LA TRAVE SU APPOGGIO ELASTICO CONTINUO

Consideriamo una trave prismatica vincolata bilateralmente per tutta la sua lunghezza ad un mezzo capace di reagire in ogni punto del contatto con una reazione unitaria r proporzionale alla componente di spostamento η normale all'asse della trave, talché $r = \beta\eta$

con β coefficiente di proporzionalità, che si deduce dalla costante K del mezzo elastico[(1)] moltiplicandola per la larghezza b della trave. Se questa dunque è soggetta ad un carico q ripartito e diretto come in figura, l'equazione differenziale della sua linea elastica (trascurando la deformazione conseguente al taglio) risulta

$$EJ\,\frac{d^4\eta}{dx^4} = q - \beta\eta$$

La soluzione dell'omogenea associata, avendo posto:

$$4EJ\alpha^4 = \beta \qquad (a)$$

risulta notoriamente:(si veda l'Appendice)

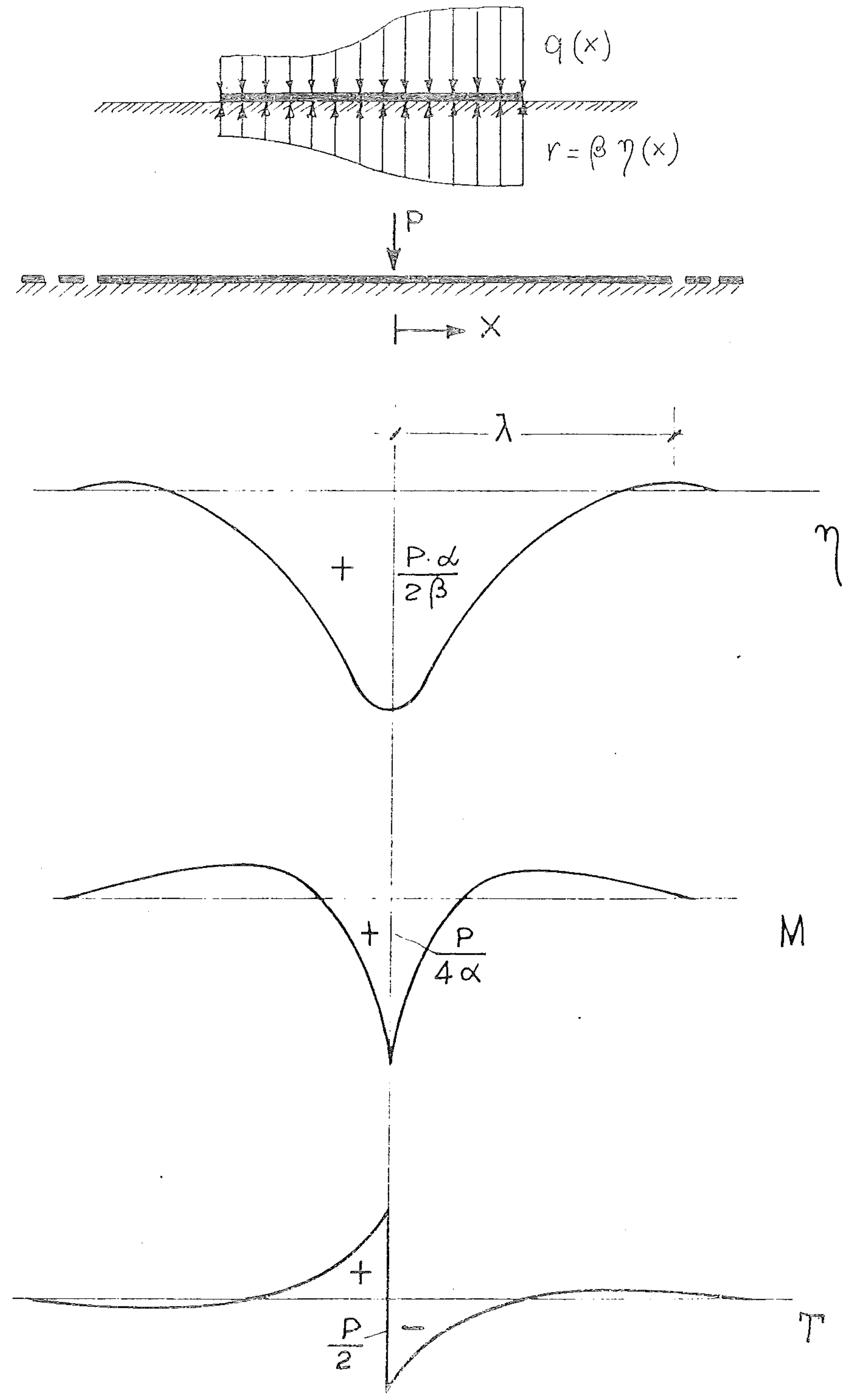
$$\eta = e^{-\alpha x}\left\{C_1 \sin\alpha x + C_2\cos\alpha x\right\} + e^{\alpha x}\left\{C_3\sin\alpha x + C_4\cos\alpha x\right\}$$

Questo risultato è direttamente utilizzabile nel caso che la trave, essendo $q(x) \equiv 0$, sia soggetta a un carico concentrato P (del quale si può tener conto nelle condizioni al contorno). Se si ammette inizialmente che la trave è infinitamente lunga risulta evidentemente: $C_3 = C_4 = 0$. Le altre due costanti di integrazione restano allora determinate dalla duplice condizione che, posta l'origine delle a-

---

(1) La costante K(modulo del terreno) é la pressione che provoca l'abbassamento unitario dello stesso:le dimensioni sono $[F/L^3]$. Viene misurata in Kg/cm^3:assume valori 1÷4 per terreni sabbiosi,4÷12 per terreni ghiaiosi. Questo comportamento elastico,con incapacità di trasmettere sforzi taglianti,rappresenta terreni incoerenti.(terreno alla Winkler)

Trave su appoggio elastico continuo—



scisse in corrispondenza del punto di applicazione del carico:

$$x = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = 0 \\ -EJ\,\dfrac{d^3\eta}{dx^3} = -\dfrac{P}{2} \end{cases}$$

La primaassicura che $C_1 = C_2 = C$ e la seconda che

$$C = \frac{P}{8\alpha^3 EJ} = \frac{P\alpha}{2\beta} .$$

La deformata della trave è dunque nelle ipotesi fatte una sinusoide smorzata:

$$\eta = \frac{P\alpha}{2\beta}\, e^{-\alpha x}\left(\sin\alpha x + \cos\alpha x\right)$$

per la quale la lunghezza d'onda, definita da $\alpha\lambda = 2\pi$, risulta:

$$\lambda = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{\beta}}$$

E' degno di osservazione che il risultato raggiunto e quanto da esso deducibile (ad esempio le espressioni delle azioni interne) valgono per la stessa condizione di carico anche se la lunghezza finita della trave non è inferiore alla lunghezza λ.

L'importanza delle considerazioni svolte deriva non soltanto dalle possibili applicazioni alle travi di fondazioni (su un terreno che si ammette abbia caratteristiche puramente elastiche come sopra definito) ma anche ad alcuni problemi delle lastre curve. Valga al riguardo lo studio del tubo(1) (membrana cilindrica) di lunghezza indefinita, soggetto a pressione interna p costante e munito di cerchiature a interasse d costante, sufficientemente grande rispetto alla

(1) Lo studio del tubo anzichè nel capitolo dedicato alle lastre curve viene qui anticipato per ragioni di opportunità di esemplificazione.

larghezza b delle cerchiature stesse talché si possa considerare la loro mutua azione H col tubo come concentrata lungo la loro circonferenza mediana. Si supponga che le cerchiature siano forzate sul tubo, con una differenza δ fra il raggio r del tubo ed il loro raggio R [1], e si tenga conto che per effetto della pressione interna p il raggio del tubo indefinito in assenza di cerchiature si incrementa della quantità

$$\frac{p r^2}{E_t s_t}$$

con E_t modulo elastico del materiale del tubo ed s_t spessore di quest'ultimo.

Assunta come (unica) incognita del problema la mutua reazione H fra tubo e cerchiatura [2] si osservi che l'analoga espressione

$$\frac{H R^2}{E_c A_c}$$

rappresenta l'incremento del raggio della cerchiatura. D'altra parte se sul tubo agisse la H, corrispondente ad una sola cerchiatura, la diminuzione del raggio del tubo si determinerebbe facilmente in base ai risultati prima dedotti per la trave su appoggio elastico continuo; cioè, scelta l'origine O delle coordinate in corrispondenza al punto di applicazione della H, essa risulterebbe pari a

$$\frac{H \alpha}{2\beta}$$

D'altra parte essendo attive le H conseguenti a tutte le altre cerchiature, basterà applicare il principio di Betti per ottenere la variazione del raggio in O come somma delle deformazioni che l'unica H posta in O determina in corrispondenza dei vari punti di appli-

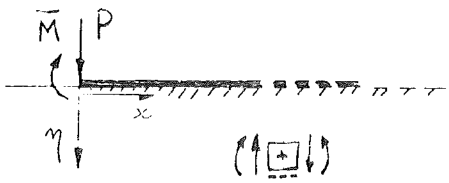
---

(1) Nello svolgimento del problema si farà riferimento ai raggi medi delle cerchiature e del tubo: in effetti 2δ è la differenza fra il diametro esterno del tubo ed il diametro interno delle cerchiature.

(2) H è una forza per unità di lunghezza.

Appendice - Altri casi di trave su suolo elastico

A) Trave molto lunga soggetta ad una forza P e ad una coppia $\overline{M}$ applicate ad un estremo.



Come nel caso precedentemente visto le condizioni al contorno per $x = l \rightarrow \infty$ portanto all'annullarsi di C_3 e C_4: $x = l \rightarrow \infty$ $\eta = 0 \rightarrow C_3 = C_4 = 0$

Le condizioni al contorno per $x = 0$ sono le seguenti:

$$T = - P \rightarrow \eta''' = \frac{P}{EJ} \qquad M = \overline{M} \rightarrow \eta'' = - \frac{\overline{M}}{EJ}$$

da cui segue:

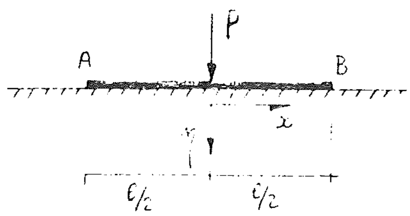
$$C_1 = \overline{M}/2\alpha^2 \, EJ \qquad C_2 = (P - \alpha\overline{M})/2\alpha^3 \, EJ$$

Quindi la linea elastica assume la seguente espressione:

$$\eta = (e^{-\alpha x}/2\alpha^3 \, EJ) \cdot \left[\alpha \, \overline{M} \, sen\alpha \, x + (P - \alpha\overline{M}) \, cos\alpha \, x \right]$$

Questi risultati trovano applicazione nello studio di tubi cilindrici lunghi, con le estremità vincolate a fondi piani o sferici.

B) Trave di lunghezza finita. Le condizioni al contorno si presentano nel modo seguente:



$x = 0 \quad \eta' = 0$

$T = -P/2 \longrightarrow \eta''' = \dfrac{P}{2EJ}$

$x = l/2 \quad M = 0 \longrightarrow \eta'' = 0$

$T = 0 \longrightarrow \eta''' = 0$

Dal sistema delle 4 equazioni traducenti le condizioni al contorno si ottengono i seguenti valori per le costanti di integrazione:

$$C_3 = \frac{P\alpha}{4\beta} c_3 \quad C_4 = \frac{P\alpha}{4\beta} c_4 \quad C_1 = \frac{P\alpha}{4\beta} c_1 \quad C_2 = \frac{P\alpha}{4\beta} c_2 \qquad \text{C)}$$

dove:

$$c_3 = \frac{sen\alpha\ l + cos\alpha\ l - e^{-\alpha l}}{sen\alpha\ l + Sh\alpha\ l} \qquad c_4 = \frac{2 - sen\alpha\ l + cos\alpha\ l + e^{-\alpha l}}{sen\alpha\ l + Sh\alpha\ l}$$

$$c_1 = 2 - c_3 \qquad c_2 = 2 + c_4$$

In particolare, in mezzeria la freccia e l'azione flettente assumono le seguenti espressioni:

$$\eta\ (x = 0) = f_o = \frac{P\alpha}{2\beta}\ (1 + c_4) \qquad M\ (x = 0) = M_{max} = \frac{P}{4\alpha}\ (1 - c_3)$$

Agli estremi:

$$f_A = f_B = \frac{P\alpha}{2\beta}\ c \quad \text{con} \quad c = \frac{4\ cos\frac{\alpha l}{2}\ Ch\frac{\alpha l}{2}}{sen\alpha\ l + Sh\alpha\ l}$$

Nella seguente tabella sono raccolti i valori di c_3, c_4, c al variare del parametro αl: N.B

αl	c_3	c_4	c	αl	c_3	c_4	c
0	1	∞	∞	3.0	− 0,0885	0,0904	0,0656
0,05	0,9750	39,0006	40,0000	π	− 0,0903	0,0903	0
0,1	0,9500	19,0001	20,0200	4.0	− 0,0538	0,0800	− 0,2360
0,5	0,7498	3,0031	3,9952	5.0	− 0,0093	0,0444	− 0,2684
1.0	0,5028	1,0248	1,9628	6,0	0,0034	0,0161	− 0,1984
$\pi/2$	0,2399	0,3659	1,1348	2π	0,0037	0,0112	− 0,1732
2.0	0,0789	0,1785	0,7352	∞	0	0	0

(da O. BELLUZZI - SCIENZA DELLE COSTRUZIONI - Vol. I - Cap.12)

Si può osservare che per $\alpha l = \pi$ (cioè $l = \lambda/2$), la soluzione "*a Trave di lunghezza infinita*" approssima per difetto

(- 8,25%) la soluzione "*a trave finita*", sia per la freccia che per l'azione flettente in mezzeria.
Per $\alpha l = 2\pi$ (cioè $l = \lambda$) invece la soluzione "*a trave di lunghezza infinita*" dà valori pressochè coincidenti con quelli relativi alla "*trave finita*"(per l'azione flettente il valore è in eccesso dello *0,4%* e per la freccia il valore è in difetto dell'*1,1%*).

C) Trave di lunghezza infinita, con carico concentrato in mezzeria: tabella delle funzioni f_1 e f_2 relative alla freccia e all'azione flettente.

$$\eta = \frac{P\alpha}{2\beta} f_1\ (\alpha x) \quad \text{dove} \quad f_1\ (\alpha x) = e^{-\alpha x}\ (\mathrm{sen}\alpha\ x + \cos\alpha\ x)$$

$$M = \frac{P}{4\alpha} f_2\ (\alpha x) \quad \text{dove} \quad f_2\ (\alpha x) = e^{-\alpha x}\ (\cos\alpha\ x - \mathrm{sen}\alpha\ x)$$

αx	f_1	f_2	αx	f_1	f_2	αx	f_1	f_2
0	1	1	0,9	0,5712	-0,0657	π	-0,0432	-0,0432
0,1	0,9907	0,8100	1,0	0,5083	-0,1108	3,5	-0,0389	-0,0177
0,2	0,9651	0,6398	1,2	0,3899	-0,1716	4,0	0,0258	0,0019
0,3	0,9267	0,4888	1,4	0,2849	0,2011	4,5	-0,0123	0,0085
0,4	0,8784	0,3564	$\pi/2$	0,2079	-0,2079	5,0	-0,0046	0,0084
0,5	0,8231	0,2415	1,8	0,1234	-0,1985	5,5	0,0000	0,0058
0,6	0,7628	0,1431	2,0	0,0667	-0,1794	6,0	0,0017	0,0031
0,7	0,6997	0,0599	2,5	-0,0166	0,1149	2π	0,0019	0,0019
$\pi/4$	0,6448	0	3,0	0,0423	0,0563	6,5	0,0018	0,0012

(*da O. BELLUZZI - SCIENZA DELLE COSTRUZIONI - Vol. I Cap.12*)

N.B. Per la soluzione dell'equazione $\eta^{IV} + 4\alpha^4 \eta = \frac{q}{EJ}$ con $4\alpha^4 = \frac{\beta}{EJ}$, $\beta = KB$ (*B = larghezza della sezione della trave, K= modulo del terreno*) si ricorda che l'integrale generale è dato dalla somma di un integrale particolare I_p e dell'integrale dell'equazione omogenea associata I_o; se il carico q è rappresentato da un polinomio di ordine inferiore al *4°*, un integrale particolare è il seguente:

$$I_p = \frac{q}{4\alpha^4\ EJ} = \frac{q}{\beta} = \frac{q/B}{K} = *$$

* abbassamento corrispondente al comportamento a trave "*priva di rigidezza flessionale*" cioè "*assolutamente deformabile*"

Inoltre:

$$\eta_o^{IV} + 4\alpha^4 \eta_o = 0 \rightarrow z^4 + 4\alpha^4 z^o = o \text{ (eq. caratteristica)} \rightarrow$$

$$\rightarrow z^4 + 4\alpha^4 = 0$$

$$z^2 = \pm 2\alpha^2 i \quad z = \pm \alpha \sqrt{\pm 2i} = \pm \alpha \sqrt{\pm (i+1)^2}$$

da cui $z_1, z_2 = \pm \alpha\ (i+1)$

$$z_3, z_4 = \pm \alpha\ (i+1)\ i = \pm \alpha\ (i-1)$$

$$I_o = Ae^{\alpha x(i+1)} + Be^{-\alpha x(i+1)} + Ce^{\alpha x(i-1)} + De^{-\alpha x(i-1)}$$

e dalle formule di Eulero, isolando i moltiplicatori $e^{\alpha x}$ e $e^{-\alpha x}$: $\eta_o = e^{-\alpha x}\ (C_1 \operatorname{sen}\alpha\, x + C_2 \cos\alpha\, x) + e^{\alpha x}\ (C_3 \operatorname{sen}\alpha\, x + C_4 \cos\alpha\, x)$.