibrio e le 4 condizioni al contorno per il bordo libero.

Tenuto conto delle residue condizioni al contorno, operando

le semplificazioni e sostituzioni necessarie si ha:

$$\begin{aligned}
 20 W_{16} - 8 W_{17} + W_{18} - 8 W_{24} + 2 W_{25} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 -8 W_{16} + 21 W_{17} - 8 W_{18} + W_{19} + 2 W_{24} - 8 W_{25} + 2 W_{26} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 W_{16} - 8 W_{17} + 21 W_{18} - 8 W_{19} + W_{20} + 2 W_{25} - 8 W_{26} + 2 W_{27} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 W_{17} - 8 W_{18} + 21 W_{19} - 8 W_{20} + W_{21} + 2 W_{26} - 8 W_{27} + 2 W_{28} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 -8 W_{16} + 2 W_{17} + 18 W_{24} - 8 W_{25} + W_{26} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 2 W_{16} - 8 W_{17} + 2 W_{18} - 8 W_{24} + 19 W_{25} - 8 W_{26} + W_{27} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 2 W_{17} - 8 W_{18} + 2 W_{19} + W_{24} - 8 W_{25} + 19 W_{26} - 8 W_{27} + W_{28} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 2 W_{18} - 8 W_{19} + 2 W_{20} + W_{25} - 8 W_{26} + 19 W_{27} - 8 W_{28} + W_{29} &= 1 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 W_{18} - 2(1+\nu) \cdot W_{19} + W_{20} + \nu \cdot W_{27} &= 0 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 -W_{17} + (6-2\nu) W_{18} - (6-2\nu) \cdot W_{20} + W_{21} - (2-\nu) \cdot W_{26} + (2-\nu) \cdot W_{27} &= 0 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 \nu \cdot W_{19} + W_{26} - 2(1+\nu) W_{27} + W_{28} &= 0 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\
 -(2-\nu) \cdot W_{18} + (2-\nu) \cdot W_{20} - W_{25} + (6-2\nu) \cdot W_{26} - (6-2\nu) \cdot W_{28} + W_{29} &= 0 \cdot \frac{p_0 \lambda^4}{B}
 \end{aligned}$$

Assumendo per il coefficiente di contrazione trasversale ν il valore 0,3 (ammettendo, a titolo d'esempio, che si tratti di una piastre in acciaio) i coefficienti delle incognite possono essere calcolati definitivamente. In forma matriciale (utile per il calcolo con elaboratore) il sistema precedente si scrive:

$$[M] * \{w\} = \{q\}$$

20	-8	1	0	-8	+2	0	0	0	0	0	0	*	$\left\{ \begin{array}{l} W_{16} \\ W_{17} \\ W_{18} \\ W_{19} \\ W_{24} \\ W_{25} \\ W_{26} \\ W_{27} \\ W_{20} \\ W_{21} \\ W_{28} \\ W_{29} \end{array} \right\}$	$= \frac{p_0 \lambda^4}{B}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$
-8	21	-8	1	2	-8	2	0	0	0	0	0				
1	-8	21	-8	0	2	-2	2	1	0	0	0				
0	1	-8	21	0	0	2	-8	-8	1	2	0				
-8	2	0	0	18	-8	1	0	0	0	0	0				
2	-8	2	0	-8	19	-8	1	0	0	0	0				
0	2	-8	2	1	-8	19	-8	0	0	1	0				
0	0	2	-8	0	1	-8	19	2	0	-8	1				
0	0	1	-2.6	0	0	0	0.3	1	0	0	0				
0	-1	5.4	0	0	0	-1.7	1.7	-5.4	1	0	0				
0	0	0	0.3	0	0	1	-1.7	0	0	1	0				
0	0	-1.7	0	0	-1	5.4	0	1.7	0	-5.4	1				

La risoluzione del sistema fornisce i seguenti risultati:

$$W_{16} = 0.25819 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{17} = 0.38943 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{18} = 0.45037 \frac{p_0 l^4}{B}$$

$$W_{19} = 0.51951 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{20} = 0.70839 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{21} = 1.07433 \frac{p_0 l^4}{B}$$

$$W_{24} = 0.30388 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{25} = 0.46598 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{26} = 0.54558 \frac{p_0 l^4}{B}$$

$$W_{27} = 0.63989 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{28} = 0.96226 \frac{p_0 l^4}{B}, \quad W_{29} = 2.27753 \frac{p_0 l^4}{B}$$

Inoltre: $W_2 = W_{16}; \quad W_3 = W_{17}; \quad W_4 = W_{18}; \quad W_{14} = -W_{16}; \quad W_{22} = -W_{24}$

$$W_{39} = -W_{24}; \quad W_{40} = -W_{25}; \quad W_{41} = -W_{26}; \quad W_{42} = -W_{27}; \quad W_5 = W_{19}$$

$$W_7 = W_8 = W_9 = W_{10} = W_{11} = W_{12} = 0; \quad W_{15} = W_{23} = 0$$

$$W_{31} = W_{32} = W_{33} = W_{34} = W_{35} = W_{36} = 0$$

Siamo ora in grado di calcolare le azioni interne nei punti che interessano.

Ad esempio nel punto 26 in P_a ($\nu = 0.3$ avendo la piastra in acciaio):

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{B}{\lambda^2} (W_{25} - 2W_{26} + W_{27} + \nu (W_{18} - 2W_{26} + W_{34})) = \\ &= -\frac{B}{\lambda^2} \frac{p_0 l^4}{B} (0.46598 - 2 \cdot 0.54558 + 0.63989 + 0.3 (0.45037 - 2 \cdot 0.54558 + 0)) = \\ &= -p_0 \lambda^2 (-0.18) = \underline{\underline{0.18 p_0 \lambda^2}} \quad \left(\lambda = \frac{A}{4} \right) \end{aligned}$$

$$M_y = -\frac{B}{\lambda^2} (W_{18} - 2W_{26} + W_{34} + \nu (W_{25} - 2W_{26} + W_{27})) = -p_0 \lambda^2 (-0.64) = \underline{\underline{0.64 p_0 \lambda^2}}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{B(1-\nu)}{4\lambda^2} (W_{17} + W_{35} - W_{18} - W_{32}) = -\frac{B(1-0.3)}{\lambda^2} \frac{p_0 \lambda^4}{B} (0.38943 + 0 - 0.45037 - 0) = \\ &= -0.70 \cdot p_0 \lambda^2 (-0.06) = \underline{\underline{0.043 p_0 \lambda^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_x &= -\frac{B}{\lambda^3} \frac{p_0 \lambda^4}{B} \left(\frac{-W_{24} + 4W_{25} - 4W_{27} + W_{28} + W_{19} + W_{35} - W_{18} - W_{34}}{2} \right) = \\ &= -\frac{p_0 \lambda}{2} (-0.30388 + 4 \cdot 0.46598 - 4 \cdot 0.63989 + 0.96226 + 0.51951 - 0.45037) = \underline{\underline{-0.016 p_0 \lambda}} \end{aligned}$$

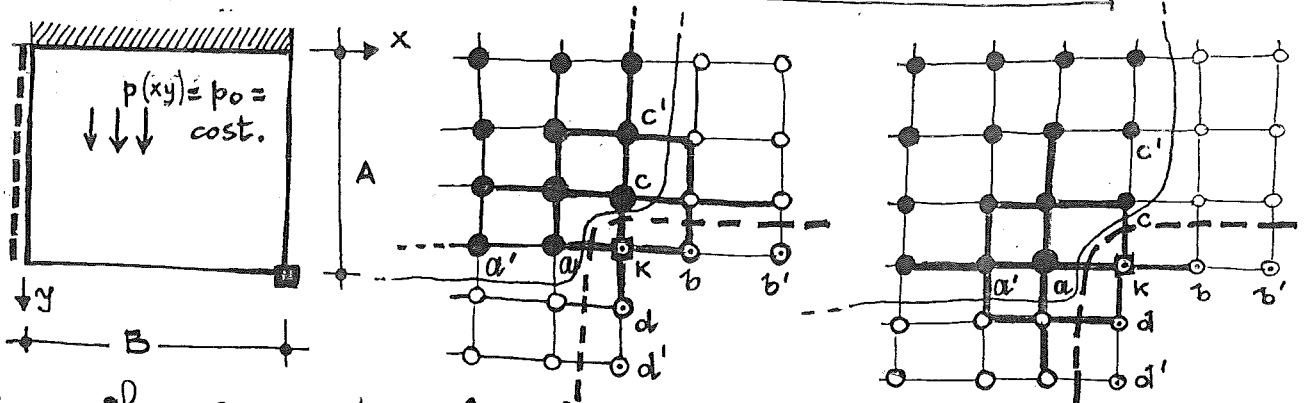
$$\begin{aligned} T_y &= -\frac{B}{\lambda^3} \frac{p_0 \lambda^4}{B} \left(\frac{-W_{10} + 4W_{18} - 4W_{34} + W_{41} + W_{35} + W_{33} - W_{17} - W_{19}}{2} \right) = \\ &= -\frac{p_0 \lambda}{2} (4 \cdot 0.45037 + (-0.54558) - 0.38943 - 0.51951) = \underline{\underline{+0.347 p_0 \lambda}} \end{aligned}$$

SPIGOLO FRA BORDI LIBERI

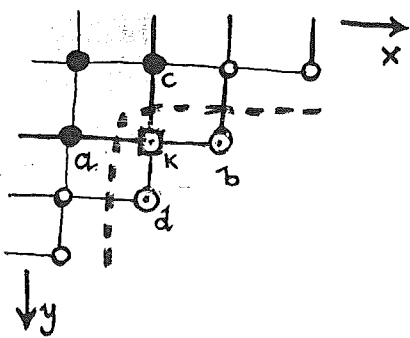
Quando lo spigolo di una piastra è compreso fra due bordi liberi possono verificarsi due circostanze:

- 1- lo spigolo è vincolato con un appoggio, e quindi è impedito di spostarsi verticalmente;
- 2- lo spigolo non è vincolato e quindi è libero di muoversi.

SPIGOLO FRA DUE BORDI LIBERI CON APPOGGIO



Si verifica immediatamente che i nodi coinvolti nella scrittura dell'equazione indefinita di equilibrio per i nodi c e a, (più prossimi allo spigolo k) non comprendono mai i nodi b' e d' che pertanto vanno soppressi in sede di scrittura del sistema algebrico risolvibile.



Il reticolo dei nodi, in prossimità del nodo k, si presenta quindi come disegnato a lato. Devono imponersi tre condizioni indipendenti.

Per il nodo k, in quanto vincolato a permanere a livello da un appoggio si ha la condizione:

$$[W(x,y)]_k = 0 \implies \boxed{W_k = 0}$$

Per il nodo b si osserva che k appartiene a un bordo libero $\perp x$, e pertanto in questo ultimo punto deve essere soddisfatta la condizione al contorno:

$$(M_x)_k = 0 \implies \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_k + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_k = 0$$

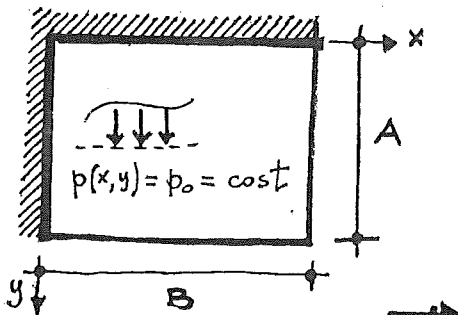
Per il nodo d si osserva analogamente che k appartiene a un bordo libero $\perp y$, e pertanto in questo ultimo punto deve essere soddisfatta la condizione al contorno:

$$(M_y)_k = 0 \implies \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_k + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_k = 0$$

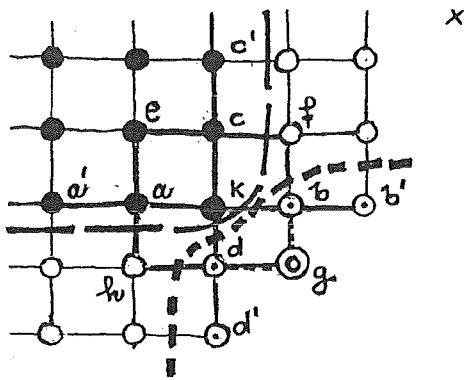
Si ottengono le condizioni per i nodi b e d:
 in forma differenziale $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_K = 0 \rightarrow \frac{1}{\lambda^2}(W_b - 2W_K + W_d) = 0 \rightarrow \boxed{W_b = -W_d}$

alle differenze finite $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_K = 0 \rightarrow \frac{1}{\lambda^2}(W_d - 2W_K + W_c) = 0 \rightarrow \boxed{W_d = -W_c}$

SPIGOLO FRA BORDI LIBERI



Nel caso dello spigolo fra bordi liberi, che ha possibilità di spostamenti verticali, si deve scrivere l'equazione indefinita di equilibrio anche nel punto di spigolo K.



La scrittura alle differenze finite della suddetta equazione coinvolge tutti e 4 i nodi "di spigolo" (b, b', d e d') e inoltre, per poter essere scritta, richiede l'introduzione nel reticolo di un modo supplementare (il nodo g).

Lo spostamento W_g del suddetto modo supplementare va quindi incluso fra le incognite di spigolo, unitamente agli spostamenti $W_b, W_{b'}, W_d$ e $W_{d'}$.

Si ha un totale di 5 incognite.

Si devono fornire 5 condizioni

● Quattro condizioni si ottengono dalle ordinarie condizioni al contorno per i bordi liberi. In termini differenziali si ha che:

1) poiché il nodo K appartiene a un bordo libero $\perp x$

si devono imporre le condizioni: $(M_x)_K = 0$; $(N_x)_K = 0$

2) poiché il nodo K appartiene a un bordo libero $\perp y$

si devono imporre le condizioni: $(M_y)_K = 0$; $(N_y)_K = 0$

Le due precedenti condizioni di momento nullo alle differenze finite si scrivono:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = 0}}; \quad \underline{\underline{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k = 0}}$$

Dall'insieme formato dalle due precedenti equazioni si deducono le condizioni valide rispettivamente per il modo b e per il modo d:

$$W_a - 2W_k + W_b = 0$$

$$W_c - 2W_k + W_d = 0$$

Le due condizioni di annullamento delle reazioni distribuite forniscono le condizioni valide rispettivamente per il modo b' e per il modo d'.

Esprimendo alle differenze finite si ha:

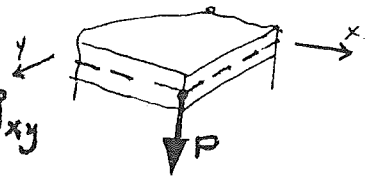
$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_k + (2-\nu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_k = 0$$

$$-W_a' + 2W_a - 2W_b + W_b' + (2-\nu)(w_f + w_g - w_e - w_h - 2W_b + 2W_a) = 0$$

$$-W_c' + 2W_c - 2W_d + W_d' + (2-\nu)(w_g + w_h - w_e - w_f - 2W_d + 2W_c) = 0$$

- Nella scrittura della 5^a equazione (quella relativa al modo g) si deve distinguere la circostanza in cui nello spigolo esista un carico concentrato P da quella in cui il suddetto carico concentrato non esista.

Nel primo caso il momento torcente M_{xy}



deve essere in grado di far equilibrio al carico concentrato P (diretto verso il basso).

Deve aversi:

$$P = -2(M_{xy})_k = 2B(1-\nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k$$

alle differenze finite:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{w_e + w_g - w_f - w_h}{4\lambda^2}$$

si ottiene in definitiva:

$$(w_e + w_g - w_f - w_h) = \frac{2P\lambda^2}{B(1-\nu)}$$

$$P = 2 \cdot B(1-\nu) \cdot \frac{w_e + w_g - w_f - w_h}{4\lambda^2}$$

Nel secondo caso con $P=0$, si conclude che il momento torcente $(M_{xy})_K$ deve annullarsi, e che in definitiva deve aversi $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_K = 0$.

Questa condizione alle differenze finite si scrive:

$$w_e + w_g - w_f - w_h = 0$$

**CRITERIO DI VALUTAZIONE DELLA PRECISIONE DEI
RISULTATI OTTENIBILI CON IL METODO DELLE D.F.**

13/11/03

Il reticolo dei nodi, con cui si risolve alle D.F. una piastra di forma rettangolare, ha lati di dimensioni λ_x e λ_y (ovvero λ se il reticolo ha maglia quadrata) che derivano da una scelta dell'operatore.

In generale: reticoli di nodi più numerosi (e quindi con dimensioni dei lati λ_x e λ_y più piccola) forniscono, a parità di altre circostanze, soluzioni più accurate.

Il metodo di RICHARDSON di estrapolazione:

È un metodo estremamente utile quando si dispone di una stima realistica dell'errore dovuto alla discretizzazione, espresso in funzione delle dimensioni della maglia del reticolo.

La sua validità non risulta però del tutto provata quando si hanno bordi curvilinei, bordi con spigoli rientranti o pure bordi in cui il valore della soluzione non è fissato a priori (es. bordi liberi).

◆ Come primo passo si propongono quindi di valutare l'errore dovuto alla discretizzazione nell'uso delle differenze centrali.

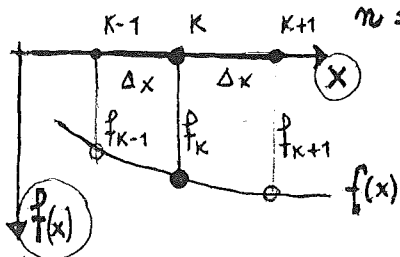
Valutazione dell'errore alle Differenze finite.

Utilizzando le formule alle differenze finite, che si stabiliscono assimilando la funzione, nell'intorno di un punto k considerato, ad una curva di ordine n , si commette un errore che risulta proporzionale a Δx^n , dove Δx è il passo della discretizzazione.

Ponendoci nel caso fissa, se consideriamo una funzione $f(x)$ e la sviluppiamo in serie di Taylor otteniamo:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) \cdot \frac{\Delta x^n}{n!} \quad \text{con: } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$



$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

$$0! = 1$$

Se ora applichiamo lo sviluppo al punto $(k+1)$ nell'intorno del punto (k) ed a distanza Δx da esso otteniamo:

$$f_{k+1} = f_k + f'_k \cdot \Delta x + f''_k \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''_k \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + f^{IV}_k \cdot \frac{\Delta x^4}{4!} + f^V_k \cdot \frac{\Delta x^5}{5!} + \dots$$

Analogamente se applichiamo lo sviluppo al punto $(k-1)$ nell'intorno del punto (k) , ed a distanza $(-\Delta x)$ da esso, otteniamo:

$$f_{k-1} = f_k - f'_k \cdot \Delta x + f''_k \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''_k \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + f^{IV}_k \cdot \frac{\Delta x^4}{4!} - f^V_k \cdot \frac{\Delta x^5}{5!} - \dots$$

Sottraendo f_{k-1} da f_{k+1} , e ponendo $f'_k = \left(\frac{df}{dx} \right)_k$ si ha:

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_k = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta x^2}{3!} f'''_k - \frac{\Delta x^4}{5!} f^V_k - \dots$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_k = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2 \cdot \Delta x} - \epsilon.$$

Poiché abbiamo assunto:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_k \approx \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2 \cdot \Delta x}$$

deriva che con il metodo delle differenze centrali (parabola di secondo grado approssimante la funzione nell'intorno di k) l'errore ϵ è dato da:

$$\epsilon = \Delta x^2 \cdot \left(\frac{f_k'''}{3!} + \frac{f_k^{(v)}}{5!} \cdot \Delta x^2 + \dots \right)$$

ovvero; risulta proporzionale al quadrato del passo del reticolo.

● Nel caso di una piastra rettangolare, che per semplicità supponiamo risolta con un reticolo a maglia quadrata di passo λ , l'errore dovuto alla discretizzazione (differenza fra valore "esatto" della grandezza spostamento e valore "approssimato" ottenuto alle D.F.) si può esprimere:

$$\epsilon = \lambda^2 (P + Q \cdot \lambda^2 + \dots)$$

con P, Q, \dots etc. apposti coefficienti.

Applicazione del metodo di Richardson.

Essendo il passo λ del reticolo una quantità generalmente piccola, il termine di maggior "peso" nella serie di termini che definiscono l'errore ϵ è quello quadratico. Gli altri termini sono piccoli rispetto ad esso e, in prima approssimazione si possono trascurare.

Supponiamo quindi

$$\boxed{\varepsilon = P \cdot \lambda^2}$$

Detta w la soluzione "esatta" del problema differenziale (che si otterrebbe da una soluzione in forma chiusa) siano

u_1 ed u_2 le soluzioni approssimate del problema che si ottengono alle differenze finite, con reticoli di lato rispettivamente pari a λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$).

L'errore da cui sono affette le due soluzioni approssimate si scrive:

$$w - u_1 = P \cdot \lambda_1^2$$

$$w - u_2 = P \cdot \lambda_2^2$$

Risulta:

$$w = \frac{\lambda_2^2 \cdot u_1 - \lambda_1^2 \cdot u_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$$

moltiplico la prima per $-u_2$ e la seconda per $+u_1$:

$$-w \cdot u_2 + u_1 \cdot u_2 = -P \cdot \lambda_1^2 \cdot u_2$$

$$u \cdot u_1 - u_2 \cdot u_1 = P \cdot \lambda_2^2 \cdot u_1$$

$$u(u_1 - u_2) = P(\lambda_2^2 \cdot u_1 - \lambda_1^2 \cdot u_2)$$

$$w(u - P \cdot \lambda_1^2 - u + P \cdot \lambda_2^2) = P(\lambda_2^2 u_1 - \lambda_1^2 u_2)$$

$$w \cdot P(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = P(\lambda_2^2 u_1 - \lambda_1^2 u_2)$$

che consente di estrapolare il valore "esatto" w della soluzione, note che siano due soluzioni approssimate u_1 e u_2 ottenute con reticoli rispettivamente di lunghezza λ_1 e λ_2 .

Tenuto conto che si può scrivere: $\lambda_1 = L/m_1$ e $\lambda_2 = L/m_2$, dove con L si è indicata la dimensione della piastra e con m_1 ed m_2 il numero di strisce su tale lato nella 1^a e 2^a soluzione si ha ($m_2 > m_1$):

$$w = \left(\frac{m_2^2}{m_2^2 - m_1^2} \right) \cdot u_2 - \left(\frac{m_1^2}{m_2^2 - m_1^2} \right) \cdot u_1$$

La precedente si può scrivere:

$$u = \alpha_2 \cdot u_2 - \alpha_1 \cdot u_1$$

con:

$$\alpha_2 = \frac{m_2^2}{m_2^2 - m_1^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{m_1^2}{m_2^2 - m_1^2}$$

Table 2.12
 h^2 -Extrapolation Coefficients

m_2/m_1	α_1	α_2
2/1	0.3333333333	1.3333333333
3/2	0.8	1.8
4/3	1.2857142857	2.2857142857
5/4	1.7777777778	2.7777777778
6/5	2.2727272727	3.2727272727
7/6	2.7692307692	3.7692307692
8/7	3.2666666667	4.2666666667
3/1	0.125	1.125
5/3	0.5625	1.5625
7/5	1.0166666667	2.0166666667

Table 2.12
h²-Extrapolation Coefficients

n_2/n_1	α_1	α_2
2/1	0.3333333333	1.3333333333
3/2	0.8	1.8
4/3	1.2857142857	2.2857142857
5/4	1.7777777778	2.7777777778
6/5	2.2727272727	3.2727272727
7/6	2.7692307692	3.7692307692
8/7	3.2666666667	4.2666666667
3/1	0.125	1.125
5/3	0.5625	1.5625
7/5	1.0416666667	2.0416666667

APPLICAZIONE DEL METODO DI RICHARDSON

Consideriamo le soluzioni ottenute per la piastra quadrata appoggiata sul contorno.

(A) Consideriamo le due soluzioni ottenute con $\lambda_1 = \frac{A}{4}$ e $\lambda_2 = \frac{A}{8}$.
Con riferimento agli spostamenti del nodo centrale si ha:

$$\lambda_1 = \frac{A}{4} \rightarrow u_1 = 0,004028 \cdot p_0 \frac{A^4}{B} \quad (\text{modo } 3)$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{8} \rightarrow u_2 = 0,004055 \cdot p_0 \frac{A^4}{B} \quad (\text{modo } 10)$$

Essendo $\frac{m_2}{m_1} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$ dalla tabella si estrae:

$$\alpha_1 = \frac{m_1^2}{m_2^2 - m_1^2}$$

$$\alpha_1 = 0,3333$$

$$\alpha_2 = 1,3333$$

$$\alpha_2 = \frac{m_2^2}{m_2^2 - m_1^2}$$

$$u = \alpha_2 \cdot u_2 - \alpha_1 \cdot u_1 = 0,004064 \cdot p_0 \frac{A^4}{B}$$

Belluzzi : $u = 0,00406 \cdot p_0 \frac{A^4}{B}$

Si conclude che:

da

convergenza, in questo caso, è molto rapida e
le due soluzioni forniscono valori di
spostamenti tecnicamente accettabili: (Err: $\sim 0,2\%$ e $\sim 1\%$)

Bisogna però tenere conto che il calcolo delle
azioni interne è generalmente affetto da un errore
superiore a quello che si riscontra nel calcolo degli
spostamenti. -

$$\begin{aligned}
 \lambda = \frac{A}{4} \quad M_x = M_y &= -B \left[(1+\nu) \cdot \frac{w_2 - 2w_3 + w_2}{\lambda^2} \right] = \\
 &= -\frac{B}{\lambda^2} \cdot (1+\nu) \cdot (2w_2 - 2w_3) = \\
 &= -\frac{B}{\lambda^2} \cdot (1+\nu) \cdot 2 \left(0,75 - 1,03125 \right) \cdot \frac{p_0 \lambda^2}{B} = \\
 &= -2 \left(0,75 - 1,03125 \right) \cdot \frac{A^2}{16} \cdot p_0 (1+\nu) = \\
 &= \underline{\underline{0,035156 \cdot p_0 \cdot A^2 (1+\nu)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda = \frac{A}{8} \quad M_x = M_y &= -B \left[(1+\nu) \cdot \frac{w_9 - 2w_{10} + w_9}{\lambda^2} \right] = \\
 &= -\frac{B}{\lambda^2} \cdot (1+\nu) \cdot (2w_9 - 2w_{10}) = \\
 &= -\frac{B}{\lambda^2} \cdot (1+\nu) \cdot 2 \left(15,44377 - 16,60829 \right) \cdot \frac{p_0 \lambda^2}{B} = \\
 &= -2 \left(15,44377 - 16,60829 \right) \cdot \frac{A^2}{64} \cdot p_0 (1+\nu) = \\
 &= \underline{\underline{0,036391 \cdot p_0 \cdot A^2 (1+\nu)}}
 \end{aligned}$$

extrapolazione ##

$$\begin{aligned} u &= \alpha_2 \cdot u_2 - \alpha_1 \cdot u_1 \\ &= 1,333333333 \cdot 0,036391 - 0,333333333 \cdot 0,035156 = \\ &= 0,0368027 \cdot p_0 A^2 (1+r) \end{aligned}$$

$$\text{Belluzzi} : 0,03684 \cdot p_0 A^2 (1+r)$$

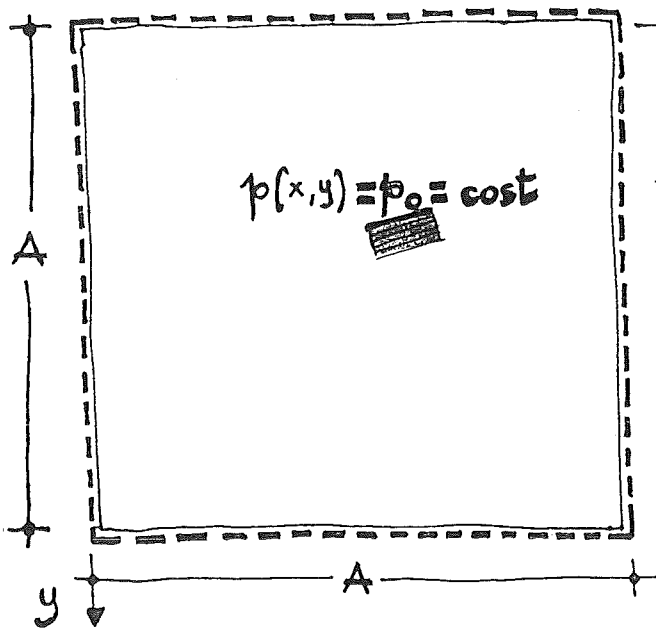
$$\left(\text{Err.} : \sim 1,09\% ; 4,35\% \right)$$

\uparrow $\lambda_2 = \frac{A}{8}$ \uparrow $\lambda_1 = \frac{A}{4}$

**CRITERIO DI VALUTAZIONE DELLA PRECISIONE
DEI RISULTATI DEL METODO DELLE D.F.**

metodo di estrapolazione di Richardson

Piastra quadrata, semplicemente appoggiata, con carico uniformemente distribuito, di lato A.



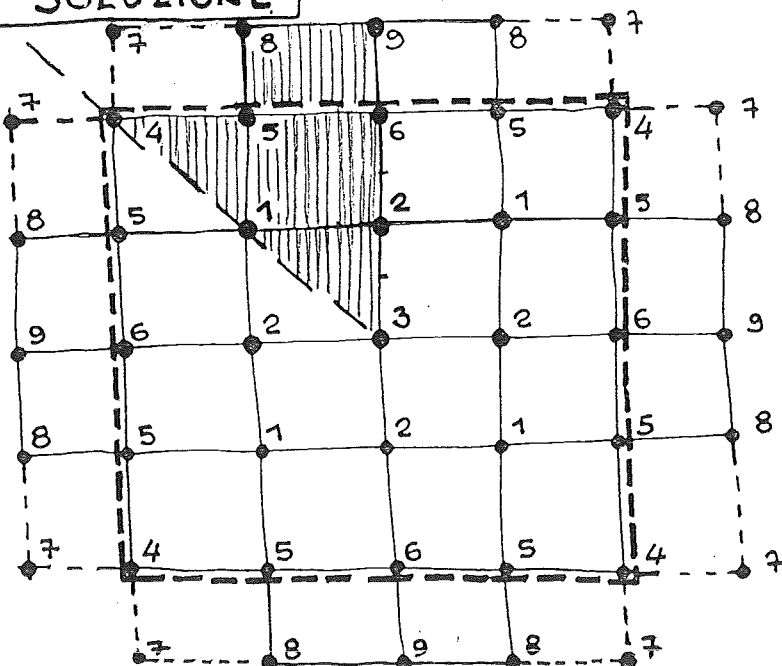
* Considereremo 3 soluzioni, adottando:

1° caso: $\lambda = A/4$

2° caso: $\lambda = A/8$

1ª SOLUZIONE

$\lambda = A/4$



Considerazioni di simmetria: della piastra, dei vincoli del contorno e del carico agente, rispetto alle due diagonali e ai due assi mediani, consentono di adottare la numerazione in figura.

Sinfatti punti simmetrici per la simmetria della struttura e del carico devono avere identici spostamenti.

In considerazione di quanto sopra il sistema risolvibile si riduce alla scrittura della equazione indefinita di equilibrio nei punti 1, 2 e 3; alla scrittura delle condizioni al contorno per il bordo appoggiato nei punti 5 e 6; alla scrittura delle condizioni al contorno nello spigolo 4.

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO

punto 1: $(w_8 + w_8 + w_1 + w_1) - 8(w_5 + w_5 + w_2 + w_2) + 2(w_4 + w_6 + w_3 + w_6) + 20w_1 = \frac{p_0 \lambda^4}{B}$

punto 2: $(w_5 + w_5 + w_2 + w_2) - 8(w_1 + w_6 + w_1 + w_3) + 2(2w_5 + 2w_2) + 20w_2 = \frac{p_0 \lambda^4}{B}$

punto 3: $4w_6 - 8(4w_2) + 2(4w_1) + 20w_3 = \frac{p_0 \lambda^4}{B}$

CONDIZIONI AL CONTORNO DI BORDO

punto 5: $w_5 = 0$; $w_8 = -w_1$

punto 6: $w_6 = 0$; $w_9 = -w_2$

CONDIZIONI AL CONTORNO NELLO SPIGOLO

$w_4 = 0$

$w_7 = 0$

Inserendo le espressioni delle condizioni al contorno nelle prime tre equazioni, e riordinando, si ottiene in definitiva il sistema:

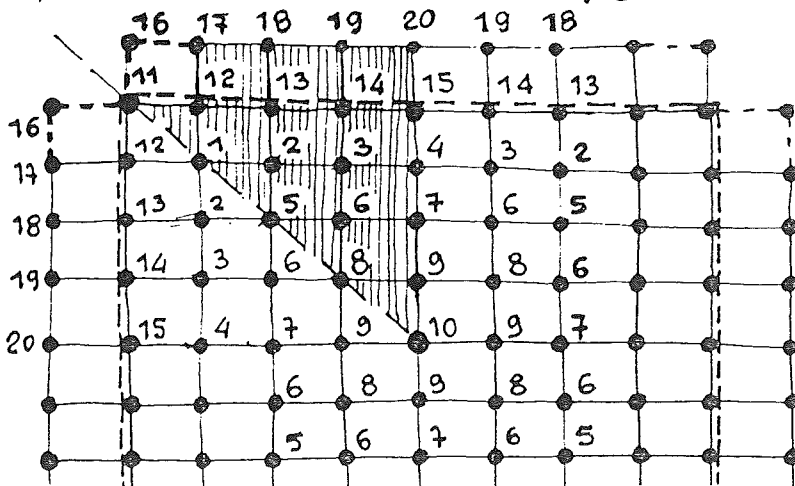
$$\begin{cases} 20w_1 - 16w_2 + 2w_3 = \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ -16w_1 + 24w_2 - 8w_3 = \frac{p_0 \lambda^4}{B} \\ 8w_1 - 32w_2 + 20w_3 = \frac{p_0 \lambda^4}{B} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 20 & -16 & 2 \\ -16 & 24 & -8 \\ 8 & -32 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \frac{p_0 \lambda^4}{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2^a SOLUZIONE

$\lambda = \frac{A}{8}$



Si ottiene la soluzione

$w_1 = 0,546875 \frac{p_0 \lambda^4}{B}$

$w_2 = 0,750000 \frac{p_0 \lambda^4}{B}$

$w_3 = 1,031250 \frac{p_0 \lambda^4}{B}$

essendo: $\lambda^4 = \frac{A^4}{256}$

$w_1 = 0,002136 p_0 A^4 / B$

$w_2 = 0,002930 p_0 A^4 / B$

$w_3 = 0,004028 p_0 A^4 / B$

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO

- modo 1 $(w_{17} + w_{17} + w_3 + w_3) - 8(w_{12} + w_{12} + w_2 + w_2) + 2(w_{11} + w_{13} + w_5 + w_{13}) + 20w_1 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 2 $(w_{12} + w_{18} + w_4 + w_6) - 8(w_1 + w_{13} + w_3 + w_5) + 2(w_{12} + w_{14} + w_6 + w_2) + 20w_2 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 3 $(w_1 + w_{19} + w_3 + w_8) - 8(w_2 + w_{14} + w_4 + w_6) + 2(w_{13} + w_{15} + w_7 + w_{15}) + 20w_3 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 4 $(w_2 + w_{20} + w_2 + w_9) - 8(w_3 + w_{15} + w_3 + w_7) + 2(w_{14} + w_{14} + w_6 + w_6) + 20w_4 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 5 $(w_{13} + w_{13} + w_7 + w_7) - 8(w_2 + w_2 + w_6 + w_6) + 2(w_1 + w_3 + w_8 + w_3) + 20w_5 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 6 $(w_2 + w_{14} + w_6 + w_9) - 8(w_5 + w_3 + w_7 + w_8) + 2(w_2 + w_4 + w_9 + w_6) + 20w_6 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 7 $(w_5 + w_{15} + w_5 + w_{10}) - 8(w_6 + w_4 + w_6 + w_9) + 2(w_3 + w_3 + w_8 + w_8) + 20w_7 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 8 $(w_3 + w_3 + w_8 + w_8) - 8(w_6 + w_6 + w_9 + w_9) + 2(w_5 + w_7 + w_7 + w_{10}) + 20w_8 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 9 $(w_6 + w_4 + w_6 + w_9) - 8(w_8 + w_7 + w_8 + w_{10}) + 2(w_6 + w_6 + w_9 + w_9) + 20w_9 = p_0 \lambda^4 / B$
- modo 10 $(w_7 + w_7 + w_7 + w_7) - 8(w_9 + w_9 + w_9 + w_9) + 2(w_8 + w_8 + w_8 + w_8) + 20w_{10} = p_0 \lambda^4 / B$

CONDIZIONI AL CONTORNO DI BORDO

- modo 12 $w_{12} = 0 ; w_{17} = -w_1$
- modo 13 $w_{13} = 0 ; w_{18} = -w_2$
- modo 14 $w_{14} = 0 ; w_{19} = -w_3$
- modo 15 $w_{15} = 0 ; w_{20} = -w_4$

CONDIZIONI AL CONTORNO NELLO SPIGOLO

$w_{11} = 0$ $w_{16} = 0$

matrice
10 x 10

18	-16	2	0	2	0	0	0	0	0
-8	21	-8	1	-8	3	0	0	0	0
1	-8	20	-8	2	-8	2	1	0	0
0	2	-16	19	0	4	-8	0	1	0
2	-16	4	0	20	-16	2	2	0	0
0	3	-8	2	-8	23	-8	-8	3	0
0	0	4	-8	2	-16	20	4	-8	1
0	0	2	0	2	-16	4	22	-16	2
0	0	0	1	0	6	-8	-16	25	-8
0	0	0	0	0	0	4	8	-32	20

* $\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{Bmatrix} = \frac{p_0 \lambda^4}{B} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

- $w_1 = 2,714398 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_2 = 4,859861 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_3 = 6,206585 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_4 = 6,663495 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_5 = 8,742728 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_6 = 11,19637 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_7 = 12,03125 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_8 = 14,36373 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_9 = 15,44377 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $w_{10} = 16,60829 \cdot p_0 \lambda^4 / B$

$\lambda^4 = \frac{A^4}{4096}$

- $w_1 = 0,000663 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_2 = 0,001186 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_3 = 0,001515 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_4 = 0,001627 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_5 = 0,002134 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_6 = 0,002733 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_7 = 0,002937 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_8 = 0,003507 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_9 = 0,003770 \cdot p_0 A^4 / B$
- $w_{10} = 0,004055 \cdot p_0 A^4 / B$

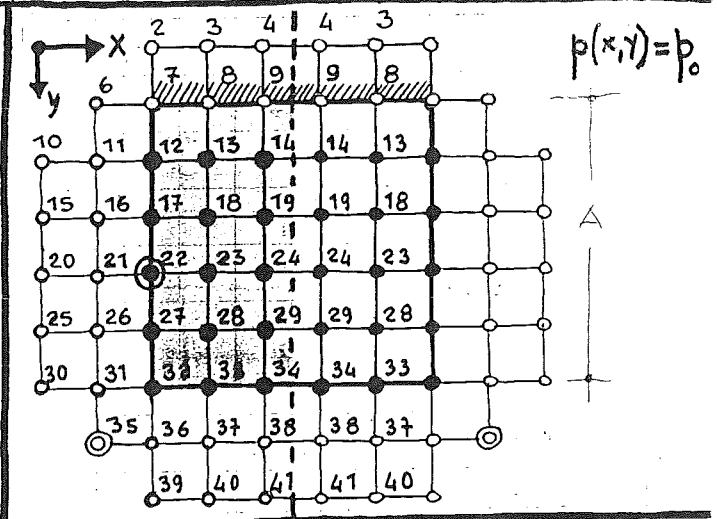
PIASTRA QUADRATA CON UN BORDO INCASTRATO E TRE BORDI LIBERI

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

- $(W_{10} + W_2 + W_{14} + W_{22}) - 8(W_{11} + W_7 + W_{13} + W_{17}) + 2(W_6 + W_8 + W_{18} + W_{16}) + 20W_{12} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{11} + W_3 + W_{14} + W_{23}) - 8(W_{12} + W_8 + W_{14} + W_{18}) + 2(W_7 + W_9 + W_{19} + W_{17}) + 20W_{13} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{12} + W_4 + W_{13} + W_{24}) - 8(W_{13} + W_9 + W_{14} + W_{19}) + 2(W_8 + W_9 + W_{19} + W_{18}) + 20W_{14} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{15} + W_7 + W_{19} + W_{27}) - 8(W_{16} + W_{12} + W_{18} + W_{22}) + 2(W_{11} + W_{13} + W_{23} + W_{21}) + 20W_{17} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{16} + W_8 + W_{19} + W_{28}) - 8(W_{17} + W_{13} + W_{19} + W_{23}) + 2(W_{12} + W_{14} + W_{24} + W_{22}) + 20W_{18} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{17} + W_9 + W_{18} + W_{29}) - 8(W_{18} + W_{14} + W_{19} + W_{24}) + 2(W_{13} + W_{14} + W_{24} + W_{23}) + 20W_{19} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{20} + W_{12} + W_{24} + W_{32}) - 8(W_{21} + W_{17} + W_{23} + W_{27}) + 2(W_{16} + W_{18} + W_{28} + W_{26}) + 20W_{22} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{21} + W_{13} + W_{24} + W_{33}) - 8(W_{22} + W_{18} + W_{24} + W_{28}) + 2(W_{17} + W_{19} + W_{29} + W_{27}) + 20W_{23} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{22} + W_{14} + W_{23} + W_{34}) - 8(W_{23} + W_{19} + W_{24} + W_{29}) + 2(W_{18} + W_{19} + W_{29} + W_{28}) + 20W_{24} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{25} + W_{17} + W_{29} + W_{36}) - 8(W_{26} + W_{22} + W_{28} + W_{32}) + 2(W_{21} + W_{23} + W_{33} + W_{31}) + 20W_{27} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{26} + W_{18} + W_{29} + W_{37}) - 8(W_{27} + W_{23} + W_{29} + W_{33}) + 2(W_{22} + W_{24} + W_{34} + W_{32}) + 20W_{28} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{27} + W_{19} + W_{28} + W_{38}) - 8(W_{28} + W_{24} + W_{29} + W_{34}) + 2(W_{23} + W_{24} + W_{34} + W_{33}) + 20W_{29} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{30} + W_{22} + W_{34} + W_{39}) - 8(W_{31} + W_{27} + W_{33} + W_{36}) + 2(W_{26} + W_{28} + W_{37} + W_{35}) + 20W_{32} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{31} + W_{23} + W_{34} + W_{40}) - 8(W_{32} + W_{28} + W_{34} + W_{37}) + 2(W_{27} + W_{29} + W_{38} + W_{36}) + 20W_{33} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$
- $(W_{32} + W_{24} + W_{33} + W_{41}) - 8(W_{33} + W_{29} + W_{34} + W_{38}) + 2(W_{28} + W_{29} + W_{38} + W_{37}) + 20W_{34} = 1 \cdot p_0 \lambda^4 / B$

CONDIZIONI AL CONTORNO NEI BORDI LIBERI

- $W_{11} - 2W_{12} + W_{13} + \nu(W_7 - 2W_{12} + W_{17}) = 0$
- $W_{16} - 2W_{17} + W_{18} + \nu(W_{12} - 2W_{17} + W_{22}) = 0$
- $W_{21} - 2W_{22} + W_{23} + \nu(W_{17} - 2W_{22} + W_{27}) = 0$
- $W_{26} - 2W_{27} + W_{28} + \nu(W_{22} - 2W_{27} + W_{32}) = 0$
- $W_{31} - 2W_{32} + W_{33} + \nu(W_{27} - 2W_{32} + W_{36}) = 0$
- $W_{27} - 2W_{32} + W_{36} + \nu(W_{31} - 2W_{32} + W_{33}) = 0$
- $W_{28} - 2W_{33} + W_{37} + \nu(W_{32} - 2W_{33} + W_{34}) = 0$
- $W_{29} - 2W_{34} + W_{38} + \nu(W_{33} - 2W_{34} + W_{34}) = 0$



- $-W_{10} + 2W_{11} - 2W_{13} + W_{14} + (2-\nu)(W_8 + W_{18} - W_6 - W_{16} - 2W_{13} + 2W_{11}) = 0$
- $-W_{15} + 2W_{16} - 2W_{18} + W_{19} + (2-\nu)(W_{13} + W_{23} - W_{11} - W_{21} - 2W_{18} + 2W_{16}) = 0$
- $-W_{20} + 2W_{21} - 2W_{23} + W_{24} + (2-\nu)(W_{18} + W_{28} - W_{16} - W_{26} - 2W_{23} + 2W_{21}) = 0$
- $-W_{25} + 2W_{26} - 2W_{28} + W_{29} + (2-\nu)(W_{23} + W_{33} - W_{21} - W_{31} - 2W_{28} + 2W_{26}) = 0$
- $-W_{30} + 2W_{31} - 2W_{33} + W_{34} + (2-\nu)(W_{28} + W_{37} - W_{26} - W_{35} - 2W_{33} + 2W_{31}) = 0$
- $-W_{22} + 2W_{27} - 2W_{36} + W_{39} + (2-\nu)(W_{35} + W_{37} - W_{26} - W_{28} - 2W_{36} + 2W_{27}) = 0$
- $-W_{23} + 2W_{28} - 2W_{37} + W_{40} + (2-\nu)(W_{36} + W_{38} - W_{27} - W_{29} - 2W_{37} + 2W_{28}) = 0$
- $-W_{24} + 2W_{29} - 2W_{38} + W_{41} + (2-\nu)(W_{37} + W_{38} - W_{28} - W_{29} - 2W_{38} + 2W_{29}) = 0$
- $W_{35} + W_{28} - W_{26} - W_{34} = 0$ (momento torcente nullo al nodo 32)

- ### CONDIZIONI AL CONTORNO AL BORDO INCASTRATO
- $W_8 = 0$
 - $W_3 = W_{13}$
 - $W_9 = 0$
 - $W_4 = W_{14}$
 - $W_7 = 0$
 - $W_2 = W_{12}$
 - $W_6 = 0$

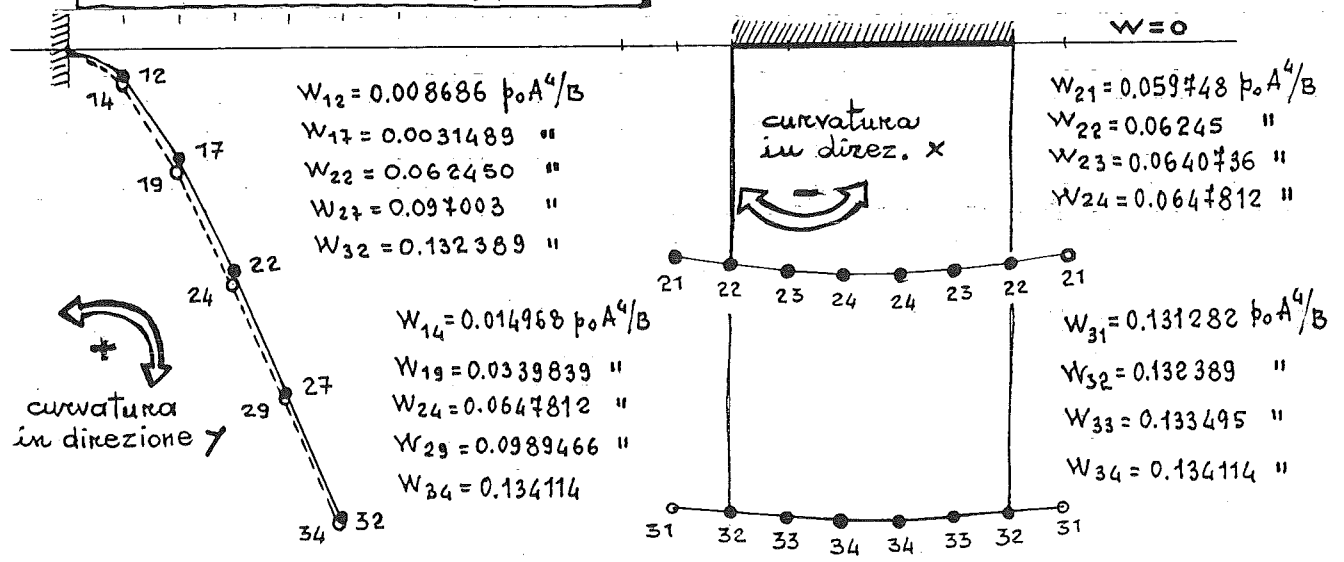
SOLUZIONE

$$\lambda^4 = \frac{A^*}{54} = \frac{A^*}{625}$$

(8)

$W_{10} = -11.12912 p_0 \lambda^4 / B$	$W_{20} = 35.42846 p_0 \lambda^4 / B$	$W_{30} = 82.32326 p_0 \lambda^4 / B$
$W_{11} = 1.860859 "$	$W_{21} = 37.34285 "$	$W_{31} = 82.05131 "$
$W_{12} = 5.428894 "$	$W_{22} = 39.03119 "$	$W_{32} = 82.74284 "$
$W_{13} = 6.350033 "$	$W_{23} = 40.04598 "$	$W_{33} = 83.43438 "$
$W_{14} = 6.560514 "$	$W_{24} = 40.48825 "$	$W_{34} = 83.8213 "$
$W_{15} = 12.65494 "$	$W_{25} = 59.30564 "$	$W_{35} = 103.7774 "$
$W_{16} = 16.98897 "$	$W_{26} = 59.67069 "$	$W_{36} = 104.8589 "$
$W_{17} = 19.68078 "$	$W_{27} = 60.62678 "$	$W_{37} = 105.5334 "$
$W_{18} = 20.84303 "$	$W_{28} = 61.42672 "$	$W_{38} = 105.917 "$
$W_{19} = 21.23994 "$	$W_{29} = 61.84165 "$	$W_{39} = 127.922 "$
		$W_{40} = 128.0994 "$
		$W_{41} = 128.5857 "$

LO STATO DI DEFORMAZIONE



I diagrammi mostrano che le strisce centrali parallele all'asse γ si abbassano di più rispetto a quelle prossime ai bordi paralleli a y .

Il fenomeno nasce dall'esigenza di disporre di curvature di segno opposto nelle direzioni x e y nei nodi appartenenti ai bordi liberi in modo che siano nulli i momenti flettenti ortogonali al bordo.

Ad esempio nel nodo 22: $(M_x)_{22} = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{22} = 0$

Deve essere $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{22} = 0$. Risultato: $(W_{21} - 2W_{22} + W_{23}) + \nu (W_{17} - 2W_{22} + W_{27}) =$
 $= (37,34285 - 2 \cdot 39,03119 + 40,04598) +$
 $+ 0.3 (19,68078 - 2 \cdot 39,03119 + 60,62678) =$
 $= -0,67355 + 0.3 (2,24518) = 0$

● I momenti flettenti in direzione y nel bordo incastrato sono massimi al centro del lato e vanno decrescendo approssimandosi allo spigolo.

DIASTRE CON APOGGI INTERNI PUNTIFORMI

9

Talvolta devono considerarsi piastre di forma rettangolare vincolate, oltre che sul contorno, anche internamente da appoggi (pilastri, per esempio).

Nel caso più semplice (frequente nella pratica) tali appoggi possono essere schematizzati come vincoli puntiformi di appoggio semplice.

La risoluzione di tali strutture con il metodo delle differenze finite non presenta difficoltà (a parte, si intende, quelle che fanno derivare dall'entità delle calcolazioni necessarie).

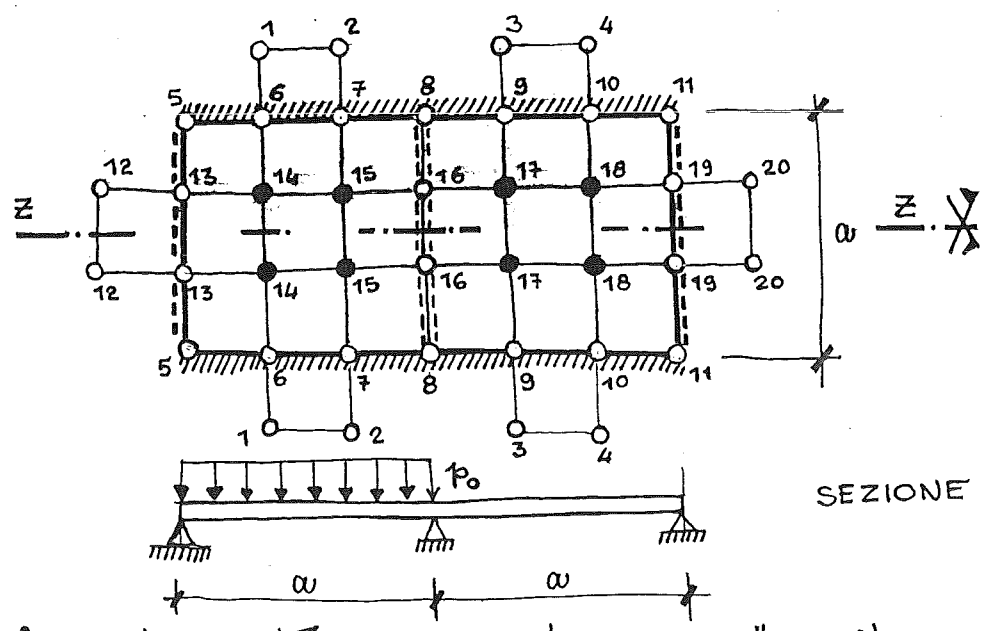
In pratica il sistema risolutivo finale differisce da quello della piastra non vincolata internamente per il fatto che:

- 1) non si devono scrivere le equazioni di equilibrio nei nodi interni dotati di vincoli puntiformi poiché non hanno significato, essendo sicuramente garantito l'equilibrio alla traslazione verticale per effetto della presenza del vincolo;
- 2) si deve imporre la condizione cinematica di spostamento nullo nei nodi interni dotati di vincoli puntiformi.

Con il semplice esempio che segue si illustra quanto sopra.

PIASTRA CONTINUA SU APPOGGI INTERMEDI

ESEMPIO



SEZIONE Z-Z

La piastra continua è simmetrica rispetto all'asse Z-Z, pertanto può adottarsi una numerazione del reticolo simmetrica rispetto a tale asse. Rispetto al reticolo della piastra rettangolare di lati $2a \times a$ si ha la modifica che tiene conto del fatto che nel nodo 16 non ha significato la scrittura dell'equazione indefinita di equilibrio (poiché il vincolo impedisce la traslazione verticale), mentre deve imponersi la condizione di spostamento nullo. La striscia supplementare quindi si interrompe sul prolungamento della linea di appoggio intermedia (mantenendo solo i nodi coinvolti nella scrittura dell'equazione indefinita di equilibrio in 15 e 17).

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$\begin{aligned}
 \text{modo 14: } & (W_{12} + W_1 + W_{16} + W_6) - 8(W_{13} + W_6 + W_{15} + W_{14}) + 2(W_5 + W_7 + W_{15} + W_{13}) + 20W_{14} = 1 \cdot \frac{p_0 \cdot a^4}{B} \\
 \text{modo 15: } & (W_{13} + W_2 + W_{17} + W_3) - 8(W_{14} + W_7 + W_{16} + W_{15}) + 2(W_6 + W_8 + W_{16} + W_{14}) + 20W_{15} = 1 \cdot \frac{p_0 \cdot a^4}{B} \\
 \text{modo 17: } & (W_{15} + W_3 + W_{19} + W_9) - 8(W_{16} + W_9 + W_{18} + W_{17}) + 2(W_8 + W_{10} + W_{18} + W_{16}) + 20W_{17} = 0 \\
 \text{modo 18: } & (W_{16} + W_4 + W_{20} + W_{10}) - 8(W_{17} + W_{10} + W_{19} + W_{18}) + 2(W_9 + W_{11} + W_{19} + W_{17}) + 20W_{18} = 0
 \end{aligned}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\begin{aligned}
 W_5 = 0; \quad W_6 = 0; \quad W_1 = W_{14}; \quad W_7 = 0; \quad W_2 = W_{15}; \quad W_8 = 0; \quad W_9 = 0; \quad W_3 = W_{17}; \\
 W_{10} = 0; \quad W_4 = W_{18}; \quad W_{11} = 0; \quad W_{13} = 0; \quad W_{12} = -W_{14}; \quad W_{16} = 0; \quad W_{19} = 0; \quad W_{20} = -W_{18}
 \end{aligned}$$

SISTEMA RISOLVENTE

$$\begin{cases}
 12W_{14} - 6W_{15} & = 1 \cdot \frac{p_0 \cdot a^4}{B} \\
 -6W_{14} + 13W_{15} + W_{17} & = 1 \cdot \frac{p_0 \cdot a^4}{B} \\
 W_{15} + 13W_{17} - 6W_{18} & = 0 \\
 -6W_{17} + 12W_{18} & = 0
 \end{cases}$$

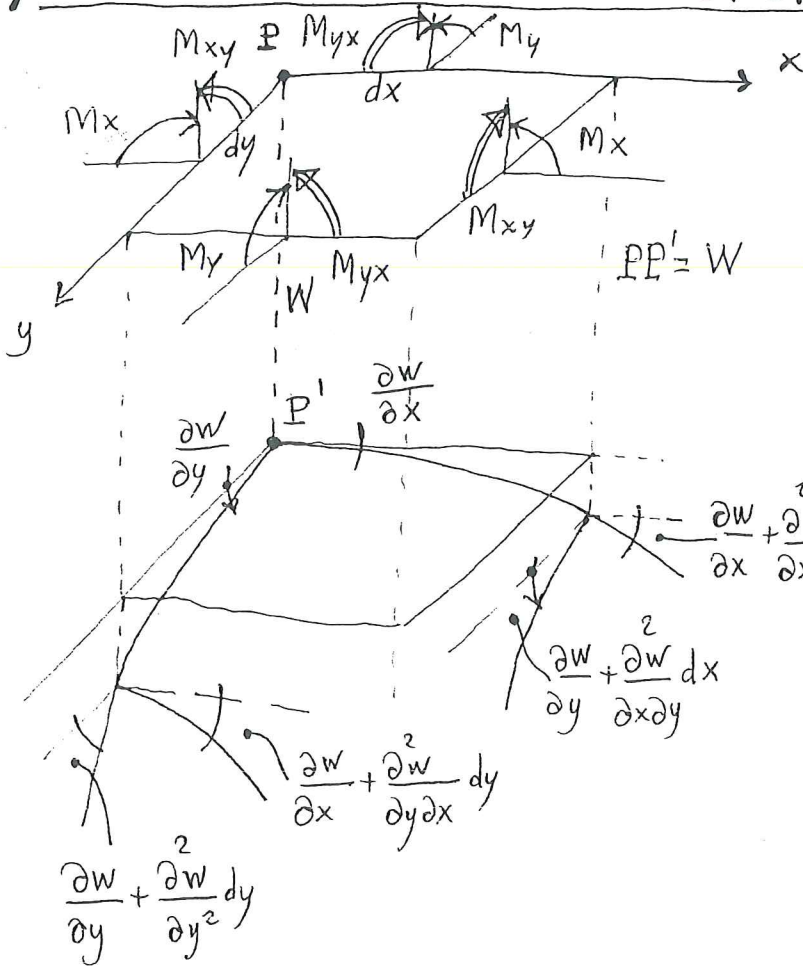
SOLUZIONE

$$\begin{aligned}
 W_{14} &= \frac{63}{396} \cdot p_0 \cdot a^4 / B \\
 W_{15} &= \frac{60}{396} \cdot p_0 \cdot a^4 / B \\
 W_{17} &= -\frac{6}{396} \cdot p_0 \cdot a^4 / B \\
 W_{18} &= -\frac{3}{396} \cdot p_0 \cdot a^4 / B
 \end{aligned}$$

METODO ENERGETICO O VARIAZIONALE 17/11/03

Finora abbiamo studiato le piastre con il criterio statico. (metodo "locale"). Consideriamo, parallelamente quello energetico (metodo "globale")

A) LAVORO INTERNO DI DEFORMAZIONE



Consideriamo un elemento di volume infinitesimo del 2° ordine, soggetto ai momenti flettenti M_x e M_y e a quelli torcenti M_{xy} e M_{yx} .

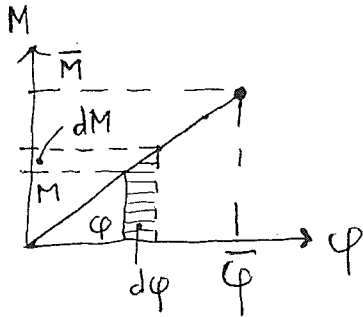
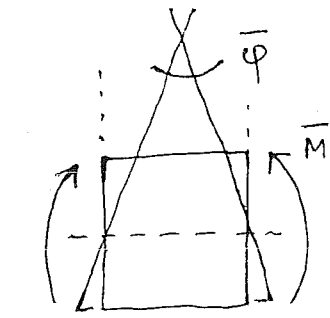
Trascuriamo gli incrementi $\frac{\partial M_x}{\partial x} dx$ etc

perché nell'uso che ne faremo producono quantità che possono essere trascurate.

Trascuriamo inoltre il lavoro prodotto delle forze taglianti,

essendo posto per ipotesi che le piastre sono di spessore sottile.

Il lavoro elastico di deformazione si ottiene applicando le regole per il calcolo del lavoro diretto: si moltiplica il valore finale dell'ente che sollecita per il valore finale della deformazione che esso produce e si pone $\frac{1}{2}$ davanti al prodotto.



Se ad esempio si considera un elemento di trave soggetto a flessione è ovvio che quando il momento è nullo ($M=0$) anche la rotazione relativa tra le facce alle quali è applicato è nulla ($\varphi=0$). Quando il momento raggiunge il valore finale $M=\bar{M}$ anche la rotazione raggiunge il valore finale $\bar{\varphi}$. La legge con cui variano M e φ è lineare, essendo valida la legge di Hooke e si esprime con: $M = \frac{\bar{M}}{\bar{\varphi}} \varphi$.

In una fase generica in cui il momento vale M e la rotazione φ si suppone di incrementare M di una quantità infinitesima dM : la rotazione crescerà di $d\varphi$. Il lavoro o energia elastica immagazzinata è data dall'area tratteggiata e vale: $dL_e = M d\varphi + \frac{1}{2} dM d\varphi \cong M d\varphi$

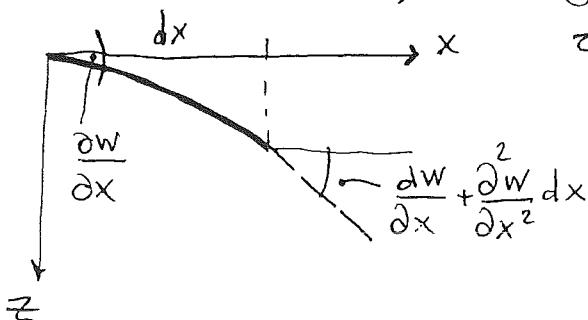
essendo il secondo termine infinitesimo di ordine superiore. Il lavoro totale si ottiene integrando il lavoro elementare dL_e su tutta la trasformazione:

$$L_e = \int_0^{\bar{\varphi}} M d\varphi = \int_0^{\bar{\varphi}} \frac{\bar{M}}{\bar{\varphi}} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \bar{M} \bar{\varphi}$$

c. d. d.

Nel caso delle piastre, che stiamo studiando consideriamo il momento M_x . Il valore finale della sollecitazione è $(M_x \cdot dy)$. Il valore finale della deformazione

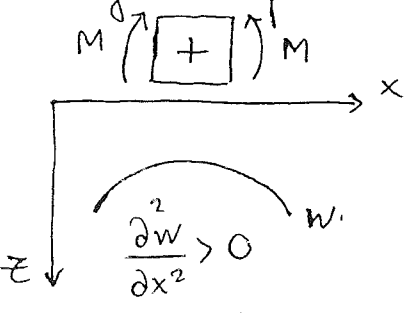
risponde a quella della rotazione relativa fra le facce di normale x cui è applicato:



$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Risulta:
$$dLi_{M_x} = -\frac{1}{2} (M_x dy) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right)$$

Il segno negativo che compare davanti tiene conto della circostanza che la convenzione assunta per la positività dei momenti flettenti produce curvature negative rispetto al sistema cartesiano di riferimento adottato, per le quali le curvature positive sono quelle in figura.



Analogamente possiamo ottenere:

$$dLi_{M_y} = -\frac{1}{2} (M_y dx) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right)$$

Per quanto concerne i momenti torcenti M_{xy} è facile vedere che: il valore finale della sollecitazione è $(M_{xy} dy)$; la rotazione relativa: $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx$ e che quest'ultima ruota in verso antiorario, ovvero opposto a quello del momento. Si ottiene:

$$dLi_{M_{xy}} = -\frac{1}{2} (M_{xy} dy) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right)$$

Analogamente:

$$dLi_{M_{yx}} = -\frac{1}{2} (M_{yx} dx) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dy \right)$$

19/11/03

Sommando le precedenti quantità e tenendo conto che $M_{xy} = M_{yx}$ si ottiene il lavoro totale:

$$dL_i = -\frac{1}{2} \left[M_x \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_y \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2M_{xy} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy$$

Possiamo ottenere il lavoro elementare in funzione della sola W ricordando le relazioni di elasticità delle piastre piatte:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -B \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -B(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Ponendo anche $dx \cdot dy = dA$ risulta:

$$dL_i = \frac{B}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \cdot (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA$$

Sommando all'interno della parentesi quadra le quantità:

$$+ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

e sviluppando i calcoli, dopo opportune semplificazioni si ottiene:

$$dL_i = \frac{B}{2} dA \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}$$

Poniamo ora:
$$\left(\nabla^2 w \right)^2 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2$$

$$\left(L^2 w \right)^2 = 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

dove all'operatore L attribuiamo il compito di rappresentare le operazioni differenziali al 2° membro.

Otteniamo:
$$dL_i = \frac{B}{2} \left\{ \left(\nabla^2 w \right)^2 + \left(L^2 w \right)^2 \right\} dA$$

Se consideriamo tutta la piastra:

$$L_i = \frac{B}{2} \int_A \left[\left(\nabla^2 w \right)^2 + \left(L^2 w \right)^2 \right] dA$$

LAVORO INTERNO
DI DEFORMAZIONE
DELLA INTERA PIASTRA

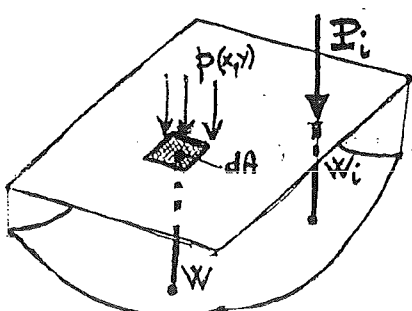
Senza dare la dimostrazione $\left(L^2 w \right)$ è una quantità piccola; per questi casi poi è identicamente nulla ($L^2 w \equiv 0$)*:

piastre rettangolari: appoggiate	piastre qualsiasi: incastrate
-------------------------------------	----------------------------------

In conseguenza si userà:
$$L_i = \frac{B}{2} \int_A \left(\nabla^2 w \right)^2 dA$$

(*). Integrando per parti $L^2 w$ si arriva a dimostrarlo (Belluzzi).

B) LAVORO ESTERNO



Il lavoro elementare della forza ripartita vale:

$$dL_e = \frac{1}{2} p \cdot w dA$$

Nel caso di forza concentrata pesima:

$$L_{e_i} = \frac{1}{2} P_i w_i$$

$$L_e = \frac{1}{2} \int_A p(x,y) \cdot w \, dA + \frac{1}{2} \sum_1^m P_i \cdot w_i$$

è l'espressione generale del lavoro esterno (lavoro diretto).

c) ENERGIA POTENZIALE TOTALE

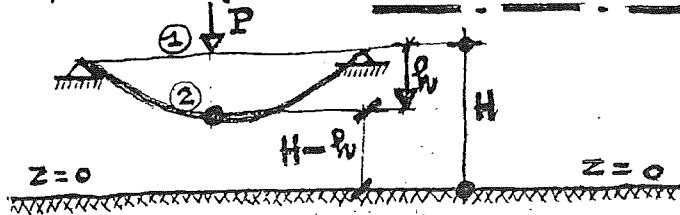
Abbiamo quindi le espressioni di L_e ed L_i ; ora:

$$U = U_i + U_p = L_i - 2L_e$$

U = energia potenziale totale (più esatto è: variazione di.....)

U_i = energia interna di deformazione (idem c.s.).

U_p = energia di posizione delle forze esterne (idem c.s.).



L'energia di posizione nello stato indeformato vale:

$$U_1 = P \cdot H$$

L'energia di posizione di def. avvenuta è:

$$U_2 = P(H-h):$$

Allora: $U_p = U_2 - U_1 = PH - Ph - PH = -Ph \Rightarrow U_p = -Ph$

Tenuto conto di quanto sopra è dunque:

$$L_e = \frac{1}{2} P \cdot h$$

$$\Rightarrow -2L_e = -Ph$$

$$U_p = -2L_e$$

c. v. d.

Otteniamo:

$$U = L_i - 2L_e = \frac{B}{2} \int_A (\nabla^2 w)^2 \, dA - \left(\int_A p(x,y) \cdot w \, dA + \sum_1^m P_i w_i \right)$$

Si conclude spesso dicendo che U è funzione di w .

Questo modo di esprimersi non è corretto.

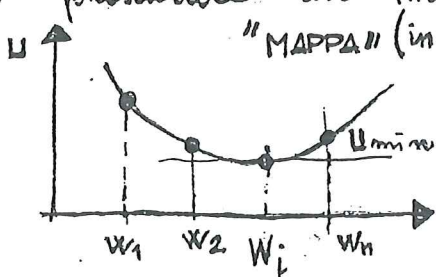
La "funzione" lega infatti due enti di due insiemi diversi, però della stessa natura (numeri). Nel nostro caso si tratta di due enti di due insiemi diversi e di diversa natura (funzione e numero). Si dice più esattamente, nel nostro caso,

che U è funzionale di W - $x \rightarrow y$
 $y = f(x) \iff$ funzione - (numero \rightarrow numero)

$y = \int_A f(x) dx \iff$ funzionale - ($f(x)$ funzione \rightarrow numero)

D) PRINCIPIO DELLA MINIMA E.P.T.

Al variare di W il funzionale U , nel campo A , può presentare un minimo -



$$W_1 = (x^2 + y^2)$$

$$W_2 = e^{x+y} + xy \dots \text{etc.}$$

diagramma simbolico

Si può dimostrare che, variando W , U presenta un minimo. La funzione W che ci interessa non è però una funzione qualunque.

PRINCIPIO DELLA MINIMA ENERGIA POTENZIALE TOTALE afferma:

Tra l'infinità di tutte le possibili soluzioni congruenti (continue in sede indefinita e rispettose dei vincoli) l'unica equilibrata è quella che rende minima U .

E) APPLICAZIONE DEL TEOREMA -

La branca della matematica che si occupa dello studio dei funzionali è detta "CALCOLO VARIAZIONALE", e non è familiare agli ingegneri.

Per la ricerca di U_{\min} noi adotteremo un metodo approssimato, detto "di Ritz" o "dei coefficienti indeterminati".

METODO DI RITZ: "dei coefficienti indeterminati"

Trasforma un legame funzionale in legame di funzione.

Alora, per la ricerca di U_{\min} , si usano i metodi della

ANALISI MATEMATICA.

$$L_i = \frac{B}{2} \int_{VA} (\nabla^2 w)^2 dA$$

LAV. INTERNO DI DEFORMAZIONE

$$L_e = \frac{1}{2} \int_{VA} p(xy) \cdot w dA + \frac{1}{2} \sum_i P_i w_i \quad \text{Lavoro esterno}$$

$$U = L_i - 2L_e$$

Energia potenziale totale

$$U = \frac{B}{2} \int_{VA} (\nabla^2 w)^2 dA - \left[\int_{VA} p(xy) \cdot w \cdot dA + \sum_i P_i w_i \right] (*)$$

Per trovare la w che minimizza U col metodo di Ritz

consideriamo una famiglia di possibili w , cioè una famiglia di funzioni congruenti e indipendenti l'una dall'altra;

poniamo: $w(xy) = C_1 \cdot w_1(xy) + C_2 \cdot w_2(xy) + C_3 \cdot w_3(xy) + \dots \dots \dots (1)$

dove $w_1, w_2 \dots$ etc. sono funzioni della famiglia presa

in considerazione e sicuramente congruenti (continue e rispettose dei vincoli).

Le w_i sono in numero finito, le C_i sono costanti arbitrarie.

La relazione (1) è "funzione" delle C_i costanti: si determinano

i coefficienti C_i in modo che la w renda minimo U

per quella data serie di w_i adottate. A tale scopo, prendo w , calcolo ∇^2 , sostituisco nell'espressione di U .

Otengo che U è funzione dei

coefficienti C_i :

$$U = U(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Per trovare U_{\min} deve essere $\frac{dU}{dC_i} = 0$ (U stazionaria).
 Dovendosi trattare U come una funzione di C_1, \dots, C_n si deve quindi scrivere:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial C_1}\right) dC_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial C_2}\right) dC_2 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial C_n}\right) dC_n \quad (3)$$

La $w(x,y)$ data dalla (1) viene quindi trovata individuando quei valori C_1, C_2, \dots, C_n che rendono stazionaria la U . Questi coefficienti sono le "peso" con cui le $W_i(x,y)$ ($i=1-n$) entrano nella $w(x,y)$.

Poiché nella (3) le variazioni dC_i ($i=1-n$) sono arbitrarie tutte le derivate parziali entro parentesi devono essere nulle. Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial C_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U}{\partial C_n} = 0 \end{cases}$$

È evidente che se tra le funzioni w_i è compresa la funzione $w(x,y)$ giusta (soluzione esatta) il metodo farà il coefficiente corrispondente pari a 1 e annullerà gli altri (Si effettua poi la verifica con il metodo statico).

METODO DI RITZ :

SCelta DELLA FUNZIONE $W(x,y)$

La funzione: $W(x,y) = C_1 \cdot W_1(x,y) + C_2 \cdot W_2(x,y) + \dots + C_n \cdot W_n(x,y)$
che si adotta deve risultare, in partenza congruente
poichè tale è richiesta per poter applicare il principio
della minima energia potenziale totale. Questo implica
che la funzione deve risultare:

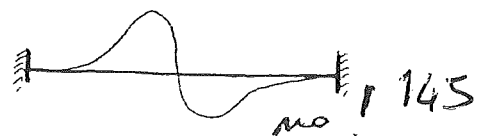
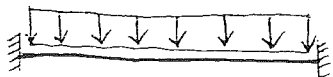
- continua in sede indefinita (ovvero in ogni punto del dominio di definizione della piastra);
 - rispettosa delle C.a.C. "cinematiche". Le condizioni al contorno di tipo "statico" non vengono prese in considerazione.
- Il metodo di Ritz, minimizzando l'energia potenziale totale, sceglie i coefficienti C_i in modo tale da fornire come risultato una funzione $W(x,y)$ che risulta il più possibile equilibrata e pertanto il più possibile rispettosa delle condizioni statiche al contorno -

Queste caratteristiche richieste del Principio della M.E.P.T. (che determina l'unica soluzione equilibrata fra infinite congruenti) non sono però sufficienti.

Come detto in precedenza, quando si impone $dU=0$ non si impone che U sia minima, ma solo che U sia stazionaria;
sul piano matematico alla condizione $dU=0$ può corrispondere un minimo, un massimo oppure un flesso.

Per avere certezza che dalla condizione $dU=0$ scaturisca un minimo di U occorre scegliere una funzione W che approssimi bene la deformata elastica della struttura.

Esempio :



APPLICAZIONE DEL

METODO DI RITZ :

SCRITTURA DEL SISTEMA

Vediamo cosa succede se consideriamo come funzione $w(x,y)$ la seguente:

$$w(x,y) = c_1 \cdot w_1(x,y) + c_2 \cdot w_2(x,y) \Rightarrow (\nabla^2 w)^2 = (\nabla^2 (c_1 w_1 + c_2 w_2))^2$$

Otteniamo la seguente espressione dell'energia potenziale totale:

$$U = \frac{B}{2} \int_A [c_1 \cdot \nabla^2 w_1 + c_2 \cdot \nabla^2 w_2]^2 dA - \int_A p(x,y) [c_1 w_1 + c_2 w_2] dA - \sum_1^m P_i (c_1 w_1 + c_2 w_2)_i$$

Ammettiamo soddisfatte le condizioni matematiche per poter effettuare la derivazione sotto il segno di integrale e sommatoria.

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = \frac{B}{2} \int_A 2 [c_1 \cdot \nabla^2 w_1 + c_2 \cdot \nabla^2 w_2] \cdot \nabla^2 w_1 \cdot dA - \int_A p(x,y) \cdot w_1 \cdot dA - \sum_1^m P_i (w_1)_i = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = \frac{B}{2} \int_A 2 [c_1 \cdot \nabla^2 w_1 + c_2 \cdot \nabla^2 w_2] \cdot \nabla^2 w_2 \cdot dA - \int_A p(x,y) \cdot w_2 \cdot dA - \sum_1^m P_i (w_2)_i = 0$$

Le precedenti relazioni si possono anche scrivere:

$$c_1 \left[\int_A (\nabla^2 w_1)^2 \cdot dA \right] + c_2 \left[\int_A \nabla^2 w_1 \cdot \nabla^2 w_2 \cdot dA \right] = \frac{1}{B} \int_A p(x,y) w_1 dA + \frac{1}{B} \sum_1^m P_i (w_1)_i$$

$$c_1 \left[\int_A \nabla^2 w_2 \cdot \nabla^2 w_1 \cdot dA \right] + c_2 \left[\int_A (\nabla^2 w_2)^2 \cdot dA \right] = \frac{1}{B} \int_A p(x,y) w_2 dA + \frac{1}{B} \sum_1^m P_i (w_2)_i$$

in forma di sistema di equazioni lineari.

Le incognite del sistema sono i valori di c_1, c_2 .

I coefficienti della matrice sono i termini dentro le parentesi quadre: essi dipendono esclusivamente dalla funzione $w(x,y)$ assunta.

Il vettore dei termini noti, dipendente dai carichi esterni, è

dato dei termini a destra dell'uguale.

- Possiamo verificare che, nel caso di una funzione $W(x,y)$ costituita da n termini $W_i(x,y)$, il sistema risolvibile si presenta del tipo:

$$\begin{cases} A_{11} \cdot C_1 + A_{12} \cdot C_2 + \dots + A_{1n} \cdot C_n = T_1 \\ A_{21} \cdot C_1 + A_{22} \cdot C_2 + \dots + A_{2n} \cdot C_n = T_2 \\ \dots \\ A_{n1} \cdot C_1 + A_{n2} \cdot C_2 + \dots + A_{nn} \cdot C_n = T_n \end{cases}$$

dove, indicati con r e s gli indici di riga e colonna si ha:

$$A_{rs} = \int_A \nabla W_r \cdot \nabla W_s \cdot dA$$

si osserva che la precedente relazione è simmetrica rispetto ad r e ad s ; pertanto $A_{rs} = A_{sr}$.
(il sistema è simmetrico rispetto alla diagonale principale, e risulta: $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$, $A_{32} = A_{23}$ etc....)

$$T_r = \frac{1}{B} \int_A p(x,y) \cdot W_r \cdot dA + \frac{1}{B} \sum_k P_k \cdot W_r(x_k, y_k)$$

con: $p(x,y)$ carico ripartito sulla piastra; se è costante ($\equiv p_0$) può essere portato fuori del segno di integrale;

P_k generico carico concentrato agente nel punto di coordinate (x_k, y_k) .

- Si osserva che per una assegnata famiglia di funzioni $W_1(x,y), W_2(x,y) \dots W_n(x,y)$ i termini A_{rs} (coefficienti della matrice del sistema) non variano al variare del carico.

Questo è un discreto vantaggio offerto dal metodo: se si aggiungono nuove condizioni di carico, a quelle che già si stanno studiando, il lavoro preparatorio relativo alla matrice non aumenta. Si deve solo calcolare un ulteriore vettore di termini noti -

DETERMINAZIONE DELLA $w(x,y)$

Si assume:

20/11/03

$$W = \sum_{i=1}^m C_i \cdot W_i$$

Si ottiene la funzione w nella forma:

$$W = f(x,y) \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 xy + C_6 y^2 + C_7 x^3 + C_8 xy^2 + C_9 xy^2 + C_{10} y^3 + \dots \right)$$

dove la funzione $f(x,y)$ deve assumersi congruente, ovvero continua e ricammente rispettosa delle condizioni cinematiche al contorno.

Si assume:

$$f(x,y) = \prod_{j=1}^{m_e} \left(I_j(x,y) \right)^{\Omega}$$

dove:

m_e è il numero di bordi della piastra;

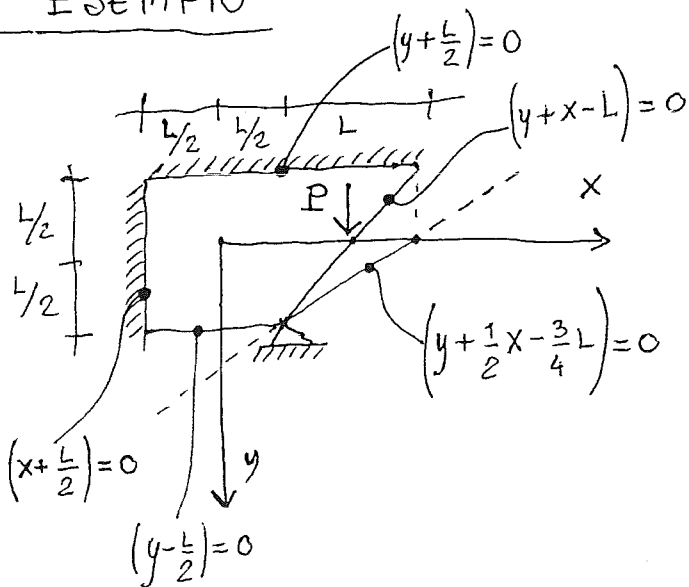
$I_j(x,y)$ è l'equazione in forma implicita del bordo j -esimo;

$\Omega = 0$ se il bordo è libero;

$\Omega = 1$ se il bordo è appoggiato;

$\Omega = 2$ se il bordo è incastrato.

1° ESEMPIO



c. al. c.

$$(w)_{x=-L/2} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=-L/2} = 0$$

$$(w)_{y=-L/2} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=-L/2} = 0$$

$$(w)_{x=L/2} = 0$$

$$y=L/2$$

Si pone:

$$w = f(x,y) \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x + C_3 y + C_4 \cdot x^2 + C_5 x y + \dots \right)$$

con:

$$f(x,y) = \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \cdot \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 \cdot \left(y + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}L\right)^1 \cdot \left(y - \frac{L}{2}\right)^0 \cdot \left(y + x - L\right)^0 =$$

$$= \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}L\right)$$

La funzione w è quindi formata da:

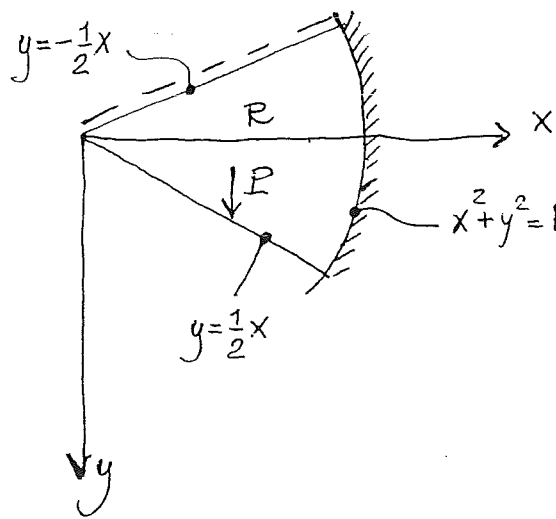
$$w = C_1 \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}L\right) +$$

$$+ C_2 \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}L\right) \cdot x +$$

$$+ C_3 \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 \left(y + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}L\right) \cdot y +$$

$$+ C_4 \dots$$

2° ESEMPIO



c. al C.

$$1) (W)_{x^2+y^2=R^2} = 0$$

$$2) \left(\frac{dW}{dm} \right)_{x^2+y^2=R^2} = 0$$

ovvero:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x^2+y^2=R^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{x^2+y^2=R^2} = 0$$

$$3) (W)_{y=-\frac{1}{2}x} = 0$$

Si pone: $W = f(x,y) \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 xy + \dots)$

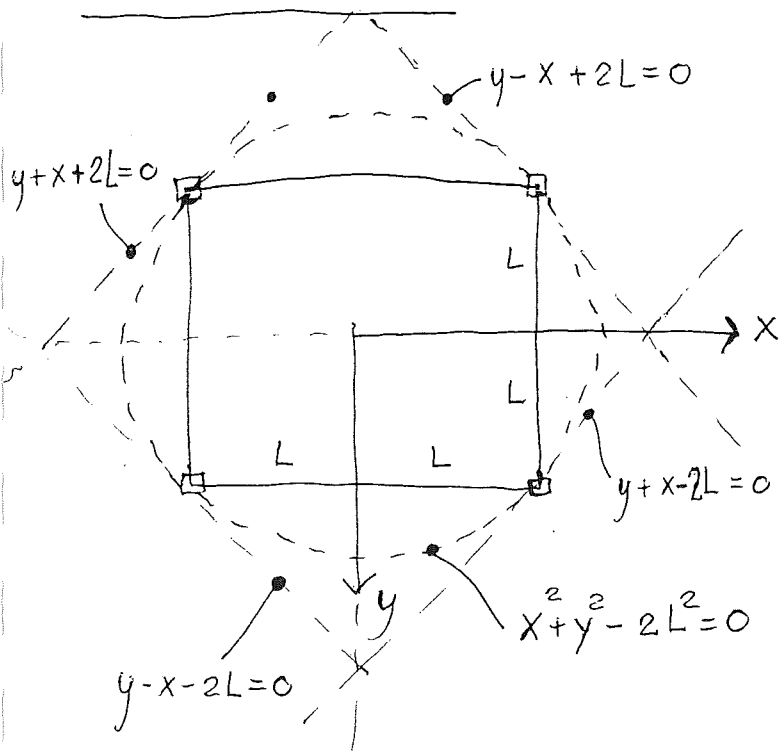
con:

$$f(x,y) = (R^2 - x^2 - y^2)^2 \cdot \left(y + \frac{1}{2}x \right)$$

La funzione W è quindi fornita da:

$$\begin{aligned} W = & C_1 \cdot (R^2 - x^2 - y^2)^2 \left(y + \frac{1}{2}x \right) + \\ & + C_2 \cdot (R^2 - x^2 - y^2)^2 \left(y + \frac{1}{2}x \right) \cdot x + \\ & + C_3 \cdot (R^2 - x^2 - y^2)^2 \left(y + \frac{1}{2}x \right) \cdot y + \\ & + C_4 \cdot \dots \end{aligned}$$

3° ESEMPIO



Piastrea quadrata di lato $2L$ appoggiata nei vertici.

C. al. C.

$$(W)_{\substack{x=L \\ y=L}} = 0 \quad (W)_{\substack{x=-L \\ y=L}} = 0$$

$$(W)_{\substack{x=L \\ y=-L}} = 0 \quad (W)_{\substack{x=-L \\ y=-L}} = 0$$

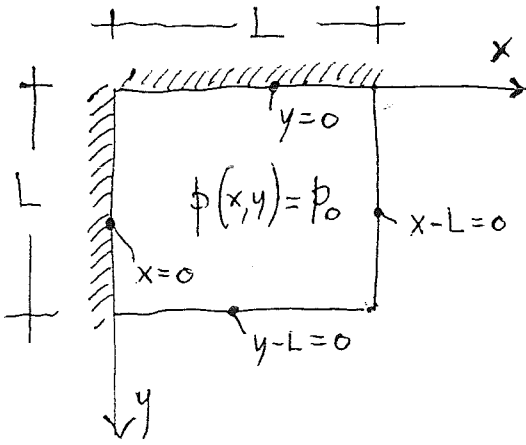
Si assume $W = f(x, y) \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + \dots)$

con

$$f(x, y) = (y - x + 2L)(y + x + 2L)(y - x - 2L)(y + x - 2L)(x^2 + y^2 - 2L^2)$$

ESERCIZIO

METODO DI RITZ



Consideriamo una piastra quadrata, di lato L avente due bordi incastrati e due bordi liberi. Il carico è supportato uniformemente ripartito di intensità p_0 .

c. d. Q. :

$$(W)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

$$(W)_{y=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

Assumiamo :

$$W = x^2 \cdot y^2 \cdot (x-L)^0 \cdot (y-L)^0 \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + \dots)$$

$$W = C_1 \cdot x^2 y^2 + C_2 x^3 y + C_3 x^2 y^3$$

Occorre scrivere il sistema :

$$A_{11} C_1 + A_{12} C_2 + A_{13} C_3 = T_1$$

$$A_{21} C_1 + A_{22} C_2 + A_{23} C_3 = T_2$$

$$A_{31} C_1 + A_{32} C_2 + A_{33} C_3 = T_3$$

con :

$$A_{rs} = \int_A \nabla^2 W_r \cdot \nabla^2 W_s \, dA$$

$$T_r = \frac{1}{B} \int_A p(x,y) \cdot W_r \, dA + \frac{1}{B} \cdot \sum_1^n P_k \cdot W_r(x_k, y_k)$$

$W_1 = x^2 y^2$	$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 2y^2$; $\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 2x^2$	$\nabla^2 W_1 = 2(x^2 + y^2)$
$W_2 = x^3 y^2$	$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = 6xy^2$; $\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = 2x^3$	$\nabla^2 W_2 = 2x(3y^2 + x^2)$
$W_3 = x^2 y^3$	$\frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} = 2y^3$; $\frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2} = 6xy^2$	$\nabla^2 W_3 = 2y(y^2 + 3x^2)$

Ricavo le espressioni dei coefficienti del sistema. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \underline{A_{23}} &= \int_A \left\{ 2x(3y^2 + x^2) \cdot 2y(y^2 + 3x^2) \right\} dA = \int_0^L \int_0^L \left\{ \text{idem} \right\} dx dy = \\ &= 4 \left[3 \int_0^L y^5 dy \int_0^L x dx + 10 \int_0^L y^3 dy \int_0^L x^3 dx + 3 \int_0^L x^5 dx \int_0^L y dy \right] = 7 \cdot L^8 \end{aligned}$$

In modo analogo ricavo il vettore dei termini noti:

$$\begin{aligned} \underline{T_1} &= \frac{1}{B} \int_A p_0 \cdot w_1(x,y) \cdot dA = \frac{1}{B} p_0 \int_0^L x^2 dx \int_0^L y^2 dy = \\ &= \frac{L^4}{9B} [p_0 L^2] \end{aligned}$$

Così procedendo si può ricavare la seguente tabella dei coefficienti e dei termini noti:

$$\text{Posto: } L^2 \cdot p_0 = Q$$

$$A_{11} = \frac{152}{45} L^6$$

$$T_1 = \frac{L^4}{9B} Q$$

$$A_{22} = \frac{32}{7} L^8$$

$$T_2 = \frac{L^5}{12B} Q$$

$$A_{33} = \frac{32}{7} L^8$$

$$T_3 = \frac{L^5}{12B} Q$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{48}{15} L^7$$

$$A_{13} = A_{31} = \frac{48}{15} L^7$$

$$A_{23} = A_{32} = 7 \cdot L^8$$

Tenuto conto delle precedenti posizioni il sistema si

scrive :

$$\begin{cases} \frac{152}{45} C_1 + \frac{48^{16}}{15_5} C_2 L + \frac{48^{16}}{15_5} C_3 L = \frac{1}{9BL^2} Q \\ \frac{48^{16}}{15_5} C_1 + \frac{160^{32}}{35_7} C_2 L + 7 \cdot C_3 L = \frac{1}{12BL^2} Q \\ \frac{48^{16}}{15_5} C_1 + 7 \cdot C_2 L + \frac{160^{32}}{35_7} C_3 L = \frac{1}{12BL^2} Q \end{cases}$$

Risolviams il sistema.

Sottraendo la seconda equazione dalla terza si ottiene :

$$\boxed{C_2 = C_3}$$

Ponendo $C_2 = C_3$ nelle prime due equazioni del sistema e risolvendo si perviene dopo calcoli a :

$$C_3 = -0,00398 \cdot Q \cdot \frac{1}{BL^3}$$

$$C_1 = +0,0404 Q \cdot \frac{1}{BL^2}$$

Essendo $Q = p_0 L^2$ si ha :

$$C_1 = \frac{1}{B} (+0,0404 p_0)$$

$$C_2 = C_3 = \frac{1}{LB} (-0,00398 p_0)$$

E in definitiva l'espressione della w è data da :

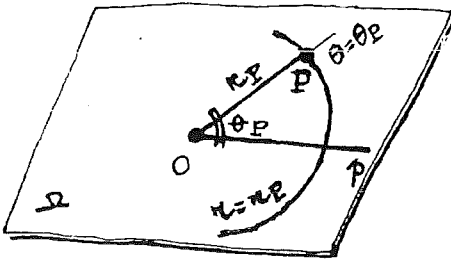
$$W = \frac{XY^2}{B} \cdot 0,0404 \cdot p_0 + \frac{X^2 Y^3 + X^3 Y^2}{BL} (-0,00398 p_0)$$

PIASTRE CIRCOLARI

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO

24/11/03

SISTEMA PIANO DI COORDINATE POLARI



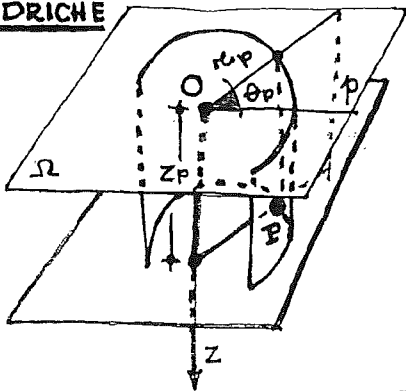
$r =$ raggio
 $\theta =$ anomalia

Si utilizza, anzichè il sistema di riferimento cartesiano ortogonale quello cilindrico.

■ Nel piano orizzontale Ω il sistema di riferimento $O(r, \theta)$, polare, consente di individuare un generico punto P come intersezione della circonferenza di raggio $r = r_P$ con la semiretta per O formante angolo θ_P con il polo.

SISTEMA SPAZIALE DI COORDINATE

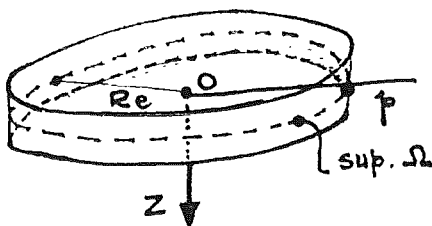
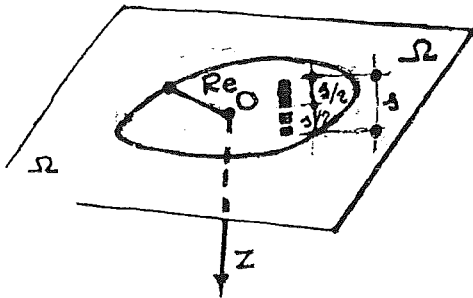
CILINDRICHE



■ Il sistema spaziale di coordinate cilindriche deriva da quello polare, associando ad esso un asse z \perp a Ω passante per O e orientata verso il basso.

Il punto P è individuato dalla intersezione di 3 superfici:

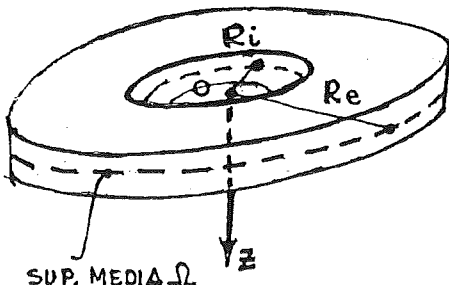
- una superficie cilindrica, coassiale a z , di equazione $r = r_P$;
- un semipiano verticale contenente z e formante angolo θ_P con il polo p , di equazione $\theta = \theta_P$;
- un piano \perp a z (quindi \parallel a Ω) a distanza z_P da O , di equazione $z = z_P$.



PIASTRA A SEMPLICE CONTORNO

DEFINIZIONE DI PIASTRA

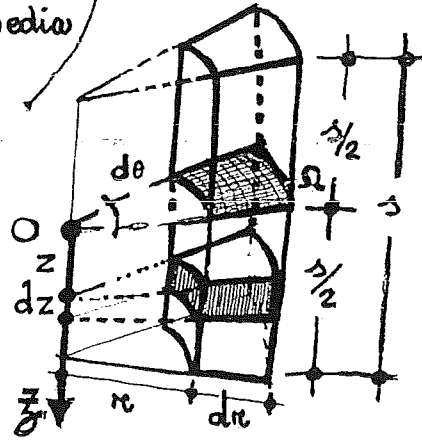
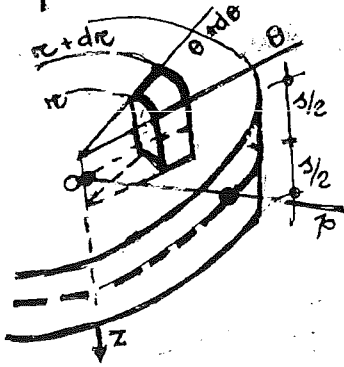
● Consideriamo sul piano orizzontale Ω il cerchio di raggio $r = R_e$. Per ogni punto interno al cerchio di raggio R_e consideriamo un segmento materiale rettilineo, di lunghezza s , ortogonale alla superficie Ω e avente baricentro G su Ω . L'insieme dei suddetti segmenti materiali definisce una piastra a semplice contorno (di raggio R_e).



PIASTRA A DOPPIO CONTORNO

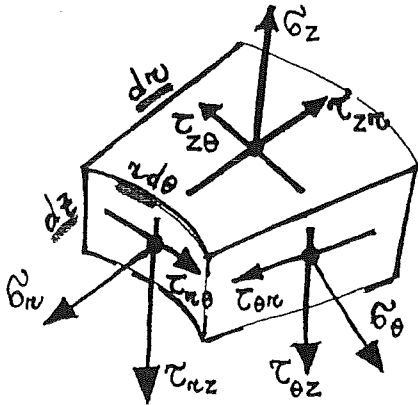
- Evidentemente se si considerano due cerchi di raggio $r = R_i$ e $r = R_e$, e si fa riferimento ai punti interni alla corona circolare che essi delimitano si può definire una piastra a doppio contorno (di raggi R_i interno e R_e esterno).
- Evidentemente: la sup. media della piastra indeformata coincide con il piano Ω e l'origine O del sistema

di riferimento si trova sulla sup. media della piastra indeformata.



IL TENSORE CILINDRICO

La definizione dello stato di sforzo, in termini tensoriali, dipende, nel caso delle piastre circolari, dal sistema di riferimento cilindrico. Questo perché l'elemento di continuo infinitesimo, alle cui superfici laterali gli sforzi sono coordinati, ha "forma" strettamente connessa al sistema di riferimento.

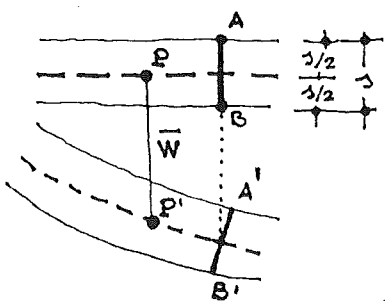


* Isoliamo da una piastra un elemento del secondo ordine, di altezza finita s e lateralmente delimitato: dai raggi θ e $\theta+d\theta$, e dalle superfici cilindriche di raggi r e $(r+dr)$.

Si ottiene un parallelepipedo "mistilineo".

* Considerando i due piani individuati da z e $(z+dz)$ in una un elemento infinitesimo del 3° ordine (tutte e tre le dimensioni sono infinitesime) di dimensioni dr , $r d\theta$ e dz . A tale elemento sono correlati gli sforzi σ e τ , positivi se diretti come in figura.

LE IPOTESI DI KIRCHOFF



Anche nel caso delle piastre circolari valgono le ipotesi di Kirchhoff delle piastre di "spessore sottile" in rapporto a una dimensione caratteristica (il raggio esterno R_e), caricate ortogonalmente alla superficie media ed i cui spostamenti w dei punti della sup. media sono trascurabili nei confronti dello spessore.

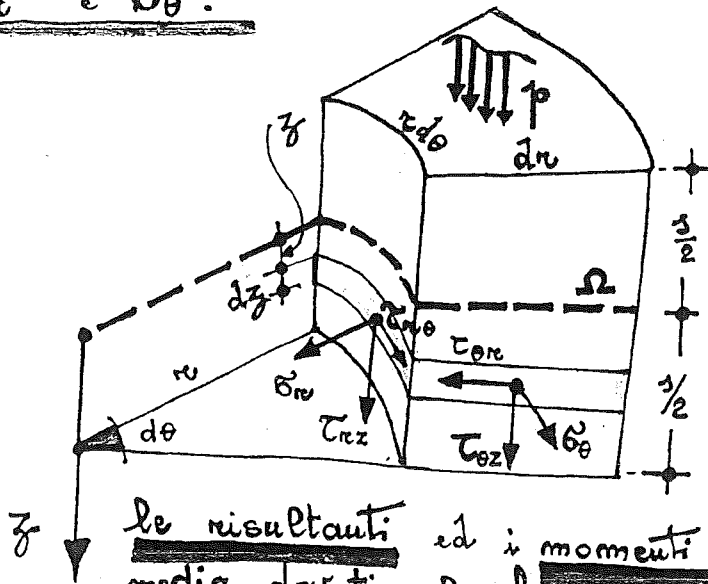
① Ogni segmento materiale rettilineo \perp alla superficie media della piastra nello stato indeformato si conserva rettilineo, \perp alla superficie media e di lunghezza inalterata anche nello stato deformato.

● Questa ipotesi equivale a trascurare l'effetto degli sforzi taglianti sulla deformazione della piastra: ovvero $\gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0$. Implica che lo stato di deformazione deriva esclusivamente da flessione. Inoltre $\epsilon_z = 0$.

Questa ipotesi σ_z , come già detto studiando le piastre rettangolari, equivalente all'ipotesi di Bernoulli che si ammette valida nello studio delle travi e che viene detta "di conservazione delle sezioni piane". Nel caso di piastre si parla di "ipotesi di conservazione delle normali rettilinee".

② punti appartenenti alla superficie media, nel passaggio dallo stato indeformato a quello deformato, subiscono esclusivamente spostamenti ortogonali alla superficie media indeformata.

③ gli sforzi σ_z sono trascurabili nel confronto con gli sforzi σ_r e σ_θ .



COMPONENTI DI AZIONE INTERNA

Consideriamo un elemento di piastra infinitesimo del 2^o ordine, avente altezza h finita e dimensioni in piastra dr ed $r d\theta$ infinite-
sime -

Ci proponiamo di determinare

le risultanti ed i momenti risultanti riferiti alla superficie media dovuti agli sforzi agenti sulle superfici laterali.

Com tali risultanti e momenti risultanti si definiscono le caratteristiche di azione interna (o "componenti di azione interna"). Ovviamente ci si riferisce a risultanti e momenti risultanti per unità di lunghezza.

RISULTANTI

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_r \cdot dz \cdot r d\theta) \cdot \frac{1}{r d\theta}$$

$$N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_\theta \cdot dz \cdot dr) \cdot \frac{1}{dr}$$

$$N_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{r\theta} \cdot dz \cdot r d\theta) \cdot \frac{1}{r d\theta}$$

$$N_{\theta r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{\theta r} \cdot dz \cdot dr) \cdot \frac{1}{dr}$$

$$T_{rz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{rz} \cdot dz \cdot r d\theta) \cdot \frac{1}{r d\theta}$$

$$T_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{\theta z} \cdot dz \cdot dr) \cdot \frac{1}{dr}$$

$$N_r, N_\theta, N_{r\theta}, N_{\theta r}, T_{rz}, T_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}) \cdot dz$$

MOMENTI RISULTANTI

$$M_{rz}, M_{\theta}, M_{r\theta}, M_{\theta r} = \int_{-1/2}^{+1/2} (\sigma_{rz}, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}) z dz$$

$$M_{rz} = \int_{-1/2}^{+1/2} (\sigma_{rz} \cdot dz \cdot r d\theta \cdot z) \cdot \frac{1}{r d\theta}$$

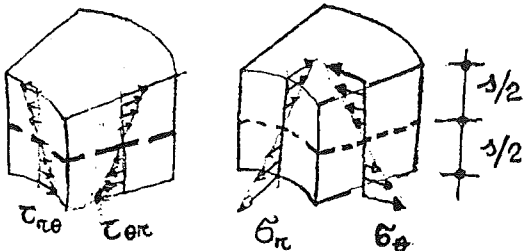
$$M_{\theta} = \int_{-1/2}^{+1/2} (\sigma_{\theta} \cdot dz \cdot dr \cdot z) \cdot \frac{1}{dr}$$

$$M_{r\theta} = \int_{-1/2}^{+1/2} (\tau_{r\theta} \cdot dz \cdot r d\theta \cdot z) \cdot \frac{1}{r d\theta}$$

$$M_{\theta r} = \int_{-1/2}^{+1/2} (\tau_{\theta r} \cdot dz \cdot dr \cdot z) \cdot \frac{1}{dr}$$

26/11/03

Formalmente, come si vede, si possono scrivere 10 componenti di azione interna. Le $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} non forniscono momento rispetto a Ω .



● Tenuto conto delle ipotesi di Kirchhoff sulla deformazione nelle piastre ($\epsilon_z = 0$, $\gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0$) e tenuto conto delle relazioni di Cauchy (che esprimono il legame fra le deformazioni e gli spostamenti) si perviene a dimostrare che le deformazioni ϵ_r , ϵ_{θ} e $\gamma_{r\theta}$ variano linearmente nello spessore. Si deduce (*) che anche σ_r , σ_{θ} e $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ variano linearmente nello spessore (vedi le figure) e si annullano in Ω .

Si conclude che:

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma_r \cdot dz = 0$$

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \tau_{r\theta} \cdot dz = \int_{-1/2}^{+1/2} \tau_{\theta r} \cdot dz = 0 \Rightarrow N_{r\theta} = N_{\theta r} = 0$$

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma_{\theta} \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow N_{\theta} = 0$$

e pertanto 9 componenti di azione interna si riducono a 6 non nulle.

● Considerazioni di natura tensoriale portano a concludere che

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} ; \tau_{rz} = \tau_{zr} ; \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$$

Questa ultima, fra le tre relazioni che stabiliscono la simmetria del tensore degli sforzi anche in coordinate cilindriche, porta a concludere che:

$$M_{r\theta} = M_{\theta r}$$

e quindi le componenti di azione interna indipendenti si riducono a 5:

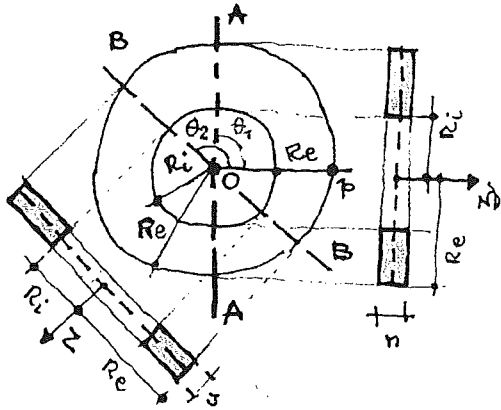
$$\tau_{rz}, \tau_{\theta z}, M_r, M_{\theta}, M_{r\theta}$$

(*) legge di Hooke e 3^a ipotesi di Kirchhoff ($\epsilon_z \ll \epsilon_r, \epsilon_{\theta}$).

CONCETTO DI ASSIAL SIMMETRIA

Una piastra circolare (a semplice o doppio contorno) costituisce una struttura assialsimmetrica.

Infatti tutti gli ∞^1 piani verticali della stella di piani passanti per l'asse z , intersecando la piastra, individuano una "traccia" di essa che è simmetrica rispetto a z e inoltre sempre identica, al variare della orientazione del piano considerato (cioè dell'angolo θ).



* In questa circostanza si può dire che l'asse z è asse di assialsimmetria per la piastra -

* Le caratteristiche geometriche della piastra sono esclusivamente funzione di r (che definisce tramite R_i ed R_e il campo di estensione della struttura) ma sono indipendenti da θ .

Prevedendo quanto sopra introducevamo, per le piastre oggetto del nostro studio, le seguenti ulteriori caratteristiche:

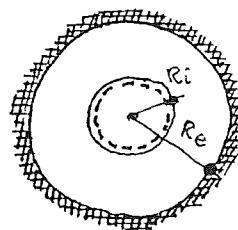
1) i vincoli siano assialsimmetrici:

quanto sopra implica che su un dato contorno (interno o esterno) siano solo ed esclusivamente di un tipo. (solamente incastro, solamente appoggio etc).

2) i carichi siano assialsimmetrici

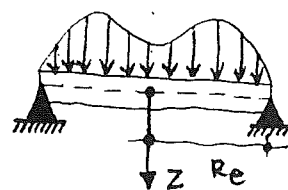
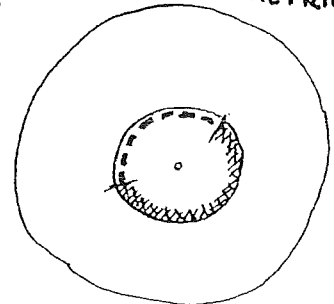
per tanto qualunque piano verticale per l'asse z la "traccia" dei carichi è sempre identica e simmetrica rispetto a z .

VINCOLI ASSIALSIMMETRICI

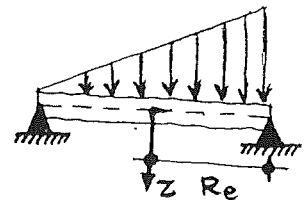


--- appoggio
 // incastro
 ————— bordo libero

VINCOLI NON ASSIALSIMMETRICI



CARICO ASSIALSIMMETRICO



CARICO NON ASSIALSIMMETRICO

In conclusione a quanto sopra detto studieremo solo piastre assialsimmetriche, con vincoli e carichi pure assialsimmetrici, quindi dipendenti da r ma non da θ .

PIASTRA... con caratteristiche geometriche dipendenti da r e non da θ ;

VINCOLI funzione di r ma non di θ ;

carichi funzione di r ma non di $\theta \Rightarrow p = p(r)$

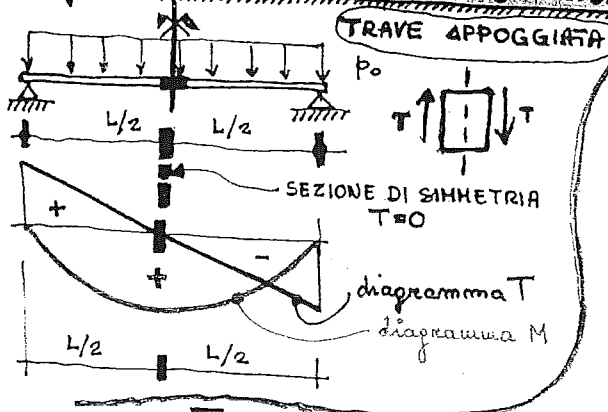
In condizioni di assialsimmetria della piastra, dei vincoli e del carico anche lo stato di deformazione e lo stato di sollecitazione devono essere assialsimmetrici, cioè funzioni di r e non di θ .

IL PRINCIPIO DI SIMMETRIA

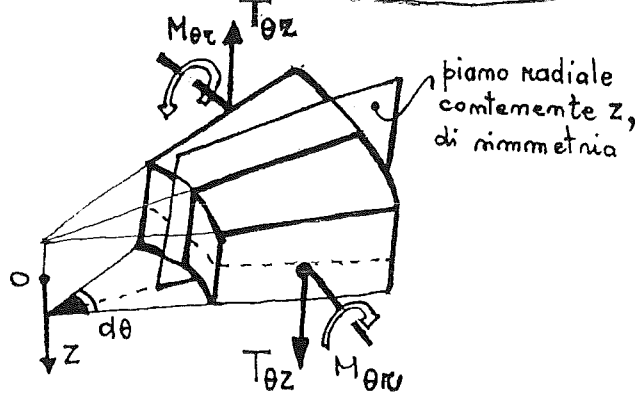
Le caratteristiche di azione interna possono suddividersi in due gruppi:

SIMMETRICHE come: $M \begin{matrix} \leftarrow \oplus \rightarrow \end{matrix}$ $N \leftarrow \oplus \rightarrow$
EMISIMMETRICHE come: $T \begin{matrix} \uparrow \oplus \downarrow \end{matrix}$ $M_t \begin{matrix} \leftarrow \oplus \rightarrow \end{matrix}$

"Nelle sezioni di simmetria (per struttura, vincoli e carichi) le grandezze emisimmetriche devono annullarsi."



Questo principio può essere esteso al caso bidimensionale delle piastre circolari dove, anziché la sezione di simmetria, si consideri il piano di simmetria. Infatti ogni piastra forata per l'asse z è di simmetria, date le condizioni in cui si trova forti precedentemente -



Le grandezze emisimmetriche agenti sulle facce di un elemento del 2° ordine che si trovano da parti opposte rispetto a un piano di simmetria devono essere nulle -

Allora in condizioni di assialsimmetria:

$$T_{\theta z} = M_{\theta r} = 0$$

IN CONCLUSIONE:

Nel caso della assialsimmetria le componenti di azione interna nulle si riducono a tre:

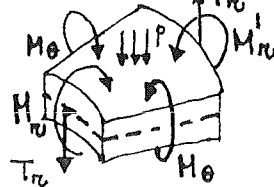
Essi sono inoltre funzioni esclusive di r :

$$M_r = M_r(r)$$

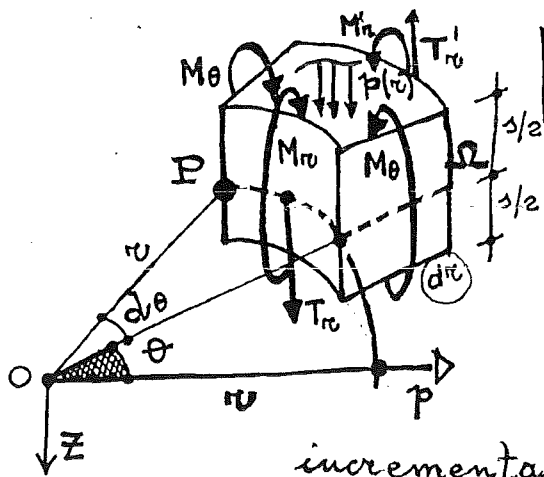
$$M_\theta = M_\theta(r)$$

$$T_r = T_r(r)$$

ovvero $M_r, M_\theta, T_r (= T_{rz})$.



PIASTRE CIRCOLARI ASSIALSIMMETRICHE

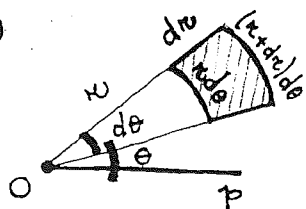


Abbiamo visto che in condizioni di assialsimmetria le caratteristiche di azione interna delle piastre circolari si riducono a tre e che queste sono esclusive funzioni di r.

Possiamo pertanto utilizzare, per definire le suddette caratteristiche incrementate T'_r , M'_r ovvero le derivate

ordinarie anziché quelle parziali:

$$\underline{T'_r} = \left(T_r + \frac{dT_r}{dr} dr \right); \quad \underline{M'_r} = \left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right)$$



l'area del settore di corona circolare infinitesimo del 2° ordine su cui grava il carico $p(r)$ vale:

$$\underline{dS} = \pi \cdot (r+dr)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi r^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{d\theta}{2} [r^2 + 2rdr + dr^2 - r^2] = r \cdot d\theta \cdot dr$$

dove si trascura evidentemente dr^2 rispetto a $2rdr$ in quanto infinitesimo di ordine superiore.

● 3 gradi di libertà dell'elemento sono 6: tre alla traslazione e tre alla rotazione. 4 condizioni di equilibrio sono verificate (traslazione in direzione r e in direzione θ , rotazione intorno a un asse in direzione r e intorno all'asse z). Devono quindi essere imposte esclusivamente le due rimanenti condizioni di equilibrio.

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE IN DIREZIONE DELL'ASSE Z

$$T_r \cdot r d\theta - T'_r \cdot (r+dr) \cdot d\theta + p \cdot r d\theta dr = 0$$

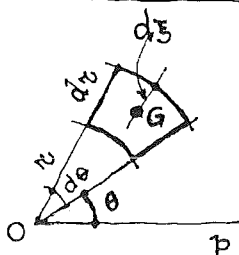
$$T_r \cdot r d\theta - \left(T_r + \frac{dT_r}{dr} dr \right) \cdot (r+dr) \cdot d\theta + p \cdot r d\theta dr = 0$$

$$T_r \cdot r d\theta - T_r \cdot r d\theta - T_r \cdot dr \cdot d\theta - \frac{dT_r}{dr} \cdot dr \cdot r \cdot d\theta - \frac{dT_r}{dr} \cdot dr \cdot dr \cdot d\theta + p \cdot r d\theta dr = 0$$

$$\left(-T_r - r \cdot \frac{dT_r}{dr} + p \cdot r \right) d\theta dr = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{T_r + r \frac{dT_r}{dr} = p \cdot r}$$

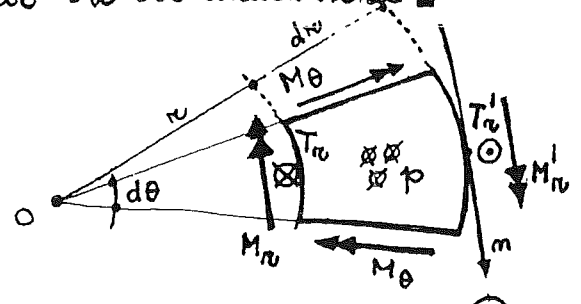
Baricentro dell'elemento



EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE INTORNO A UN ASSE \perp AL PIANO

Consideriamo il simbolismo vettoriale nella rappresentazione dei momenti flettenti - In questo modo possiamo ragionare sul piano ausiliario dove dover porre in conto le tre dimensioni.

CONVENZIONE



$$-M_{\theta} \cdot r d\theta + M'_{\theta} \cdot (r+dr) \cdot d\theta + T_{\theta} \cdot r d\theta \cdot dr - 2M_{\theta} \cdot dr \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + p \cdot r d\theta dr \cdot d\xi = 0$$

essendo $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ si ottiene:

$$-M_{\theta} \cdot r d\theta + \left(M_{\theta} + \frac{dM_{\theta}}{dr} dr \right) (r+dr) \cdot d\theta + T_{\theta} \cdot r d\theta dr - p M_{\theta} dr \cdot \frac{d\theta}{2} + p \cdot r d\theta dr \cdot d\xi = 0$$

$$-M_{\theta} \cdot r d\theta + M_{\theta} \cdot r d\theta + M_{\theta} \cdot dr d\theta + \frac{dM_{\theta}}{dr} dr \cdot r d\theta + \frac{dM_{\theta}}{dr} dr \cdot dr d\theta + T_{\theta} \cdot r d\theta dr - M_{\theta} \cdot dr d\theta + p \cdot r d\theta dr \cdot d\xi = 0$$

$$dr d\theta \left(M_{\theta} + r \cdot \frac{dM_{\theta}}{dr} + r \cdot T_{\theta} - M_{\theta} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{\theta} - M_{\theta} + r \cdot \frac{dM_{\theta}}{dr} + r \cdot T_{\theta} = 0}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO

Le precedenti equazioni di equilibrio costituiscono un sistema di 2 equazioni in 3 incognite. Si ha pertanto 1 grado di iperstaticità interna.

Le due equazioni precedenti possono facilmente essere ricondotte ad una unica equazione eliminando T_{θ} .

In fatti la seconda:

$$(M_{\theta} - M_{\theta}) + \left(r \cdot \frac{dM_{\theta}}{dr} \right) + r \cdot T_{\theta} = 0$$

può derivarsi rispetto a r :

$$\frac{d}{dr} (M_{\theta} - M_{\theta}) + \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dM_{\theta}}{dr} \right) + r \cdot \frac{dT_{\theta}}{dr} + T_{\theta} = 0$$

e tenuto conto della 1a equazione infine risulta:

$$\boxed{\frac{d}{dr} (M_{\theta} - M_{\theta}) + \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dM_{\theta}}{dr} \right) + p \cdot r = 0}$$

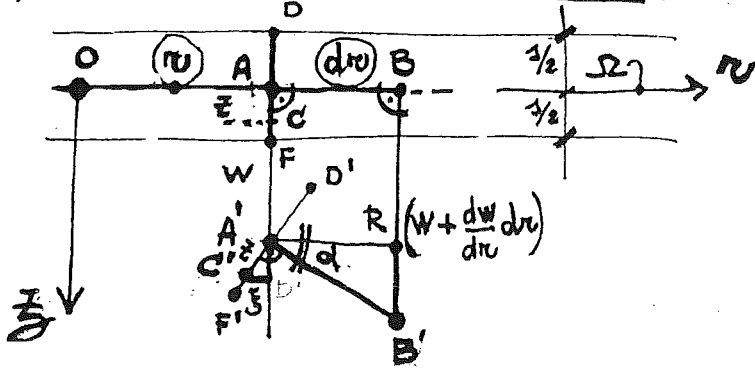
equazione indefinita di equilibrio per fiamme circolari assialsimmetriche

Abbiamo visto come il problema delle piastre circolari caricate anial simmetricamente non sia risolvibile tramite le sole equazioni di equilibrio. Bisogna pertanto far ricorso a ulteriori relazioni che pongono in conto la congruenza. Esse si dicono:

RELAZIONI DI ELASTICITA' 27/11/03

Vogliamo determinare: $M_r = M_r(w)$; $M_\theta = M_\theta(w)$

A- CAMPO DI SPOSTAMENTI



$$T_r + r \cdot \frac{dT_r}{dr} = p \cdot r$$

$$M_r - M_\theta + r \frac{dM_r}{dr} + r T_r = 0$$

$$\frac{d}{dr} (M_r - M_\theta + r \frac{dM_r}{dr}) + p r = 0$$

$$\frac{r}{2} = \overline{AF} = \overline{A'F'}$$

$$z = \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

- ① i punti appartenenti alla superficie media subiscono (2^a ipotesi di Kirchhoff) solo spostamenti ortogonali alla superficie media indeformata Ω . ($AA' \perp a \Omega$; $BB' \perp a \Omega$): gli spostamenti sono piccolissimi ($\ll z$).
- ② segmenti materiali rettilinei, \perp alla superficie media Ω nello stato indeformato, sono \perp alla superficie media anche nello stato deformato; (1^a ipotesi) $\rightarrow (D'F' \perp A'B')$
- ③ per la 1^a ipotesi di Kirchhoff è poi $\epsilon_z = 0$.

I segmenti materiali \perp alla sup. media non subiscono deformazioni aniali e punti a distanza z da Ω nello stato indeformato sono a distanza z dalla sup. media anche nella situazione deformata ($AC = A'C' = z$).

Risulta: $\tan \alpha = \frac{(w + \frac{dw}{dr} dr) - w}{dr} = \frac{dw}{dr}$; $\xi = -z \cdot \text{sen} \alpha$

La piccolezza degli spostamenti w nelle strutture reali, che ordinariamente si realizzano, è verificata. Tali spostamenti sono misurabili (durante i collaudi) e sono pertanto grandezze finite nella realtà, per quanto piccolissime.

Tuttavia a motivo della loro piccolezza vengono assimilati a grandezze infinitesime (si parla di "infinitesimi pratici") accettando le conseguenze che ne derivano sul piano matematico. In particolare gli spostamenti sono infinitesimi e tali risultano anche gli angoli di rotazione α . Allora:

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{1}{3} \alpha^3 + \dots \approx \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{dw}{dr}$$

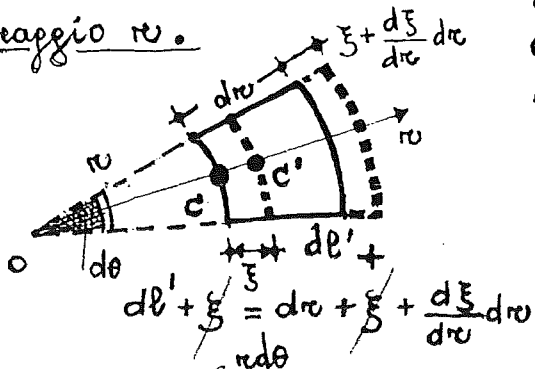
$$\text{sen} \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots \approx \alpha \Rightarrow \xi = -z \text{sen} \alpha \approx -z \cdot \alpha = -z \cdot \frac{dw}{dr}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \dots \approx 1 \Rightarrow A'R = A'B' \cdot \cos \alpha \approx A'B' \Rightarrow A'B' = AB = dr$$

si deduce che i punti della superficie media non variano le distanze relative nel passaggio dallo stato indeformato a quello deformato. Di conseguenza nella sup. media non possono verificarsi deformazioni (né estensionali ϵ , né scorrimenti angolari γ).

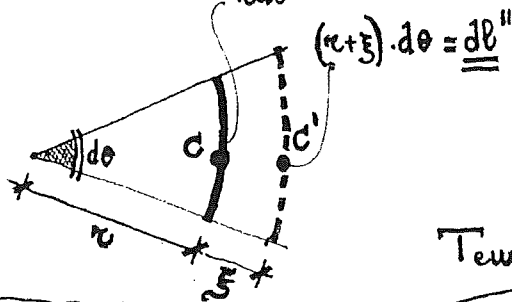
B - RELAZIONI SPOSTAMENTI-DEFORMAZIONI

● Vediamo adesso di correlare gli spostamenti del punto generico C con le componenti di dilatazione ϵ_r e ϵ_θ , delle fibre di materiale a quota z , che si trovano nell'intorno di C e sono dirette come il raggio e come la tangente al cerchio di raggio r .



Considerando positive le trazioni e gli allungamenti si ha:

$$\epsilon_r = \frac{dr' - dr}{dr} = \frac{(dr + \frac{d\xi}{dr} dr) - dr}{dr} = \frac{d\xi}{dr}$$



$$\epsilon_\theta = \frac{dr'' - r \cdot d\theta}{r \cdot d\theta} = \frac{(r + \xi) \cdot d\theta - r \cdot d\theta}{r \cdot d\theta} = \frac{\xi}{r}$$

Tenuto conto che $\xi = -z \cdot \frac{dw}{dr}$ si può scrivere:

$$\epsilon_r = -z \cdot \frac{d^2 w}{dr^2}$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}$$

C - RELAZIONI DI ELASTICITA'

● Dalla applicazione della legge di Hooke si ottiene ($\epsilon_z \ll \epsilon_r, \epsilon_\theta$):

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_\theta) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \cdot \epsilon_r) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

relazioni di elasticità

$$M_r = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \sigma_r \cdot z \cdot dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} = -\frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \sigma_\theta \cdot z \cdot dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} = -\frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

Si pone: $B = \frac{E \cdot s^3}{12(1-\nu^2)}$ (rigidezza flessionale della piastra) e si ha:

$$M_r = -B \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$M_\theta = -B \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

RELAZIONI DI ELASTICITA'

• Alla precedente espressione di M_r e M_θ in funzione di w conviene associare immediatamente quella del taglio T_r .

Riferendoci alla 2a equazione indefinita di equilibrio si ha:

$$M_r - M_\theta + r \cdot \frac{dM_r}{dr} + r \cdot T_r = 0$$

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{r} \left(M_\theta - M_r - r \cdot \frac{dM_r}{dr} \right) = \frac{1}{r} \left[-\frac{B}{r} \frac{dw}{dr} - B \cdot \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + B \frac{d^2 w}{dr^2} + B \cdot \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} + \right. \\ &\quad \left. + B \cdot r \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \nu \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \right) \right] = \\ &= -\frac{B}{r^2} \frac{dw}{dr} - \frac{B \nu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{B}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{B \nu}{r^2} \frac{dw}{dr} + B \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{B \nu}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{B \nu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} = \\ &= B \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{B}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{B}{r^2} \frac{dw}{dr} \Rightarrow T_r = B \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned}$$

L'EQUAZIONE INDEFINITA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Riprendiamo in considerazione l'equazione precedentemente trovata che sintetizzava le due equazioni di equilibrio:

$$\frac{d}{dr} \left(M_r - M_\theta + r \cdot \frac{dM_r}{dr} \right) + p \cdot r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(M_\theta - M_r - r \cdot \frac{dM_r}{dr} \right) = p \cdot r$$

Sostituendo le espressioni di M_r e M_θ in funzione di w , ricavate precedentemente, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(-\frac{B}{r} \frac{dw}{dr} - B \cdot \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + B \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{B \nu}{r} \frac{dw}{dr} + r \cdot B \frac{d^3 w}{dr^3} - r \cdot B \nu \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + r \cdot B \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) &= \\ &= p \cdot r \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p \cdot r}{B}$$

← equazione indefinita di equilibrio elastico per piastre circolari assai simmetriche

Nota l'equazione indefinita di equilibrio elastico e stabilità le condizioni al contorno il problema del calcolo delle piastre circolari soggette a carichi anisimmetrici e munite di vincoli anisimmetrici è formalmente risolto.

L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ELASTICO

L'equazione differenziale del 4° ordine può essere integrata facilmente, e pertanto è possibile ottenere la soluzione "in forma chiusa" ricavando l'espressione analitica della funzione $w(r)$.

① Si ha, operando una prima integrazione:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p \cdot r}{B}$$

$$r \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1$$

② Conviene prima di integrare ancora dividere tutti i termini per r :

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + \frac{C_1}{r}$$

otteniamo a primo membro un differenziale esatto:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + \frac{C_1}{r}$$

integrando ancora si ottiene:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1 \cdot \ln r + C_2$$

③ Conviene ora, prima di integrare ulteriormente, moltiplicare tutti i termini per r :

$$r \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} = r \cdot \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1 \cdot r \ln r + C_2 \cdot r$$

otteniamo a primo membro un differenziale esatto:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) = r \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1 \cdot r \ln r + C_2 \cdot r$$

integrando si ottiene:

$$r \cdot \frac{dw}{dr} = \int r \cdot dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1 \cdot \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + C_2 \cdot \frac{r^2}{2} + C_3$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

④ Dividendo tutti i termini per r :

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1 \left(\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) + C_2 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r}$$

Integrando ulteriormente si ottiene:

$$W = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr + C_1 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{8} - \frac{r^2}{8} \right] + C_2 \cdot \frac{r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4$$

Si pone:

$$W_0 = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr$$

dove W_0 rappresenta l'aliquota di W che è funzione del carico ripartito $p = p(r)$. Evidentemente se $p = 0 \Rightarrow W_0 = 0$.

Inoltre:

$$W_1 = C_1 \cdot \frac{r^2}{4} \ln r + (C_2 - C_1) \cdot \frac{r^2}{4} + C_3 \cdot \ln r + C_4$$

si pone quindi: $\frac{C_1}{4} = A_1$; $\frac{C_2 - C_1}{4} = A_2$; $C_3 = A_3$; $C_4 = A_4$

e si ottiene:

$$W_1 = A_1 \cdot r^2 \ln r + A_2 \cdot r^2 + A_3 \cdot \ln r + A_4$$

dove W_1 rappresenta l'aliquota di W che è funzione delle condizioni al contorno, dalle quali dipendono i valori delle costanti A_1, A_2, A_3 e A_4 .

● In conclusione: l'integrale generale dell'equazione indefinita di equilibrio per le piastre circolari radialmente simmetriche si pone nella forma:

$$W = W_1 + W_0$$

L'espressione analitica che stabilisce la dipendenza da r per W_1 e W_0 , unitamente al significato fisico delle due componenti di W , sono stati forniti più su.

Sul piano strettamente matematico:

W_1 : è l'integrale generale della equazione omogenea associata:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) = 0$$

W_0 : è un integrale particolare della equazione completa:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) = \frac{p \cdot r}{B}$$

PIASTRE A DOPPIO O SEMPLICE CONTORNO

- Nella risoluzione di una piastra, a semplice o doppio contorno, il calcolo del termine $W_0(r)$ si effettua agevolmente poiché esso non dipende dal tipo di piastra e neppure dai vincoli sui bordi, ma solo ed esclusivamente dalla espressione di $p = p(r)$ che definisce il carico ripartito.
- Per quanto riguarda invece il termine $W_1(r)$ occorre fare qualche precisazione.

$$\text{Il termine } W_1(r) = A_1 r^2 p_{m r} + A_2 r^2 + A_3 p_{m r} + A_4$$

è definito come si osserva a meno di 4 costanti arbitrarie A_1, A_2, A_3, A_4 .

Queste, come detto, si determinano imponendo le condizioni al contorno - si hanno due circostanze da esaminare; in corrispondenza ai due tipi di piastra:

a) piastre a doppio contorno: in questo caso si hanno 2 bordi e, per ciascun bordo, due 2 condizioni, con un totale di 4 relazioni indipendenti che consentono di determinare tutte e 4 le costanti arbitrarie.

b) piastre a semplice contorno: in questo caso si ha esclusivamente un bordo esterno, che consente la scrittura di 2 sole condizioni indipendenti. Si dimostra però che anche le costanti arbitrarie da determinare si riducono a 2 sole, (cioè A_2 e A_4), dove si pone $A_1 = A_3 = 0$ a priori.

* Si deve infatti osservare che la piastra a semplice contorno contiene il punto $r = 0$, e risulta considerando il termine $p_{m r}$ che moltiplica A_3 :

$$\left[p_{m r} \right]_{r \rightarrow 0} \longrightarrow -\infty$$

ovvero $W_1(r) = -\infty$, cioè gli spostamenti al centro sono infinitamente grandi ($W_1(r) = -\infty \Rightarrow W(r)$ infinitam. grande). La conclusione matematica non soddisfa l'esigenza di finitezza degli spostamenti W in tutti i punti della piastra. Per tale motivo poniamo $A_3 = 0$, modificando $W_1(r)$ che diventa:

$W_1(r) = A_1 r^2 p_{m r} + A_2 r^2 + A_4$. La $W_1(r)$ modificata conduce a spostamenti W e ai valori della derivata prima finiti. Vediamo la derivata seconda:

$$\frac{d^2 W_1}{dr^2} = A_1 \cdot 2 p_{m r} + A_1 \cdot 3 + 2 A_2$$

Considerando il termine $p_{m r}$ che moltiplica $2A_1$ si ha:

$$\left[p_{m r} \right]_{r \rightarrow 0} \longrightarrow -\infty$$

e quindi $\left(\frac{d^2 W_1}{dr^2} \right)_{r=0} = -\infty$, che implica anche $\left(\frac{dW}{dr^2} \right)_{r=0} = -\infty$: ovvero le azioni flettenti ed il taglio (e gli sforzi σ e τ conseguenti) sono ∞ .

Una simile circostanza risulta compatibile esclusivamente con una condizione di carico che preveda una forza P concentrata al centro della piastra.

Se però ammettiamo che non esista una simile forza

si conclude che per una piastra a semplice contorno (che contiene il centro, di coordinata $r=0$) la soluzione modificata della $W_1(r)$ conduce a risultati non accettabili.

Il requisito della finitezza di $\frac{d^2 w}{dr^2}$ al centro della piastra impone quindi di sopprimere nella scrittura di $W_1(r)$ anche il termine $A_1 \cdot r^2 \ln r$ (ponendo $A_1=0$) e di assumere, qualora la piastra contenga il

punto centrale $r=0$:

$$W_1(r) = A_2 \cdot r^2 + A_4 \cdot$$

si hanno quindi 2 costanti che si determinano con 2 condizioni al contorno nel bordo esterno.

Qualora sia presente un carico concentrato al centro (anche dipendente da una condizione di vincolo puntiforme di appoggio) si deve assumere:

$$W_1 = A_1 \cdot r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_4$$

LE CONDIZIONI AL CONTORNO

Inizialmente consideriamo piastre dotate di vincoli rigidi (che non subiscono cedimenti) e bordi liberi o appoggiati scarichi (privi di coppie distribuite radiali o carichi lineari unif. distribuiti).

CONTORNO INCASTRATO

Se indichiamo con R_c il raggio del contorno (interno o esterno) deve porsi:

$$[w(r)]_{r=R_c} = 0 ; \quad \left[\frac{dw}{dr} \right]_{r=R_c} = 0$$



CONTORNO APPOGGIATO

Indicando ancora con R_c il raggio del contorno (interno o esterno) si deve porre:

$$[w(r)]_{r=R_c} = 0 ; \quad [M_r]_{r=R_c} = \left[-B \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right]_{r=R_c} = 0$$

tangente (radiale) alla superficie elastica deformata: orizzontale.

CONTORNO LIBERO

Indicando sempre con R_c il raggio del contorno (interno o esterno) e considerando il contorno scarico (privo di carichi esterni) si deve porre:

$$[M_r]_{r=R_c} = \left[-B \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right]_{r=R_c} = 0$$

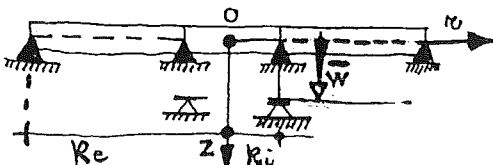
$$[T_r]_{r=R_c} = \left[B \left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \right]_{r=R_c} = 0$$

I CEDIMENTI DI VINCOLO

Le condizioni cinematiche al contorno (le due condizioni del bordo incastrato) e la prima condizione del bordo appoggiato devono tenere conto, qualora esistano, di eventuali cedimenti dei vincoli.

TRASLAZIONI VERTICALI

qualora il vincolo (incastrato opp. appoggio) subisca uno spostamento verticale \bar{w} si deve porre:



$$[w(r)]_{r=R_i} = \bar{w}$$

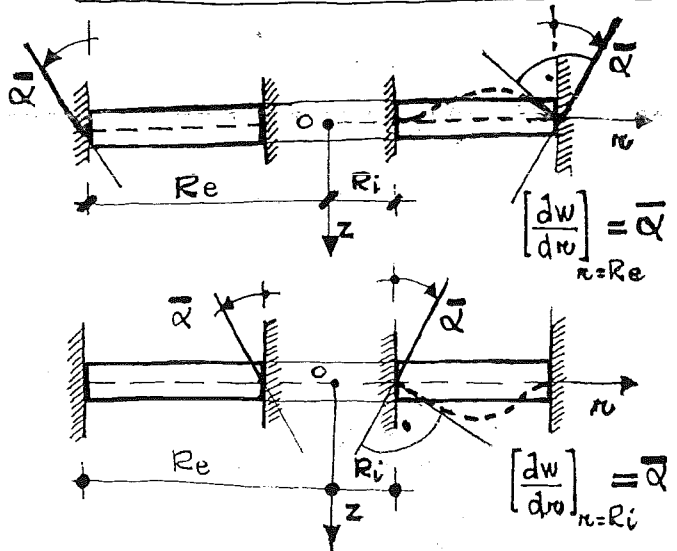
$$[M_r]_{r=R_i} = 0$$

$$[w(r)]_{r=R_c} = \pm \bar{w}$$

dove: \oplus se lo spostamento \bar{w} del vincolo è diretto nel verso dell'asse z (in basso);

\ominus se lo spostamento \bar{w} del vincolo è diretto in verso opposto a quello dell'asse z (in alto).

ROTAZIONI DEI BORDI INCASTRATI



qualora il bordo incastrato di raggio R_e subisca una rotazione angolare di valore $\bar{\alpha}$ deve porsi,

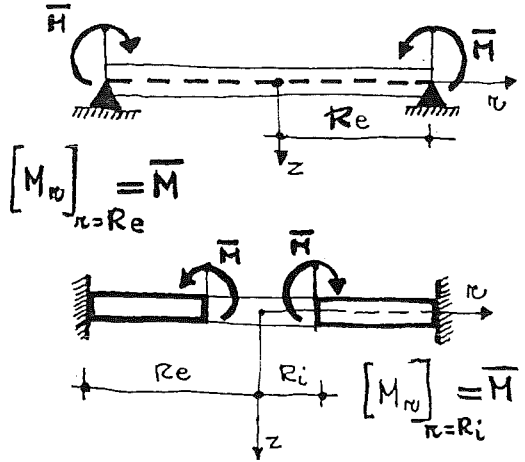
$$\left[\frac{dw}{dv} \right]_{v=R_e} = \pm \bar{\alpha}$$

dove: \oplus se la rotazione ha il verso come quelli indicati in figura;

\ominus in casi opposti a quelli rappresentati in figura.

LE SOLLECITAZIONI ESTERNE SUI BORDI

zionaie per il contorno appoggiato e ambidue le condizioni per il bordo libero da vincoli) devono tenere conto, qualora esistano, di eventuali azioni esterne sui bordi. Queste azioni possono essere sia momenti radiali \bar{M} (sul bordo appoggiato o sul bordo libero) sia carichi \bar{q} , distribuiti sulla linea del contorno libero, di intensità uniforme e -



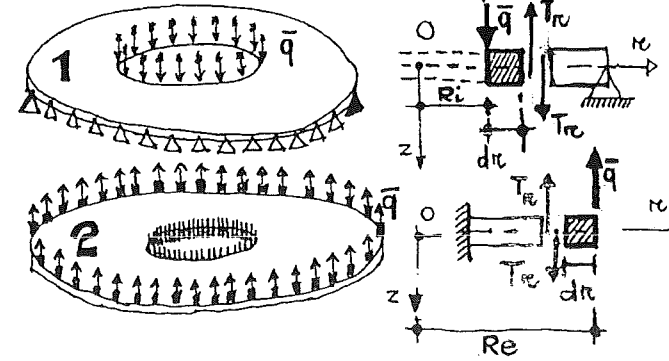
I MOMENTI SUL BORDO APPOGGIATO O LIBERO

qualora sul bordo della piastra di raggio $v=R_e$ sia applicato un sistema radiale di momenti uniformemente distribuito di intensità \bar{M} la seconda condizione al contorno per il bordo appoggiato e la prima per il bordo libero si scrivono:

$$[M_v]_{v=R_e} = \pm \bar{M}$$

CARICHI LINEARI SUL CONTERNO LIBERO

Qualora sul contorno libero di una piastra agisca un carico lineare di intensità \bar{q} per unità di lunghezza la seconda condizione si modifica nella

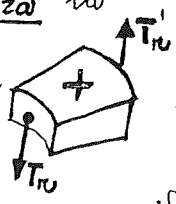


seguente equazione di equilibrio globale alla traslazione verticale per gli anelli tratteggiati:

$$[T_r]_{v=R_e} = \bar{q}$$

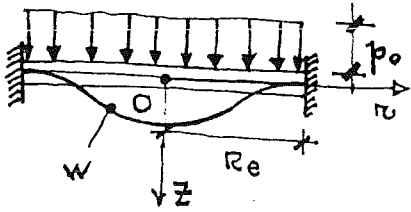
Infatti l'azione esterna \bar{q} deve essere equilibrata dal taglio T_r .

Invece: $[T_r]_{v=R_e} = -\bar{q}$ se \bar{q} ha verso opposto rispetto a quelli in figura.



ESEMPIO DI APPLICAZIONE

1



Piastre a semplice contorno, incastrate e soggetta a carico uniformemente distribuito di intensità $p = p_0$.

L'integrale generale è fornito da:

$$W(r) = W_0(r) + W_1(r) \quad \text{dove:}$$

- $W_0(r) = \int \frac{1}{r} dr \int r dr \int \frac{1}{r} dr \int \frac{p \cdot r}{B} dr \dots$ (con $p = p_0 = \text{cost}$)

- $W_1(r) = A_2 \cdot r^2 + A_4 \dots$ (poiché la piastra contiene il punto $r=0$ e non esiste carico concentrato)

① Calcolo di $W_0(r)$. Essendo il termine p_0 , che definisce la condizione di carico, costante (indipendente da r) può essere portato fuori dal segno di integrale; analogamente per B :

$$W_0(r) = \frac{p_0}{B} \int \frac{1}{r} dr \int r dr \int \frac{1}{r} dr \left(\frac{r^2}{2} \right) = \frac{p_0}{2B} \int \frac{1}{r} dr \int r dr \left(\frac{r^2}{2} \right) = \frac{p_0}{4B} \int \frac{1}{r} dr \left(\frac{r^4}{4} \right) = \frac{p_0}{16B} \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{p_0 \cdot r^4}{64 \cdot B}$$

② Calcolo delle costanti A_2 e A_4 . L'integrale generale si scrive:

$$W(r) = \frac{p_0 r^4}{64B} + A_2 \cdot r^2 + A_4$$

e si ottiene: $\frac{dw}{dr} = \frac{p_0 r^3}{16B} + 2A_2 r$

Le condizioni al contorno si scrivono per il bordo incastrato:

$$[W(r)]_{r=R_e} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{dw}{dr} \right]_{r=R_e} = 0$$

e si deduce il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{p_0 R_e^4}{64B} + A_2 \cdot R_e^2 + A_4 = 0 \\ \frac{p_0 R_e^3}{16B} + 2A_2 R_e = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A_2 = -\frac{p_0 R_e^3}{16B} \cdot \frac{1}{2R_e} = -\frac{p_0 R_e^2}{32 \cdot B}$$

e sostituendo nella 1^a equazione: $A_4 = \frac{p_0 R_e^2}{32B} \cdot R_e^2 - \frac{p_0 R_e^4}{64B} = \frac{p_0 R_e^4}{64B}$

③ In definitiva si ottiene l'espressione della $W(r)$:

$$W(r) = \frac{p_0 r^4}{64B} - \frac{p_0 R_e^2}{32B} \cdot r^2 + \frac{p_0 R_e^4}{64B}$$

$$W(r) = \frac{p_0}{64B} (R_e^2 - r^2)^2 \quad \text{parabola di 4° grado}$$

Risulta evidente che il massimo spostamento si ha nel centro ($r=0$). Si ottiene

$$W_{\max} = (W)_{r=0} = \frac{p_0 R_e^4}{64 B}$$

④ Calcolo delle azioni interne.

$$M_r = -B \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right)$$

$$M_\theta = -B \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \nu \frac{d^2 W}{dr^2} \right)$$

$$T_r = B \left(\frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right)$$

essendo: $\frac{dW}{dr} = \frac{p_0}{64 B} \cdot 2(R_e^2 - r^2)(-2r) =$

$$= -\frac{p_0}{16 B} \cdot r(R_e^2 - r^2)$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} = -\frac{p_0}{16 B} [R_e^2 - r^2 + r(-2r)] =$$

$$= -\frac{p_0}{16 B} (R_e^2 - 3r^2)$$

$$\frac{d^3 W}{dr^3} = -\frac{p_0}{16 B} \cdot (-6r) = \frac{3}{8} \frac{p_0 r}{B}$$

Si ottengono in definitiva le azioni interne:

$$M_r = -B \left[-\frac{p_0}{16 B} (R_e^2 - 3r^2) - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{p_0}{16 B} \cdot r (R_e^2 - r^2) \right] = \frac{p_0}{16} [R_e^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)]$$

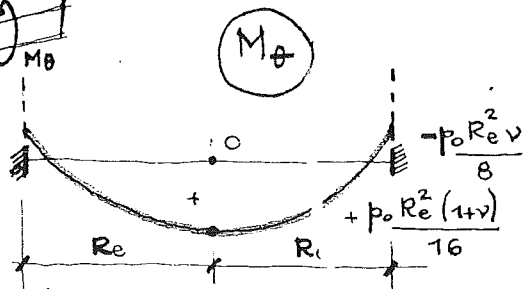
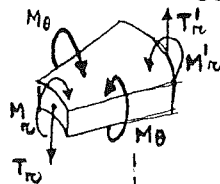
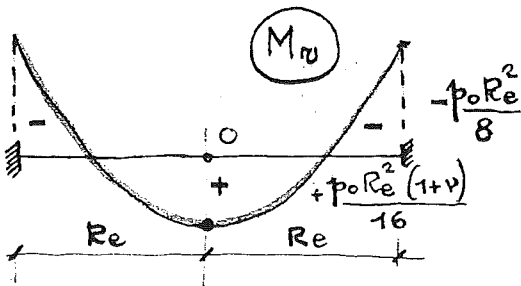
$$M_\theta = -B \left[\frac{1}{r} \left(-\frac{p_0}{16 B} (R_e^2 - r^2) \right) + \nu \left(-\frac{p_0}{16 B} (R_e^2 - 3r^2) \right) \right] = \frac{p_0}{16} [R_e^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$$

$$T_r = B \left[\frac{3}{8} \frac{p_0 r}{B} - \frac{p_0}{16 B} \cdot \frac{1}{r} (R_e^2 - 3r^2) + \frac{p_0}{16 B} \cdot \frac{r}{r^2} (R_e^2 - r^2) \right] =$$

$$= \left[\frac{3}{8} p_0 r - \frac{p_0}{16} \frac{R_e^2}{r} + \frac{p_0}{16} \frac{1}{r} \cdot 3r^2 + \frac{p_0}{16} \frac{1}{r} \cdot R_e^2 - \frac{p_0}{16} \frac{1}{r} \cdot r^2 \right] =$$

$$= \frac{p_0 r}{2}$$

⑤ Si ricavano i diagrammi delle azioni interne M_r , M_θ e T_r in base ai quali si effettua il dimensionamento delle armature e la verifica di resistenza.



⑥ Calcolo degli sforzi. Ricordando le espressioni di σ_r e σ_θ dedotte durante la determinazione delle "relazioni di elasticità" si ha:

$$\sigma_r = -\frac{E Z}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right); \quad \sigma_\theta = -\frac{E Z}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \nu \frac{d^2 W}{dr^2} \right)$$

I valori degli sforzi possono calcolarsi anche a partire da quelli dei momenti potendosi dimostrare valide le applicazioni della formula di Navier
 Si ha a partire dall'espressione di σ_x :

$$\sigma_x = \frac{E \cdot \delta^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{12}{\delta^3} \cdot \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \nu \frac{dw}{dx} \right)$$

$$\sigma = + \frac{M_x \cdot z}{\frac{\delta^3}{12}} \quad \leftarrow \text{Navier}$$

Analogamente:

$$\sigma_\theta = \frac{M_\theta \cdot z}{\frac{\delta^3}{12}}$$

formula di Navier

E' evidente che nel calcolo di σ_x la superficie (cilindrica) cui gli sforzi sono applicati si considera piana.

Sia i momenti M_x e M_θ , sia gli sforzi σ_x e σ_θ sono "principal" (essendo per assialsimmetria $M_{x\theta} = M_{\theta x} = 0$ e pertanto $\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x} = 0$)

Considerando un punto sul contorno incastrato si ottiene riferendosi alla superficie limite superiore ($z = -\frac{3}{2}$)

$$\sigma_x = \sigma_1 = \left(-\frac{\rho_0 R e^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{12}{j^3} = \frac{3}{4} \frac{\rho_0 R e^2}{j^2}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2 = \left(-\frac{\rho_0 R e^2 \nu}{8} \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{12}{j^3} = \frac{3}{4} \frac{\rho_0 R e^2 \nu}{j^2}$$

4/12/03

mediante le quali si ottiene:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{3}{4} \frac{\rho_0 R e^2}{j^2} \sqrt{1 + \nu^2}$$

La verifica risulta positiva se:

$$\sigma_{id} \leq \sigma_{am} \rightarrow \frac{3}{4} \frac{\rho_0 R e^2}{j^2} \sqrt{1 + \nu^2} \leq \sigma_{am}$$

Considerando l'origine risulta per $z = +\frac{3}{2}$:

$$\sigma_x = \sigma_\theta = \frac{\rho_0 R e^2 (1 + \nu)}{16} \cdot \left(\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{12}{j^3}$$

ovvero:

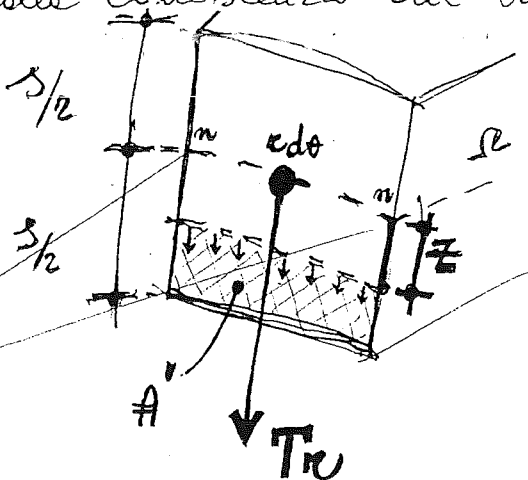
$$\sigma_x = \sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3}{8} \frac{\rho_0 R e^2 (1 + \nu)}{j^2}$$

e pertanto:

$$\sigma_{id} = \frac{3}{8} \frac{\rho_0 R e^2 (1 + \nu)}{j^2} \leq \sigma_{am}$$

Il calcolo dell'azione tangenziale τ_r (alla quale per le ipotesi di Kirchhoff non corrisponde deformazione: $f_{zr}=0$) può effettuarsi, a partire dalla conoscenza del taglio T_r , utilizzando la formula di Jourawsky:

$$\tau_r = \frac{T_r \cdot r \cdot d\theta \cdot S_m(A')}{b \cdot J_m}$$



$$\begin{aligned} S_m &= \left(\frac{s}{2} - z\right) \cdot r \cdot d\theta \cdot \left[z + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} - z\right)\right] = \left(\frac{s}{2} - z\right) \cdot r \cdot d\theta \left(\frac{s}{4} + \frac{z}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} - z\right) \left(\frac{s}{2} + z\right) \cdot r \cdot d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{4} - z^2\right) r \cdot d\theta \end{aligned}$$

$$J_m = \frac{1}{12} \cdot r \cdot d\theta \cdot s^3$$

$$b = r \cdot d\theta$$

$$\tau_r = \frac{T_r \cdot r \cdot d\theta \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{4} - z^2\right) r \cdot d\theta}{r \cdot d\theta \cdot \frac{1}{12} r \cdot d\theta \cdot s^3} =$$

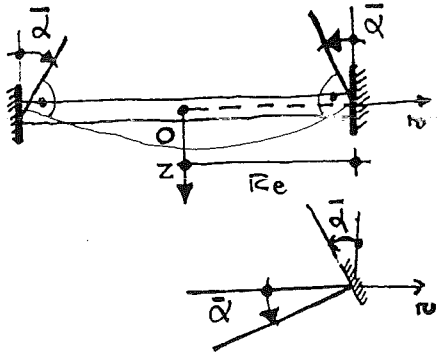
E' pertanto:

$$\tau_r = T_r \cdot \frac{6}{s^3} \cdot \left(\frac{s^2}{4} - z^2\right)$$

Risulta sul contorno:

$$\tau_{r \max} = \frac{p_0 Re}{2} \cdot \frac{6^3}{s^3} \cdot \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4} \frac{p_0 Re}{s}$$

ESEMPIO



Pianura circolare incastata sul contorno
cedevole, scarica ($p=0$).

- L'espressione della superficie elastica deformata è al solito fornita da:

$$W(r) = W_0(r) + W_1(r)$$

con:

$$W_0(r) = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr$$

$$W_1(r) = A_2 r^2 + A_4$$

- ① essendo $p=0$ si deduce immediatamente che $W_0(r) = 0$.

- ② la superficie elastica è allora fornita dalla espressione:

$$W(r) = A_2 \cdot r^2 + A_4$$

con A_2 e A_4 da determinare in base alle condizioni al contorno, ...
Le C.d.C. sono:

$$\left[W(r) \right]_{r=R_e} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{dW}{dr} \right]_{r=R_e} = -\bar{\alpha}$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = A_2 \cdot R_e^2 + A_4 \\ -\bar{\alpha} = 2A_2 \cdot R_e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{2R_e} \\ A_4 = \frac{\bar{\alpha} \cdot R_e}{2} \end{cases}$$

L'espressione di $W(r)$ diventa:

$$W(r) = -\frac{\bar{\alpha}}{2R_e} \cdot r^2 + \frac{\bar{\alpha} \cdot R_e}{2}$$

$$\left(W(r) \right)_{r=0} = \frac{\bar{\alpha} R_e}{2}$$

- ③ si deduce: $\frac{dW}{dr} = -\frac{\bar{\alpha}}{R_e} r$; $\frac{d^2W}{dr^2} = -\frac{\bar{\alpha}}{R_e}$; $\frac{d^3W}{dr^3} = 0$

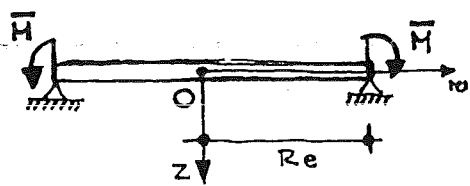
e si ottengono le azioni interne:

$$M_r = -B \left(\frac{d^2W}{dr^2} + \nu \cdot \frac{dW}{dr} \right) = -B \left(-\frac{\bar{\alpha}}{R_e} + \nu \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}}{R_e} \cdot r \right) \right) = B \cdot \frac{\bar{\alpha}}{R_e} (1 + \nu)$$

$$M_\theta = -B \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dr} + \nu \cdot \frac{d^2W}{dr^2} \right) = -B \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}}{R_e} \cdot r \right) + \nu \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}}{R_e} \right) \right) = B \cdot \frac{\bar{\alpha}}{R_e} (1 + \nu)$$

$$T_r = \left(\frac{d^3W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right) = \left(\frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}}{R_e} \right) - \frac{1}{r^2} \cdot \left(-\frac{\bar{\alpha}}{R_e} \cdot r \right) \right) = 0$$

ESEMPIO Piastra circolare a semplice contorno, appoggiata, soggetta a coppie radiali di intensità \bar{M} , scarica ($p=0$).



● L'espressione della superficie elastica deformata è al solito fornita da:

$$W(r) = W_0(r) + W_1(r) \quad (1)$$

con:

$$W_0(r) = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr$$

$$W_1(r) = A_2 \cdot r^2 + A_4$$

① essendo $p=0$ si deduce immediatamente che $W_0(r) = 0$.

② La superficie elastica deformata è quindi descritta dalla espressione:

$$W(r) = A_2 \cdot r^2 + A_4$$

con A_2 e A_4 da determinare con le condizioni al contorno.

Le C_0 al C_1 sono:

$$[W(r)]_{r=R_e} = 0 \quad ; \quad [M_r]_{r=R_e} = -B \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \nu \frac{dW}{dr} \right)_{r=R_e} = -\bar{M}$$

Emendo: $\frac{dW}{dr} = 2A_2 r$; $\frac{d^2 W}{dr^2} = 2A_2$, $\rightarrow M_r = -B \left[2A_2 + \frac{\nu}{r} \cdot 2A_2 r \right]$

si scrive il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 0 = A_2 \cdot R_e^2 + A_4 \\ -\bar{M} = -B \left(2A_2 + \nu \cdot 2A_2 \right) \end{cases} \rightarrow A_2 = \frac{\bar{M}}{2B(1+\nu)}$$

$$A_4 = -\frac{\bar{M} \cdot R_e^2}{2B(1+\nu)}$$

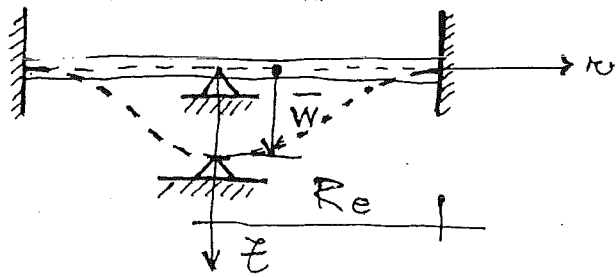
L'espressione della superficie elastica deformata si scrive in definitiva:

$$W(r) = \frac{\bar{M}}{2B(1+\nu)} \cdot r^2 - \frac{\bar{M} \cdot R_e^2}{2B(1+\nu)}$$

da cui risulta semplice sia determinare il massimo spostamento sia le

Risulta $W_{max} = (W)_{r=0} = - \frac{\bar{M} \cdot R_e^2}{2B(1+\nu)}$ azioni interne:

ESEMPIO



Piastre circolare
incastrate sul
contorno con cedi-
mento di vincolo
sull'appoggio al
centro.

$$W(r) = W_0(r) + W_1(r)$$

$$W_0(r) = \int \left(\frac{dr}{r} \right) \left(r \frac{dr}{r} \right) \left(\frac{dr}{r} \right) \left(\frac{p \cdot r}{B} \right) dr \rightarrow W_0(r) = 0 \text{ essendo la}$$

piastre "scarica" ($p=0$)

$$W_1(r) = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_4 \rightarrow \text{in quanto nel centro}$$

della piastra ($r=0$)
esiste un vincolo fuori
forma che applica una
forza (reazione) concen-
trata -

$$W(r) = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_4$$

Le Condizioni al contorno sono:

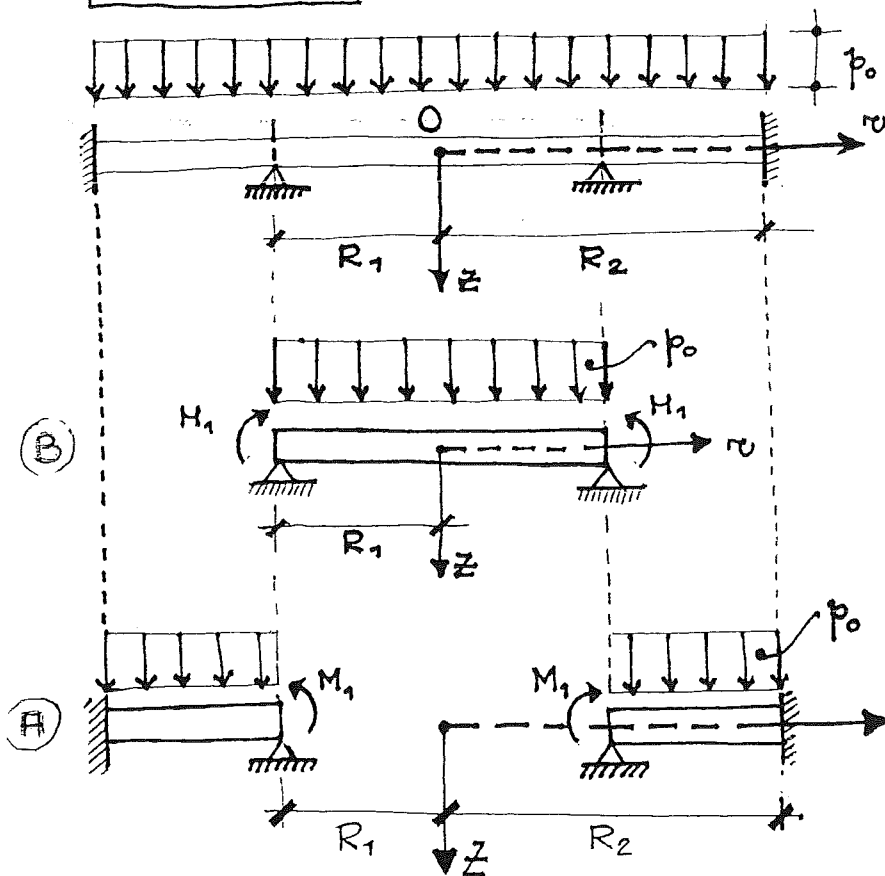
$$\begin{cases} (W)_{r=R_e} = 0 \\ \left(\frac{dW}{dr} \right)_{r=R_e} = 0 \end{cases} \quad (W)_{r=0} = +\bar{W}$$

Essendo $\frac{dW}{dr} = A_1 \left(2r \ln r + r^2 \cdot \frac{1}{r} \right) + 2A_2 r$

si ottiene il sistema per le tre incognite A_1, A_2, A_4 :

$$\begin{cases} A_1 R_e^2 \ln R_e + A_2 R_e^2 + A_4 = 0 \\ A_1 (2R_e \ln R_e + R_e) + A_2 \cdot 2R_e = 0 \\ A_4 = \bar{W} \end{cases}$$

ESERCIZIO



Piastre circolari
continue soggette a
carico uniformemente
distribuito di intensità
 p_0 , incastrata nel
bordo esterno.

Si immagina di suddividere la piastra in due porzioni, tramite la superficie cilindrica coassiale con z di raggio R_1 .

La suddetta superficie cilindrica separa due zone della piastra,

che individuano rispettivamente una piastra centrale a semplice contorno e una piastra esterna a doppio contorno. Come peraltro riportato in figura si indica con M_1 l'intensità del momento che si deve applicare sul bordo delle due piastre, di raggio R_1 , per assicurare l'equilibrio una volta operato il taglio di cui sopra.

A) Per la piastra centrale a semplice contorno di raggio R_1 , soggetta a carico uniformemente distribuito di intensità p_0 , deve adottarsi:

$$w_B(r) = \frac{p_0 \cdot r^4}{64B} + B_2 \cdot r^2 + B_4 \quad (r \leq R_1)$$

con:

$$\frac{dw_B}{dr} = \frac{p_0 \cdot r^3}{16B} + 2B_2 \cdot r$$

$$\frac{d^2w_B}{dr^2} = \frac{3}{16} \cdot \frac{p_0 \cdot r^2}{B} + 2B_2$$

B) Per la piastra esterna a doppio contorno, soggetta a carico uniformemente distribuito di intensità p_0 deve adottarsi:

$$w_A(r) = \frac{p_0 \cdot r^4}{64B} + A_1 \cdot r^2 \ln r + A_2 \cdot r^2 + A_3 \cdot \ln r + A_4$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2)$$

e risulta:

$$\frac{dW_{\#}}{dr} = \frac{p_0 r^3}{16 B} + A_1 \cdot (2r \ln r + r) + A_2 \cdot 2r + \frac{A_3}{r}$$

$$\frac{d^2 W_{\#}}{dr^2} = \frac{3}{16} \cdot \frac{p_0 r^2}{B} + A_1 \cdot (2 \ln r + 3) - \frac{A_3}{r^2}$$

c) In definitiva la soluzione del problema richiede la determinazione di due funzioni $W(r)$, e di complessive 6 costanti (2 costanti per la piastra centrale e 4 per la piastra esterna a doppio contorno).

Alle 6 incognite da determinare si fanno corrispondere 6 equazioni indipendenti, che si ottengono imponendo:

C₁) le condizioni al contorno nel bordo incastrato.

$$\left[W_{\#}(r) \right]_{r=R_2} = 0$$

$$\left[\frac{dW_{\#}}{dr} \right]_{r=R_2} = 0$$

e con riferimento alle espressioni di $W_{\#}(r)$ e $dW_{\#}/dr$ del caso $\#$ si ottiene:

$$\frac{p_0 \cdot R_2^4}{64 B} + A_1 \cdot R_2^2 \ln R_2 + A_2 \cdot R_2^2 + A_3 \ln R_2 + A_4 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{p_0 \cdot R_2^3}{16 B} + A_1 \cdot (2 R_2 \ln R_2 + R_2) + A_2 \cdot 2 R_2 + \frac{A_3}{R_2} = 0 \quad (2)$$

C₂) la nullità degli spostamenti per $r = R_1$.

$$(W_{\#})_{r=R_1} = 0; \quad (W_{\#})_{r=R_1} = 0$$

La precedente condizione fornisce due relazioni, poiché deve essere imposta sia per la piastra centrale sia per quella esterna. Si ottiene:

$$(W_{\#})_{r=R_1} = 0 \Rightarrow \frac{p_0 R_1^4}{64 B} + A_1 \cdot R_1^2 \ln R_1 + A_2 \cdot R_1^2 + A_3 \ln R_1 + A_4 = 0 \quad (3)$$

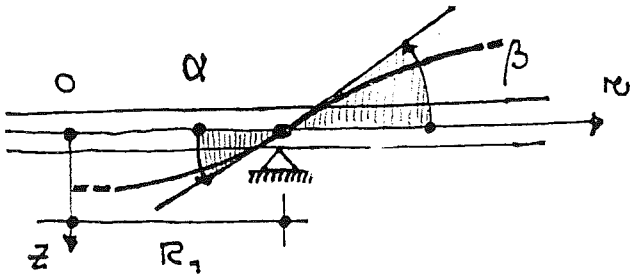
$$\left(\frac{W}{B} \right)_{r=R_1} = 0 \Rightarrow \frac{p_0 R_1^4}{64 \cdot B} + B_2 \cdot R_1^2 + B_4 = 0 \quad (4)$$

(8)

C₃) l'unicità della tangente diretta radialmente per $r = R_1$.

Deve essere:

$$\alpha = \beta.$$



Tenuto conto delle espressioni delle derivate prime, calcolate nel caso B) e nel caso A), e della loro particolarezzazione

per $r = R_1$ si ottiene:

$$\left[\frac{dW_B}{dr} \right]_{r=R_1} = \left[\frac{dW_A}{dr} \right]_{r=R_1}$$

$$2 B_2 \cdot R_1 = A_1 (2 R_1 \ln R_1 + R_1) + A_2 \cdot 2 R_1 + \frac{A_3}{R_1} \quad (5)$$

C₄) l'equilibrio dei momenti sull'appoggio per $r = R_1$:

Com riferimento alle espressioni ottenute nel caso B) risulta:

$$M_1 = -B \left(\frac{d^2 W_B}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW_B}{dr} \right)_{r=R_1} =$$

$$M_1(W_B) = -B \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{p_0 R_1^2}{B} (3+\nu) + 2 \cdot B_2 (1+\nu) \right)$$

$$\left[M_r(W_A) \right]_{r=R_1} = \left[M_r(W_B) \right]_{r=R_1}$$

Facendo invece riferimento alle espressioni ottenute in A):

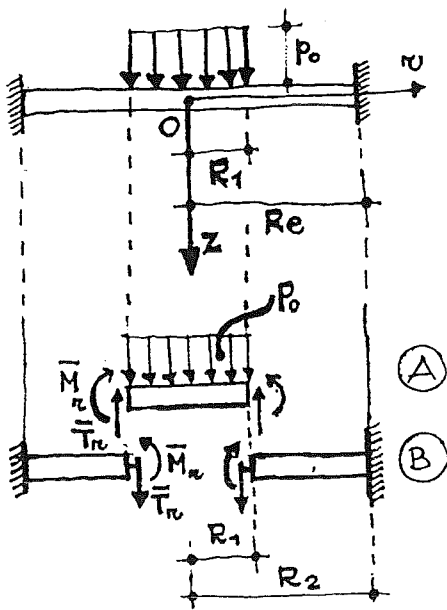
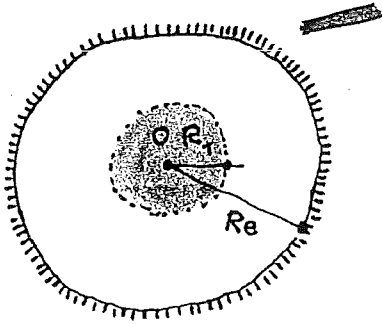
$$M_1(W_A) = -B \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{p_0 R_1^2}{B} (3+\nu) + A_1 \left((1+\nu) \cdot 2 \ln R_1 + 3 + \nu \right) + 2 \cdot A_2 (1+\nu) + A_3 \cdot \frac{(\nu-1)}{R_1^2} \right)$$

Uguagliando le espressioni di M_1 , semplificando e riordinando si ottiene:

$$2 B_2 (1+\nu) - A_1 \left[(1+\nu) \cdot 2 \ln R_1 + 3 + \nu \right] - A_2 \cdot 2 (1+\nu) - A_3 \frac{\nu-1}{R_1^2} = 0 \quad (6)$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Piastrea a semplice contorno, incastrata, soggetta a un carico uniformemente distribuito p_0 su una area di raggio $R_1 < R_e$.



• Si immagina di suddividere la piastra in due porzioni, tramite una superficie cilindrica di raggio $r = R_1$, coassiale con z . La suddetta superficie cilindrica separa la zona della piastra soggetta al carico p_0 da quella che invece è scarica -

* La zona centrale carica è una piastra a semplice contorno di raggio R_1 ; la zona esterna scarica, è una piastra a doppio contorno di raggio interno R_1 e raggio esterno R_e .

* Indichiamo con \bar{M}_n e \bar{T}_n le caratteristiche di azione interna che è necessario applicare sul bordo delle due piastre, di raggio R_1 , per assicurare l'equilibrio una volta operato il taglio di cui sopra -

A)

EQUAZIONE W_A PER IL CAMPO "A" ($0 \leq r \leq R_1$)

$$W_A = W_{0A} + W_{1A}$$

$$W_{0A} = \frac{p_0 \cdot r^4}{64B}$$

$$W_{1A} = A_2 r^2 + A_4 \quad (\text{piastra a semplice contorno senza carico concentrato in } r=0)$$

$$W_A = \frac{p_0 r^4}{64B} + A_2 r^2 + A_4$$

Si ha: $\frac{dW_A}{dr} = \frac{p_0 r^3}{16B} + 2A_2 r$

$$\frac{d^2W_A}{dr^2} = \frac{3}{16} \frac{p_0 r^2}{B} + 2A_2$$

$$\frac{d^3W_A}{dr^3} = \frac{3}{8} \frac{p_0 r}{B}$$

EQUAZIONE W_B PER IL CAMPO "B" ($R_1 \leq r \leq R_e$)

$$W_B = W_{0B} + W_{1B}$$

$$W_{0B} = 0 \quad (\text{essendo } p=0)$$

$$W_{1B} = B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4$$

Risulta:

$$W_B = B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4$$

con:

$$\frac{dW_B}{dr} = B_1(2r \ln r + r) + B_2 \cdot 2r + \frac{B_3}{r}$$

$$\frac{d^2 W_B}{dr^2} = B_1(2 \ln r + 3) + 2B_2 - B_3 \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^3 W_B}{dr^3} = B_1 \cdot \frac{2}{r} + B_3 \cdot \frac{2}{r^3}$$

c) Si osserva che devono essere determinate due funzioni $W(r)$ per definire la superficie elastica deformata della piastra. La funzione $W(r)$ nel caso A) è definita a meno di due costanti arbitrarie. La funzione $W_B(r)$ nel caso B) è definita a meno di 4 costanti arbitrarie. Si ha quindi un totale di 6 incognite da determinare, mentre a disposizione si hanno solamente 2 condizioni al contorno (quella da imporre nel bordo incastrato di raggio $r = R_e$).

Se bilanciamo fra incognite ed equazioni indipendenti torna in pareggio se si tiene conto che per $r = R_1$ possiamo scrivere 2 condizioni di congruenza e 2 condizioni di equilibrio.

LE CONDIZIONI AL CONTORNO. Nel bordo incastrato deve risultare:

$$[W_B(r)]_{r=R_e} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{dW_B}{dr}\right]_{r=R_e} = 0$$

e con riferimento alla espressione della $W_B(r)$ scritta nel caso B) si ottiene:

$$0 = B_1 \cdot R_e^2 \ln R_e + B_2 R_e^2 + B_3 \ln R_e + B_4 \quad (1)$$

$$0 = B_1(2R_e \ln R_e + R_e) + B_2 \cdot 2R_e + B_3 \cdot \frac{1}{R_e} \quad (2)$$

LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA. Le condizioni di congruenza devono esprimersi, nei punti di raggio $r = R_1$, l'unicità dello spostamento e della tangente alla superficie elastica in direzione radiale, per i due settori in cui si suppone suddivisa la piastra. Deve allora aversi:

$$(W_A)_{r=R_1} = (W_B)_{r=R_1} \longrightarrow \frac{p_0 R_1^4}{64B} + A_2 R_1^2 + A_4 = B_1 R_1^2 \ln R_1 + B_2 R_1^2 + B_3 \ln R_1 + B_4 \quad (3)$$

$$\left(\frac{dW_A}{dr}\right)_{r=R_1} = \left(\frac{dW_B}{dr}\right)_{r=R_1} \longrightarrow \frac{p_0 R_1^3}{16B} + 2A_2 R_1 = B_1 R_1(2 \ln R_1 + 1) + B_2 \cdot 2R_1 + B_3 \cdot \frac{1}{R_1} \quad (4)$$

LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

Si deve uguagliare l'espressione di $\bar{M}_r(W_A)$ che si calcola per il settore di piastra carico "A" a partire dalle corrispondente W_A alla $\bar{M}_r(W_B)$ che si ottiene per il settore scarico "B" a partire dalla corrispondente W_B , in $r = R_1$.

La seconda condizione di equilibrio deve uguagliare le espressioni del taglio $\bar{T}_r(W_A)$ e $\bar{T}_r(W_B)$ che si calcolano per $r = R_1$.

$$\text{Essendo: } \left[\bar{M}_r(W_A) \right]_{r=R_1} = \left[\bar{M}_r(W_B) \right]_{r=R_1}$$

si dimostra che risulta:

$$\begin{aligned} \left[\bar{M}_r(W_A) \right]_{r=R_1} &= \left[-B \left(\frac{d^2 W_A}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW_A}{dr} \right) \right]_{r=R_1} = \\ &= -B \left(\frac{p_0 R_1^2}{16B} (3+\nu) + A_2 \cdot 2(1+\nu) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\bar{M}_r(W_B) \right]_{r=R_1} &= \left[-B \left(\frac{d^2 W_B}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW_B}{dr} \right) \right]_{r=R_1} = \\ &= -B \left(B_1 (2 \ln R_1 (1+\nu) + 3+\nu) + B_2 \cdot 2(1+\nu) - B_3 \cdot \frac{1}{R_1^2} (1-\nu) \right) \end{aligned}$$

e pertanto:

$$\frac{p_0 R_1^2}{16B} (3+\nu) + A_2 \cdot 2(1+\nu) = B_1 (2 \ln R_1 (1+\nu) + 3+\nu) + B_2 \cdot 2(1+\nu) - B_3 \cdot \frac{1}{R_1^2} (1-\nu) \quad (5)$$

$$\text{Inoltre: } \left[\bar{T}_r(W_A) \right]_{r=R_1} = \left[\bar{T}_r(W_B) \right]_{r=R_1}$$

$$\text{Essendo: } \left[\bar{T}_r(W_A) \right]_{r=R_1} = \left[B \left(\frac{d^3 W_A}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W_A}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW_A}{dr} \right) \right]_{r=R_1} = \frac{p_0 R_1}{2}$$

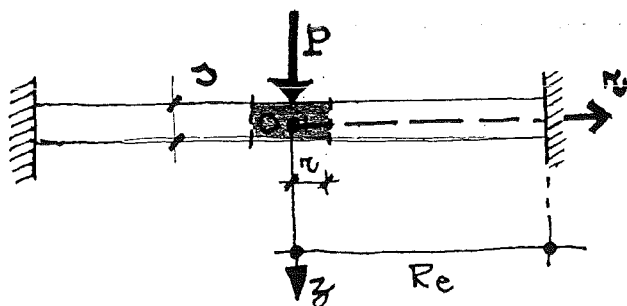
$$\left[\bar{T}_r(W_B) \right]_{r=R_1} = \left[B \left(\frac{d^3 W_B}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W_B}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW_B}{dr} \right) \right]_{r=R_1} = B \cdot \frac{4}{R_1} \cdot A_1$$

$$\text{Si ottiene: } \frac{p_0 R_1}{2} = B \cdot \frac{4}{R_1} A_1 \quad (6)$$

Le equazioni (1) - (6) definiscono il sistema risolvibile il problema. 185

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Piastrea circolare a semplice contorno, incastrata, soggetta ad un carico concentrato P nel centro.



L'espressione generale della funzione $w(r)$:

$$w(r) = w_0(r) + w_1(r)$$

deve, in questo caso specifico, essere definita come segue:

a) risulta $p(r) = 0$ (carico ripartito annullo); pertanto è anche:

$$w_0(r) = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p \cdot r}{B} dr = 0$$

b) A partire dall'espressione di $w_1(r)$:

$$w_1(r) = A_1 \cdot r^2 \ln r + A_2 \cdot r^2 + A_3 \ln r + A_4$$

L'esigenza di finitezza degli spostamenti al centro della piastra ($r=0$) implica di dover porre $A_3 \equiv 0$ nella espressione di $w_1(r)$.

Viceversa il termine A_1 (che moltiplica $r^2 \ln r$) deve essere mantenuto nella espressione di $w_1(r)$, poiché soltanto mediante esso possono mettersi in conto le azioni taglianti fortissime che il carico concentrato P genera in prossimità del centro.

c) Tenuto conto di quanto detto nei punti a) e b), si deve porre:

$$w = A_1 \cdot r^2 \ln r + A_2 \cdot r^2 + A_4$$

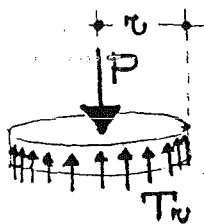
Le tre costanti si determinano:

mediante le 2 ordinarie C. al C.:

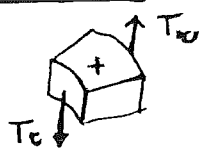
$$\left[w(r) \right]_{r=R_e} = 0 \longrightarrow A_1 \cdot R_e^2 \ln R_e + A_2 \cdot R_e^2 + A_4 = 0 \quad (1)$$

$$\left[\frac{dw(r)}{dr} \right]_{r=R_e} = 0 \longrightarrow A_1 (2 R_e \ln R_e + R_e) + A_2 \cdot 2 R_e = 0 \quad (2)$$

mediante la condizione aggiuntiva di equilibrio alla traslazione verticale per la quale: l'azione tagliante T_r agente sulla superficie laterale, a distanza r dal centro, deve uguagliare P :



$$T_r \cdot 2\pi r = P$$



Essendo $T_r = B \left[\frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right]$ e poiché dalla espansione di W si ricava:

$$\frac{dW}{dr} = A_1 (2r \ln r + r) + 2A_2 \cdot r;$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} = A_1 (2 \ln r + 2 + 1) + 2A_2;$$

$$\frac{d^3 W}{dr^3} = \frac{2A_1}{r}.$$

$$T_r = B \cdot \left(\frac{2 \cdot A_1}{r} + \frac{2 \cdot A_1 \cdot \ln r}{r} + \frac{3 \cdot A_1}{r} + \frac{2 \cdot A_2}{r} - \frac{2 \cdot A_1 \cdot \ln r}{r} - \frac{A_1}{r} - \frac{2 \cdot A_2}{r} \right) = \frac{4 \cdot A_1 \cdot B}{r}$$

Si ricava in definitiva:

$$T_r = B \cdot \frac{4A_1}{r}$$

La terza equazione si scrive quindi dopo ovvie semplificazioni:

$$B \cdot \pi B \cdot A_1 = P \quad (3)$$

d) Le equazioni (1), (2) e (3), riunite insieme, costituiscono un sistema nelle 3 incognite A_1 , A_2 e A_4 . La risoluzione del sistema fornisce:

$$A_1 = \frac{P}{8\pi B}$$

$$A_2 = -\frac{P}{16\pi B} (2 \ln R_e + 1);$$

$$A_4 = \frac{P \cdot R_e^2}{16\pi B}.$$

Imponendo le precedenti nella espressione della funzione W , si ottiene:

$$W = \frac{P}{16\pi \cdot B} \left(2r^2 \ln \frac{r}{R_e} + R_e^2 - r^2 \right)$$

Il massimo spostamento si verifica al centro della piastra. Il valore W_{max} si ottiene pertanto calcolando $\lim_{r \rightarrow 0} W$. Risulta:

$$W_{max} = \frac{P \cdot R_e^2}{16\pi B}$$

Si ottiene:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{P}{16 \cdot \pi B} \cdot \frac{1}{4} \ln \frac{r}{R_e} = \frac{P}{4 \pi B} \cdot \ln \frac{r}{R_e}$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{P}{4 \cdot \pi B} \cdot \left(\ln \frac{r}{R_e} + 1 \right) \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = \frac{P}{4 \pi B} \cdot \frac{1}{r}$$

Risulta quindi agevole determinare sia le espressioni dei momenti flettenti M_r e M_θ sia il taglio T_r .

$$M_r = -B \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \cdot \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{P}{4 \pi} \left[(1+\nu) \cdot \ln \frac{r}{R_e} + 1 \right] \quad (*)$$

$$M_\theta = -B \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = -\frac{P}{4 \pi} \left[(1+\nu) \cdot \ln \frac{r}{R_e} + \nu \right] \quad (*)$$

$$T_r = \frac{P}{2 \pi r} \quad (3^a \text{ condizione}) \quad (*)$$

Le espressioni degli sforzi σ_r , σ_θ e τ_r possono determinarsi agevolmente utilizzando rispettivamente le espressioni di Navier e Jourawsky.

Si ottiene:

$$\sigma_r = -\frac{3 P E}{\pi s^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{r}{R_e} + 1 \right] \quad (*)$$

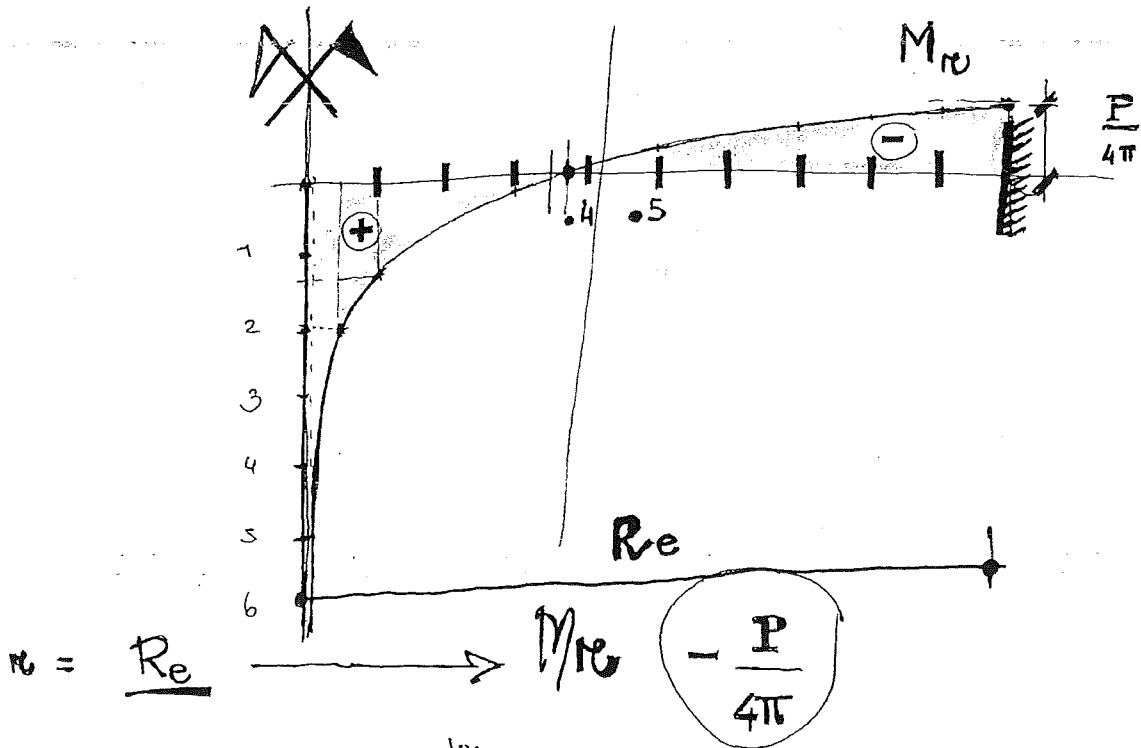
$$\sigma_\theta = -\frac{3 P E}{\pi s^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{r}{R_e} + \nu \right] \quad (*)$$

$$\tau_r = \frac{3 P}{\pi r s^3} \left(\frac{s^2}{4} - r^2 \right) \quad (*)$$

Come si può vedere le (*) crescono indefinitamente per $r \rightarrow 0$. Nell'origine della piastra ($r=0$) dove è applicato P , peraltro, le ipotesi poste a base della teoria flessionale delle piastre non sono rispettate. ($\sigma_z \ll \sigma_\theta, \sigma_r$).

Di conseguenza le precedenti formule dei momenti e delle tensioni non sono significative per $r \rightarrow 0$. 188

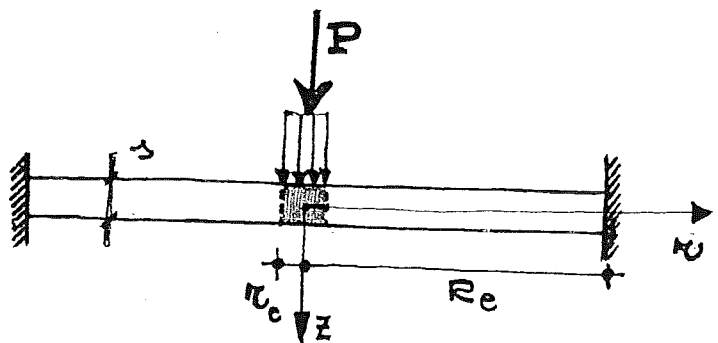
DIAGRAMMA DI M_{re}



$r = 0,9 Re$	$-\frac{P}{4\pi} * 0,095$
" $0,8 Re$	$-\frac{P}{4\pi} * 0,777$
" $0,7 Re$	$-\frac{P}{4\pi} * 0,643$
" $0,5 Re$	$-\frac{P}{4\pi} * 0,361$
" $0,3 Re$	$+\frac{P}{4\pi} * 0,204$
" $0,1 Re$	$+\frac{P}{4\pi} * 1,3$
" $0,05 Re$	$+\frac{P}{4\pi} * 1,996$
" $0,01 Re$	$+\frac{P}{4\pi} * 5,90$

Peraltro si deve anche osservare che il carico concentrato P (di valore finito e agente su un'area nulla) è solo una astrazione teorica. Nella pratica si ha a che fare con carichi di risultante P agenti su aree molto piccole.

IN PRATICA



Considerato un carico uniformemente distribuito, agente dentro un cerchio di raggio r_c ($\leq 1,7s$) avente centro coincidente con quello della piastra, di risultante P , si calcola inizialmente il "raggio equivalente" r_e :

$$r_e = \sqrt{1,6 \cdot r_c^2 + s^2} - 0,675 s$$

(risulta $r_e < r_c$)

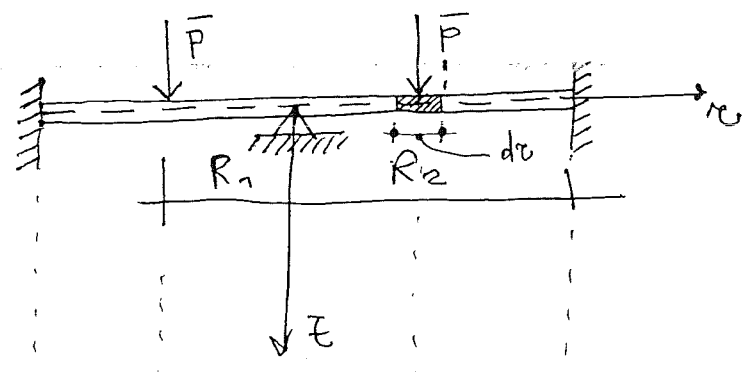
Le precedenti espressioni degli sforzi σ_r e σ_θ (e anche dei momenti M_r e M_θ) sono considerate valide esclusivamente per $r_e \leq r \leq R_e$. Per $r < r_e$ si considerano sforzi e momenti costanti, e pari ai valori che si calcolano per $r = r_e$.

Quanto sopra ovviamente se $r_c \leq 1,7 \cdot s$, essendo s lo spessore. Se $r_c > 1,7 \cdot s$ si procede come nell'esercizio successivo.

ESEMPIO

11/12/03

Piastre circolare soggetta a carico \bar{p} ripartito su una linea (circonferenza di raggio R_1).



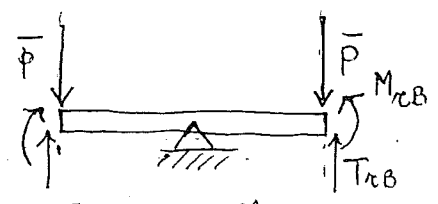
Suddividiamo il campo di integrazione in due settori:

"A": $0 \leq r \leq R_1$

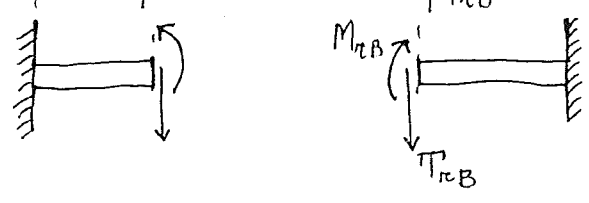
"B": $R_1 \leq r \leq R_2$

Evidenziamo le azioni interne che tengono il posto della continuità strutturale soppressa.

(A)



(B)



Poichè il carico esterno \bar{p} è attribuito al settore "A" è evidente che se taglio avviene all'esterno dell'elemento di lunghezza infinitesima dr su cui \bar{p} grava. Le azioni interne da evidenziare sono allora quelle del campo "B" calcolate in $r = R_1$.

(1) EQUAZIONE W_A :

$W_A = W_{0A} + W_{1A}$

$W_{0A} = 0 \quad (p=0)$
 $W_{1A} = A_2 r^2 + A_4$

$\rightarrow W_A = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_4$

(2) EQUAZIONE W_B :

$W_B = W_{0B} + W_{1B}$

$W_{0B} = 0 \quad (p=0)$

$W_{1B} = B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4$

$\rightarrow W_B = B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4$

Si devono determinare 7 costanti. Le condizioni che devono considerarsi sono le seguenti:

Condizioni al contorno:

- $(W_B)_{r=R_2} = 0$
- $\left(\frac{dW_B}{dr}\right)_{r=R_2} = 0$
- $(W_A)_{r=0} = 0$

Condizioni di compattezza all'interfaccia fra il campo (A) e (B):

- $(W_A)_{r=R_1} = (W_B)_{r=R_1}$
- $\left(\frac{dW_A}{dr}\right)_{r=R_1} = \left(\frac{dW_B}{dr}\right)_{r=R_1}$

Condizioni di equilibrio all'interfaccia fra il campo (A) e il campo (B).

- $[M_{rA}]_{r=R_1} = [M_{rB}]_{r=R_1}$
- $[T_{rA}]_{r=R_1} + \bar{p} = [T_{rB}]_{r=R_1}$

