Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

A.A. 2018-2019

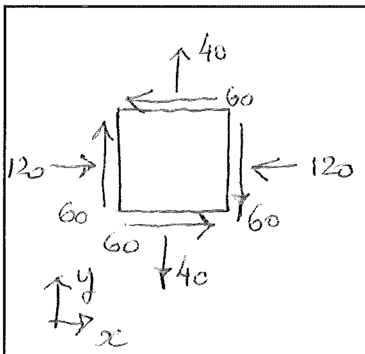
Prova scritta del 09.01.2019
Testo 1

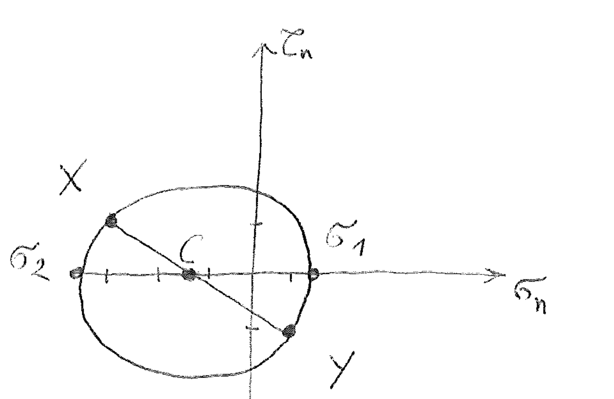
Nota: I risultati numerici (<u>in forma frazionaria o con 3 cifre decimali</u>) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Si prega di scrivere a penna.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n. 1 (6 punti)

È assegnato uno stato di sforzo (piano) avente le seguenti componenti: σ_x = -120 MPa, σ_y = +40 MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ = -60 MPa.
Rappresentare graficamente le componenti su un elementino con lati paralleli agli assi x e y; nello spazio sottostante, tracciare il cerchio di Mohr identificando i punti, X e Y rappresentativi dei *vettori sforzo* agenti rispettivamente sulle giaciture di normale coincidente con i versi positivi degli assi x e y e determinare i valori degli sforzi principali σ_1 e σ_2 (ordinandoli in modo tale che $\sigma_1 > \sigma_2$)





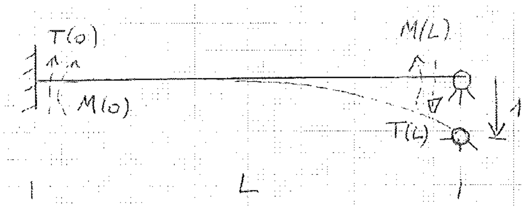
$X = (-120, +60)$
$Y = (40, -60)$
$C = (-40, 0)$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-120+40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-120-40}{2}\right)^2 + 60^2}$$

σ_1 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = +60$ (MPa); σ_2 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -140$ (MPa);

Esercizio n. 2 (6 punti)

Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, la trave non deformabile a taglio indicata in Figura, valutando le quantità indicate.



c.c in $x = 0$ = $v(0) = 0$; $v'(0) = 0$; c.c in $x = L$ = $v(L) = 1$; $-EJ\,v''(L) = 0 \Rightarrow v''(L) = 0$

$v(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2}$; $v'(x) = -\frac{3}{2}\frac{x^2}{L^3} + 3\frac{x}{L^2}$; $v''(x) = -3\frac{x}{L^3} + \frac{3}{L^2}$; $v'''(x) = -\frac{3}{L^3}$

$M(0) = -EJ\,v''(0) = -\frac{3EJ}{L^2}$; $T(0) = -EJ\,v'''(0) = +\frac{3EJ}{L^3}$;

$M(L) = -EJ\,v''(L) = \frac{(3-3)EJ}{L^2} = 0$; $T(L) = -EJ\,v'''(L) = +\frac{3EJ}{L^3}$;

Esercizio n. 3 (6 punti)

Data una piastra circolare forata con bordo interno (corrispondente a $R_i = R$) *incastrato* e bordo esterno (corrispondente a $R_e = 3R$) *appoggiato*, impostare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0.

È noto che l'integrale generale è dato in questo caso da:

$$w(r) = A_1\, r^2 \ln r + A_2\, r^2 + A_3 \ln r + A_4 + p_0\, r^4/(64\, D),$$

dove D è la rigidezza flssionale della piastra e r la coordinata radiale.

Indicare le condizioni al contorno da applicare e cercare di determinare i valori delle costanti, fornendo l'espressione della rotazione $w'(R_e)$ al bordo esterno.

c.c 1 = $w(R) = 0$; c.c 2 = $w'(R) = 0$;

$A_1 R^2 \ln R + A_2 R^2 + A_3 \ln R + A_4 + p_0 R^4/64D = 0$ $\quad A_1(R + 2R\ln R) + 2A_2 R + A_3/R + p_0 R^3/16D = 0$

c.c 3 = $w(3R) = 0$; c.c 4 = $M_r(3R) = 0$;

$A_1\, 9R^2 \ln 3R + A_2\, 9R^2 + A_3 \ln 3R + A_4 + \frac{81}{64}\frac{p_0 R^4}{D} = 0$ $\quad -D\left[A_1\left[(3+\nu) + 2(1+\nu)\ln R\right] + 2A_2(1+\nu) + A_3 \cdot \frac{(\nu-1)}{9R^2} + \frac{9\, p_0 R^2}{16D}(3+\nu)\right] = 0$

$w(r)$ = ;

$w'(R_e) = A_1(3R + 6R\ln R) + A_2(6R) + A_3\frac{1}{3R} + \frac{27}{16}\frac{p_0 R^3}{D}$;

Esercizio n. 4 (6 punti)

Indicare le equazioni di equilibrio per piastre di Reissner-Mindlin (deformabili a taglio) e di Kirchhoff (non deformabili a taglio).

Nel caso di comportamento elastico, indicare le espressioni del momento flettente M_x in funzione delle variabili cinematiche nei due casi.

Piastra di Reissner-Mindlin:

equazioni $\dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0$; $\dfrac{\partial M_x}{\partial x} + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x - m_x = 0$;

$\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial M_y}{\partial y} - T_y - m_y = 0$;

$M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x) = -D\left(\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right)$;

Piastra di Kirchhoff:

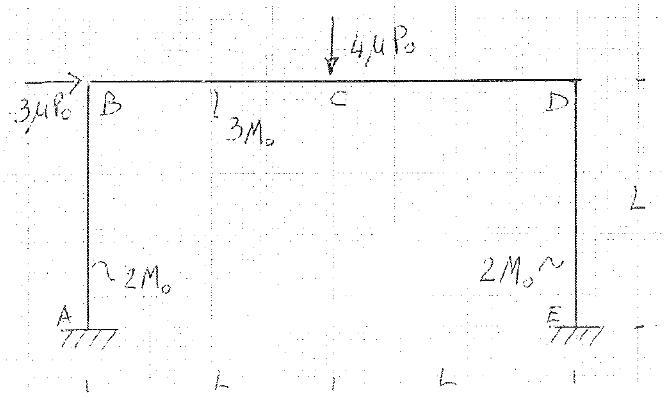
equazioni $\dfrac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$;

$M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$;

Esercizio n. 5 (6 punti)

Per il telaio indicato in Figura calcolare con il metodo cinematico il moltiplicatore dei carichi per i seguenti cinematismi:

1. Meccanismo di trave (cerniere plastiche in *B*, *C*, *D*);
2. Meccanismo di parete (cerniere plastiche in *A*, *B*, *D*, *E*);
3. Meccanismo combinato (cerniere plastiche in *A*, *C*, *D*, *E*).



Meccanismo 1: $\mu_1 = \dfrac{10}{4} = 2{,}500$

Potenza dei carichi esterni = $4\mu_1 P_0 \dot\varphi L$; *Potenza dissipata* = $2M_0\dot\varphi + 3M_0 \cdot 2\dot\varphi + 2M_0\dot\varphi = 10 M_0 \dot\varphi$

Meccanismo 2: $\mu_2 = \dfrac{8}{3} = 2{,}666$

Potenza dei carichi esterni = $3\mu_2 P_0 \dot\varphi L$; *Potenza dissipata* = $2M_0\dot\varphi \cdot 4 = 8M_0\dot\varphi$;

Meccanismo 3: $\mu_3 = \dfrac{14}{7} = 2{,}000$

Potenza dei carichi esterni = $3\mu_3 P_0 \dot\varphi L + 4\mu_3 P_0 \dot\varphi L = 7\mu_3 P_0 \dot\varphi L$; *Potenza dissipata* = $2M_0\dot\varphi + 3M_0 \cdot 2\dot\varphi + 2M_0 \cdot 2\dot\varphi + 2M_0\dot\varphi = 14 M_0 \dot\varphi$

Esercizio n. 6 (bonus, 3 punti)

Data una piastra rettangolare soggetta a carico uniformemente distribuito p_0 con due bordi opposti appoggiati e da risolvere mediante serie semplice, indicare come si giunge alla determinazione della funzione $W_n(y)$; determinare poi le condizioni da imporre sulla suddetta funzione $W_n(y)$ nel caso che i restanti lati siano uno appoggiato (y = - b/2) e l'altro libero (y = + b/2).
Nota: non è richiesto di determinare la soluzione, ma solo le condizioni al contorno.

c.c 1 (y = - b/2) = $W(x, -\frac{b}{2}) = 0$; c.c 2 (y = - b/2) = $M_y(x, -\frac{b}{2}) = 0$;

c.c 1 (y = + b/2) = $M_y(x, +\frac{b}{2}) = 0$; c.c 2 (y = + b/2) = $T_y^K(x, +\frac{b}{2}) = 0$;

Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

A.A. 2018-2019

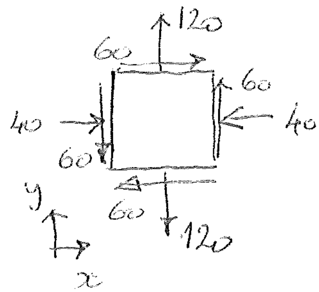
Prova scritta del 09.01.2019
Testo 2

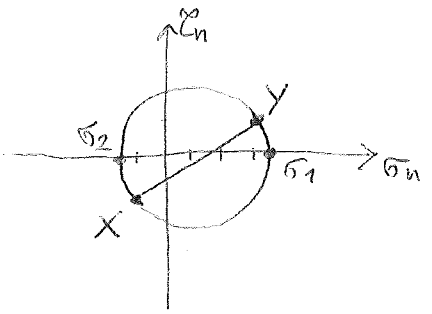
Nota: I risultati numerici (in forma frazionaria o con 3 cifre decimali) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Si prega di scrivere a penna.

Allievo:... Matricola:.......

Esercizio n. 1 (6 punti)

È assegnato uno stato di sforzo (piano) avente le seguenti componenti: σ_x = -40 MPa, σ_y = +120 MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ = +60 MPa.
Rappresentare graficamente le componenti su un elementino con lati paralleli agli assi x e y; nello spazio sottostante, tracciare il cerchio di Mohr identificando i punti, X e Y rappresentativi dei *vettori sforzo* agenti rispettivamente sulle giaciture di normale coincidente con i versi positivi degli assi x e y e determinare i valori degli sforzi principali σ_1 e σ_2 (ordinandoli in modo tale che $\sigma_1 > \sigma_2$)





$X = (-40, -60)$

$Y = (+120, +60)$

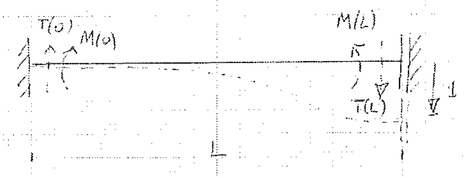
$C = (40, 0)$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-40+120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40-120}{2}\right)^2 + 60^2}$$

σ_1 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ = 140 (MPa); σ_2 = $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ = -60 (MPa);

Esercizio n. 2 (6 punti)

Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, la trave non deformabile a taglio indicata in Figura, valutando le quantità indicate.



c.c in $x = 0$ = $v(0) = 0$; $v'(0) = 0$; c.c in $x = L$ = $v(L) = 1$; $v'(L) = 0$;

$v(x) = -\frac{2x^3}{L^3} + 3\frac{x^2}{L^2}$; $v'(x) = -6\frac{x^2}{L^3} + 6\frac{x}{L^2}$; $v''(x) = -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}$; $v'''(x) = \frac{-12}{L^3}$;

$M(0) = -EJ\,v''(0) = \frac{-6EJ}{L^2}$; $T(0) = -EJ\,v'''(0) = +\frac{12EJ}{L^3}$;

$M(L) = -EJ\,v''(L) = +\frac{6EJ}{L^2}$; $T(L) = -EJ\,v'''(L) = +\frac{12EJ}{L^3}$;

Esercizio n. 3 (6 punti)

Data una piastra circolare forata con bordo interno (corrispondente a $R_i = R$) *libero* e bordo esterno (corrispondente a $R_e = 3R$) *incastrato*, impostare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0.

È noto che l'integrale generale è dato in questo caso da:

$$w(r) = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 + p_0 r^4/(64\, D),$$

dove D è la rigidezza flssionale della piastra e r la coordinata radiale.

Indicare le condizioni al contorno da applicare e cercare di determinare i valori delle costanti, fornendo l'espressione della rotazione $w'(R_i)$ al bordo interno.

c.c 1 = $M_r(R) = 0$; c.c 2 = $T_r(R) = 0$ $\quad D\left(\frac{4A_1}{R} + \frac{p_0 R}{2D}\right) = 0$;

$-D\left\{A_1[(3+\nu) + 2(1+\nu)\ln R] + 2A_2(1+\nu) + \frac{A_3}{R^2}(\nu-1) + \frac{p_0 R^2}{16 D}(3+\nu)\right\} = 0$

c.c 3 = $w(3R) = 0$; c.c 4 = $w'(3R) = 0$;

$A_1 9R^2 \ln 3R + A_2 9R^2 + A_3 \ln 3R + A_4 + \frac{81}{64}\frac{p_0 R^4}{D} = 0$ $\quad 3A_1(R + 2R\ln 3R) + 6A_2 R + \frac{A_3}{3R} + \frac{27}{16}\frac{p_0 R^3}{D} = 0$

$w(r)$ = ...;

$w'(R_i) = A_1(R + 2R\ln R) + A_2 2R + \frac{A_3}{R} + \frac{1}{16}\frac{p_0 R^3}{D}$;

Esercizio n. 4 (6 punti)

Indicare le equazioni di equilibrio per piastre di Reissner-Mindlin (deformabili a taglio) e di Kirchhoff (non deformabili a taglio).

Nel caso di comportamento elastico, indicare le espressioni del momento flettente M_y in funzione delle variabili cinematiche nei due casi.

Piastra di Reissner-Mindlin:

equazioni $\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0$; $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x - m_x = 0$;

;

$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y - m_y = 0$;

;

$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) = -D\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right)$;

Piastra di Kirchhoff:

equazioni $\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$;

;

;

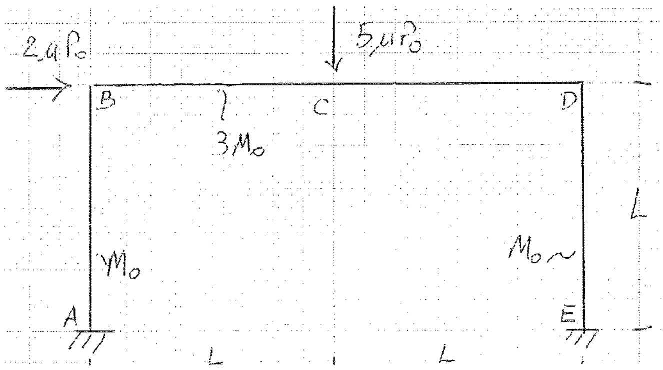
;

$M_x = +D(\chi_x + \nu \chi_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$;

Esercizio n. 5 (6 punti)

Per il telaio indicato in Figura calcolare con il metodo cinematico il moltiplicatore dei carichi per i seguenti cinematismi:

1. Meccanismo di trave (cerniere plastiche in *B*, *C*, *D*);
2. Meccanismo di parete (cerniere plastiche in *A*, *B*, *D*, *E*);
3. Meccanismo combinato (cerniere plastiche in *A*, *C*, *D*, *E*).



Meccanismo 1: $\mu_1 = \frac{8}{5} = 1.600$

Potenza dei carichi esterni = $5\mu_1 P_0 \dot{\varphi} L$; *Potenza dissipata* = $2(M_0 \dot{\varphi}) + 3M_0 \cdot 2\dot{\varphi} = 8M_0 \dot{\varphi}$

Meccanismo 2: $\mu_2 = \frac{4}{2} = 2.000$

Potenza dei carichi esterni = $2\mu_2 P_0 \dot{\varphi} L$; *Potenza dissipata* = $4M_0 \dot{\varphi}$;

Meccanismo 3: $\mu_3 = \frac{10}{7} = 1.429$

Potenza dei carichi esterni = $2\mu_3 P_0 \dot{\varphi} L + 5\mu_3 P_0 \dot{\varphi} L$ *Potenza dissipata* = $2M_0 \dot{\varphi} + 3M_0 \cdot 2\dot{\varphi} + M_0 2\dot{\varphi}$; $= 10 M_0 \dot{\varphi}$

$= 7\mu_3 P_0 \dot{\varphi} L$

Esercizio n. 6 (bonus, 3 punti)

Data una piastra rettangolare soggetta a carico uniformemente distribuito p_0 con due bordi opposti appoggiati e da risolvere mediante serie semplice, indicare come si giunge alla determinazione della funzione $W_n(y)$; determinare poi le condizioni da imporre sulla suddetta funzione $W_n(y)$ nel caso che i restanti lati siano uno incastrato ($y = - b/2$) e l'altro libero ($y = + b/2$).
Nota: non è richiesto di determinare la soluzione, ma solo le condizioni al contorno.

c.c 1 ($y = - b/2$) = $w(x, -\frac{b}{2}) = 0$; c.c 2 ($y = - b/2$) = $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x, -\frac{b}{2})} = 0$;

c.c 1 ($y = + b/2$) = $M_y(x, +\frac{b}{2}) = 0$; c.c 2 ($y = + b/2$) = $T_y^k(x, +\frac{b}{2}) = 0$;