Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

A.A. 2018-2019

Prova scritta del 23.01.2019

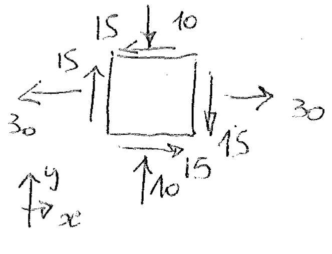
Testo 1

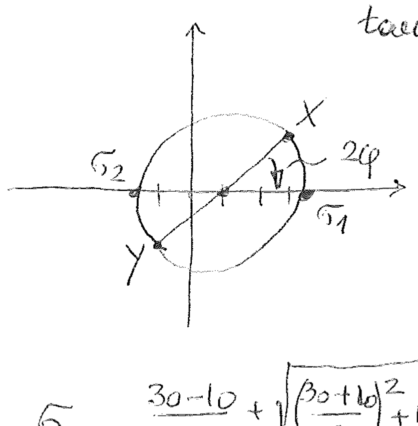
Nota: I risultati numerici (<u>in forma frazionaria o con 3 cifre decimali</u>) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Si prega di scrivere a penna.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n. 1 (6 punti)

È assegnato uno stato di sforzo (piano) avente le seguenti componenti: σ_x = + 30 MPa, σ_y = -10 MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ = -15 MPa.
Rappresentare graficamente le componenti su un elementino con lati paralleli agli assi x e y; nello spazio sottostante, tracciare il cerchio di Mohr identificando i punti, X e Y rappresentativi dei *vettori sforzo* agenti rispettivamente sulle giaciture di normale coincidente con i versi positivi degli assi x e y e determinare i valori degli sforzi principali σ_1 e σ_2 (ordinandoli in modo tale che $\sigma_1 > \sigma_2$). Stabilire poi di quale angolo φ occorre ruotare l'asse x per portarlo a coincidere con la direzione principale associata a σ_1.





$$\tan 2\varphi = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}$$

$X = (30, +15)$

$Y = (-10, -15)$

$C = (10, 0)$

$$\sigma_{1,2} = \frac{30-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30+10}{2}\right)^2 + 15^2}$$

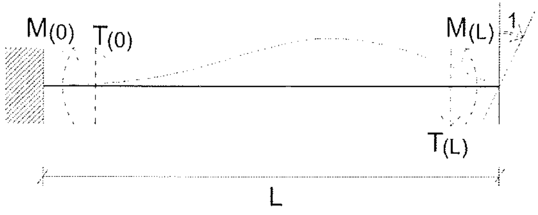
σ_1 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 35$ (MPa); σ_2 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -15$ (MPa);

φ = $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = 18°.435$ (°)

$2\varphi = \arctan \frac{3}{4}$ $\quad \varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

Esercizio n. 2 (6 punti)

Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, la trave non deformabile a taglio indicata in Figura, valutando le quantità indicate.



c.c in $x = 0$ = $v(0) = 0$; $v'(0) = 0$; c.c in $x = L$ = $v(L) = 0$; $v'(L) = +1$;

$v(x) = \dfrac{x^3}{L^2} - \dfrac{x^2}{L}$; $v'(x) = \dfrac{3x^2}{L^2} - \dfrac{2x}{L}$; $v''(x) = \dfrac{6x}{L^2} - \dfrac{2}{L}$; $v'''(x) = \dfrac{6}{L^2}$

$M(0) = -EJ\,v''(0) = +\dfrac{2EJ}{L}$; $T(0) = -EJ\,v'''(0) = -\dfrac{6EJ}{L^2}$;

$M(L) = -EJ\,v''(L) = -4\dfrac{EJ}{L}$; $T(L) = -EJ\,v'''(L) = -\dfrac{6EJ}{L^2}$;

Esercizio n. 3 (6 punti)

Data una piastra circolare piena (*senza foro*) con bordo (corrispondente a $r = 3R$) *appoggiato*, impostare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0.
È noto che l'integrale generale è dato da:

$$w(r) = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 + p_0 r^4/(64\,D),$$

dove D è la rigidezza flssionale della piastra e r la coordinata radiale.
Indicare le condizioni al contorno da applicare e cercare di determinare i valori delle costanti, fornendo l'espressione del taglio T_r al bordo.

c.c 1 = $w(r=0) = \text{finito} \Rightarrow A_3 = 0$; c.c 2 = $M_r(r=0) = \text{finito} \Rightarrow A_1 = 0;\ A_3 = 0$

c.c 3 = $w(r=3R) = 0$; c.c 4 = $M_r(r=3R) = 0 \quad \left[w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r)\right]_{r=3R} = 0$; (*)

$w(r) = -\dfrac{9(3+\nu)p_0R^2}{32D(1+\nu)}r^2 + \dfrac{81}{64}\dfrac{(5+\nu)p_0R^4}{D(1+\nu)} + \dfrac{p_0 r^4}{64D} = A_2 r^2 + A_4 + \dfrac{p_0 r^4}{64D}$;

$T_r(r = 3R) = D\left[\dfrac{d^3w}{dr^3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2w}{dr^2} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{dw}{dr}\right]_{r=2R} = \left.\dfrac{p_0 r}{2}\right|_{r=3R} = \dfrac{3p_0R}{2}$;

Esercizio n. 4 (6 punti)

Indicare le equazioni di equilibrio per la trave di Timoshenko (deformabile a taglio) e di Eulero-Bernoulli (non deformabile a taglio) in assenza di coppie esterne distribuite. Nel caso di comportamento elastico, indicare le espressioni del momento flettente M e del taglio T in funzione delle variabili cinematiche nei due casi.

(*) $A_2 = -\dfrac{9(3+\nu)p_0R^2}{32D(1+\nu)}$ $\qquad A_4 = \dfrac{81}{64}\dfrac{(5+\nu)p_0R^4}{D(1+\nu)}$

Trave di Timoshenko:

equazioni $\frac{dM(x)}{dx} = T(x)\ [+m(x)]$; $\frac{dT(x)}{dx} = p(x)$;

;

;

;

$M = -EJ\varphi'(x)$; $T = GA^*(v'(x) - \varphi(x))$;

Trave di Eulero-Bernoulli:

equazioni $\frac{dM(x)}{dx} = T(x)$; $\frac{dT(x)}{dx} = -p(x)$;

;

$\Rightarrow \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$;

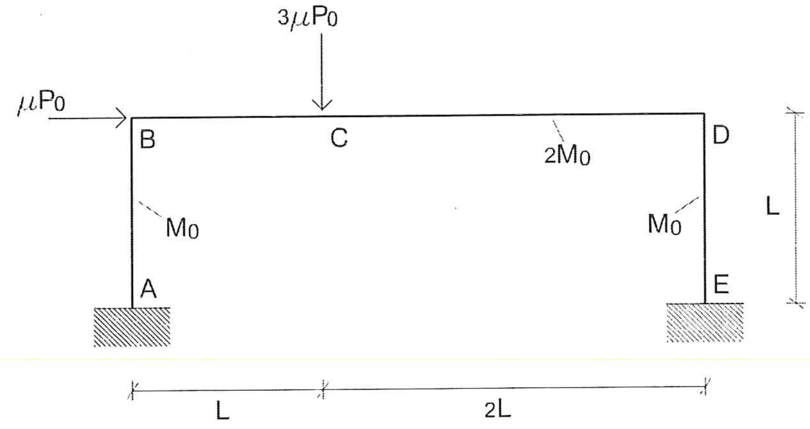
;

$M = -EJv''(x)$; $T = \frac{dM}{dx} = -EJv'''(x)$;

Esercizio n. 5 (6 punti)

Per il telaio indicato in Figura calcolare con il metodo cinematico il moltiplicatore dei carichi per i seguenti cinematismi:

1. Meccanismo di trave (cerniere plastiche in *B*, *C*, *D*);
2. Meccanismo di parete (cerniere plastiche in *A*, *B*, *D*, *E*);
3. Meccanismo combinato (cerniere plastiche in *A*, *C*, *D*, *E*).



Meccanismo 1: μ_1 = 1,5

Potenza dei carichi esterni = $6\mu M_0\varphi_0$ $= 6\mu P_0\varphi_0 L$; *Potenza dissipata* = $9M_0\varphi_0$;

Meccanismo 2: μ_2 = 4

Potenza dei carichi esterni = $\mu M_0\varphi_0$ $= \mu P_0\varphi_0 L$; *Potenza dissipata* = $4M_0\varphi_0$;

Meccanismo 3: μ_3 = 13/8 = 1,625

Potenza dei carichi esterni = $4M_0\varphi_0$; *Potenza dissipata* = $13/2\, M_0\varphi_0$;

$4P_0\varphi_0 L$

Esercizio n. 6 (bonus, 3 punti)

Data una piastra rettangolare soggetta a carico uniformemente distribuito p_0 con due bordi opposti appoggiati e da risolvere mediante serie semplice, indicare come si giunge alla determinazione della funzione $W_n(y)$; determinare poi le condizioni da imporre sulla suddetta funzione $W_n(y)$ nel caso che i restanti lati siano uno *libero* ($y = -b/2$) e l'altro *incastrato* ($y = +b/2$).
Nota: non è richiesto di determinare la soluzione, ma solo le condizioni al contorno.

c.c 1 ($y = - b/2$) = $T_y^K(x, -\frac{b}{2}) = 0$; c.c 2 ($y = - b/2$) = $M_y(x, -\frac{b}{2}) = 0$;

c.c 1 ($y = + b/2$) = $W(x, +\frac{b}{2}) = 0$; c.c 2 ($y = + b/2$) = $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x, +\frac{b}{2})} = 0$;

Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

A.A. 2018-2019

Prova scritta del 23.01.2019

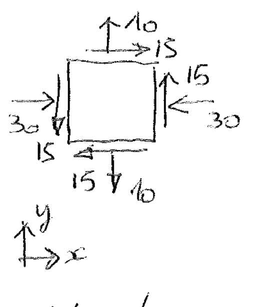
Testo 2

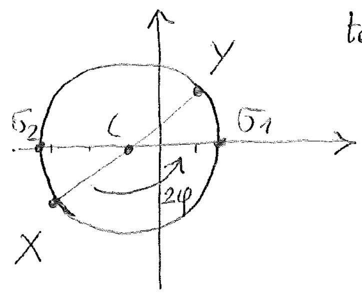
Nota: I risultati numerici (in forma frazionaria o con 3 cifre decimali) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Si prega di scrivere a penna.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n. 1 (6 punti)

È assegnato uno stato di sforzo (piano) avente le seguenti componenti: σ_x = -30 MPa, σ_y = +10 MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ = +15 MPa.
Rappresentare graficamente le componenti su un elementino con lati paralleli agli assi x e y; nello spazio sottostante, tracciare il cerchio di Mohr identificando i punti, X e Y rappresentativi dei *vettori sforzo* agenti rispettivamente sulle giaciture di normale coincidente con i versi positivi degli assi x e y e determinare i valori degli sforzi principali σ_1 e σ_2 (ordinandoli in modo tale che $\sigma_1 > \sigma_2$). Stabilire poi di quale angolo φ occorre ruotare l'asse x per portarlo a coincidere con la direzione principale associata a σ_1.





$$\tan 2\varphi = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}$$

$X = (-30,-15)$

$Y = (10,+15)$

$C = (-10,0)$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-30+10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30-10}{2}\right)^2 + 15^2}$$

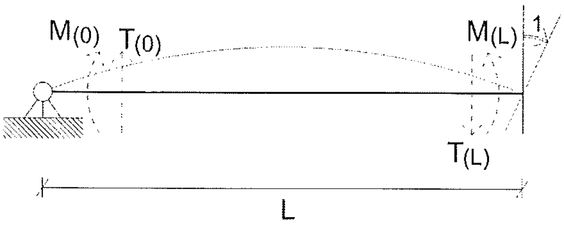
σ_1 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = 15$ (MPa); σ_2 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = -35$ (MPa);

φ = $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = 71.565$ (°)

$2\varphi = \arctan\frac{3}{4} + \pi \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right] + \frac{\pi}{2}$

Esercizio n. 2 (6 punti)

Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, la trave non deformabile a taglio indicata in Figura, valutando le quantità indicate.



c.c in $x = 0$ = $v(0) = 0$; $M(0) = -EJ\,v''(0) = 0 \Rightarrow v''(0) = 0$; c.c in $x = L$ = $v(L) = 0$; $v'(L) = 1$;

$v(x)$ = $\dfrac{x^3}{2L^2} - \dfrac{x}{2}$; $v'(x)$ = $\dfrac{3x^2}{2L^2} - \dfrac{1}{2}$; $v''(x) = \dfrac{3x}{L^2}$; $v'''(x) = \dfrac{3}{L^2}$;

$M(0)$ = $-EJ\,v''(0) = 0$; $T(0)$ = $-EJ\,v'''(0) = -\dfrac{3EJ}{L^2}$;

$M(L)$ = $-EJ\,v''(L) = -\dfrac{3EJ}{L}$; $T(L)$ = $-EJ\,v'''(L) = -\dfrac{3EJ}{L^2}$;

Esercizio n. 3 (6 punti)

Data una piastra circolare piena (*senza foro*) con bordo (corrispondente a $r = 2R$) *appoggiato*, impostare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0.
È noto che l'integrale generale è dato da:

$$w(r) = A_1\, r^2 \ln r + A_2\, r^2 + A_3 \ln r + A_4 + p_0\, r^4/(64\, D),$$

dove D è la rigidezza flssionale della piastra e r la coordinata radiale.
Indicare le condizioni al contorno da applicare e cercare di determinare i valori delle costanti, fornendo l'espressione della rotazione w' al bordo.

c.c 1 = $w(r=0)$ = finito $\Rightarrow A_3 = 0$; c.c 2 = $M_r(r=0)$ = finito $\Rightarrow A_1 = 0$; $A_3 = 0$;

c.c 3 = $w(r=2R) = 0$; c.c 4 = $M_r(r=2R) = 0$ $\left[w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r)\right]_{r=2R} = 0$; (*)

$w(r)$ = $A_2 r^2 + A_4 + \dfrac{p_0 r^4}{64D} = -\dfrac{(3+\nu)\,p_0 R^2}{8D(1+\nu)} r^2 + \dfrac{5+\nu}{4D}\,\dfrac{p_0 R^4}{1+\nu} + \dfrac{p_0 r^4}{64D}$;

$w'(r = 2R)$ = $\left[-\dfrac{(3+\nu)\,p_0 R^2}{4D(1+\nu)}\, r + \dfrac{p_0 r^3}{16 D}\right]_{r=2R} = -\dfrac{p_0 R^3}{D(1+\nu)}$;

Esercizio n. 4 (6 punti)

Indicare le equazioni di equilibrio per la trave di Timoshenko (deformabile a taglio) e di Eulero-Bernoulli (non deformabile a taglio) in assenza di coppie esterne distribuite.
Nel caso di comportamento elastico, indicare le espressioni del momento flettente M e del taglio T in funzione delle variabili cinematiche nei due casi.

(*) $A_2 = -\dfrac{(3+\nu)\,p_0 R^2}{8D(1+\nu)}$; $A_4 = \dfrac{(5+\nu)\,p_0 R^4}{4D(1+\nu)}$

Trave di Timoshenko:

equazioni $\dfrac{dM(x)}{dx} = T(x)\ [+\ m(x)]$; $\dfrac{dT(x)}{dx} = p(x)$;

;

;

;

$M =$ $-EJ\,\varphi'(x)$; $T =$ $GA^*\,(v'(x) - \varphi(x))$;

Trave di Eulero-Bernoulli:

equazioni $\dfrac{dM(x)}{dx} = T(x)$; $\dfrac{dT(x)}{dx} = -p(x)$;

;

$\Rightarrow \dfrac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$;

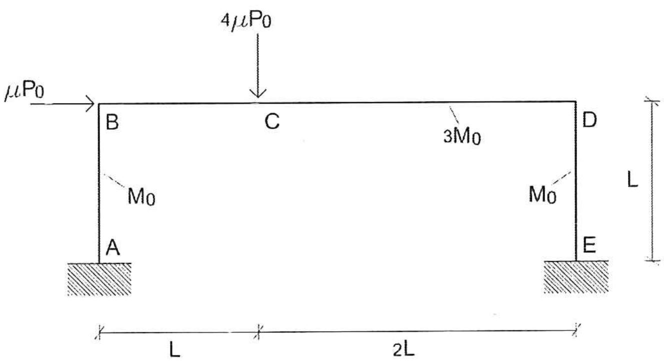
;

$M =$ $-EJ\,v''(x)$; $T =$ $\dfrac{dM}{dx} = -EJ\,v'''(x)$;

Esercizio n. 5 (6 punti)

Per il telaio indicato in Figura calcolare con il metodo cinematico il moltiplicatore dei carichi per i seguenti cinematismi:

1. Meccanismo di trave (cerniere plastiche in *B*, *C*, *D*);
2. Meccanismo di parete (cerniere plastiche in *A*, *B*, *D*, *E*);
3. Meccanismo combinato (cerniere plastiche in *A*, *C*, *D*, *E*).



Meccanismo 1: $\mu_1 =$ 1.5

Potenza dei carichi esterni $=$ $8\mu M_0\varphi_0$ $= 8\mu_1 P_0 \varphi_0 L$; *Potenza dissipata* $=$ $12 M_0 \varphi_0$;

Meccanismo 2: $\mu_2 =$ 4

Potenza dei carichi esterni $=$ $\mu M_0 \varphi_0$ $= \mu P_0 \varphi_0 L$; *Potenza dissipata* $=$ $4 M_0 \varphi_0$;

Meccanismo 3: $\mu_3 =$ 8/5

Potenza dei carichi esterni $=$ $5\mu M_0 \varphi_0$; *Potenza dissipata* $=$ $8 M_0 \varphi_0$;

$= 5\mu_0 P_0 \varphi_0 L$

Esercizio n. 6 (bonus, 3 punti)

Data una piastra rettangolare soggetta a carico uniformemente distribuito p_0 con due bordi opposti appoggiati e da risolvere mediante serie semplice, indicare come si giunge alla determinazione della funzione $W_n(y)$; determinare poi le condizioni da imporre sulla suddetta funzione $W_n(y)$ nel caso che i restanti lati siano uno *appoggiato* ($y = - b/2$) e l'altro *incastrato* ($y = + b/2$).
Nota: non è richiesto di determinare la soluzione, ma solo le condizioni al contorno.

c.c 1 ($y = - b/2$) = $W\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0$; c.c 2 ($y = - b/2$) = $M_y\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0$;

c.c 1 ($y = + b/2$) = $W\left(x, +\frac{b}{2}\right) = 0$; c.c 2 ($y = + b/2$) = $\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{\left(x, +\frac{b}{2}\right)} = 0$;