Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

A.A. 2018-2019

Test Prova scritta del 20.12.2018

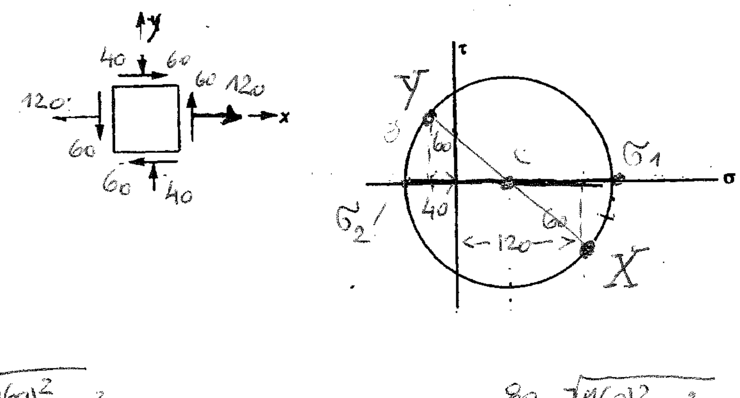
Testo 1

Nota: I risultati numerici (<u>in forma frazionaria o con 3 cifre decimali</u>) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Si prega di scrivere a penna.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n. 1 (6 punti)

È assegnato uno stato di sforzo (piano) avente le seguenti componenti: $\sigma_x = 120$ MPa, $\sigma_y = -40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 60$ MPa.
Rappresentare graficamente le componenti sull'elementino rappresentato in Figura; tracciare il cerchio di Mohr identificando i punti, X e Y rappresentativi dei *vettori sforzo* agenti rispettivamente sulle giaciture di normale coincidente con i versi positivi degli assi x e y e determinare i valori degli sforzi principali σ_1 e σ_2 (con $\sigma_1 > \sigma_2$)



C = (40,0)

$\sigma_1 = \frac{80}{2} + \sqrt{\left(\frac{160}{2}\right)^2 + 60^2} = 140$ (MPa); $\sigma_2 = \frac{80}{2} - \sqrt{\left(\frac{160}{2}\right)^2 + 60^2} = -60$ (MPa);

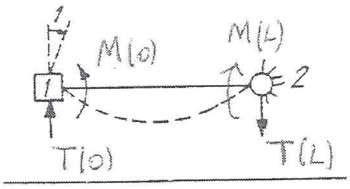
Esercizio n. 2 (6 punti)

Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, la trave non deformabile a taglio indicata in Figura, valutando le quantità indicate.

$v(x) = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4$

$A_1 = \frac{1}{2L^2}$

$v''(x) = 3\frac{x}{L^2} - \frac{3}{L}$



$A_2 = -\frac{3}{2L}$

$v'''(x) = \frac{3}{L^2}$

$A_3 = 1$

$A_4 = 0$

c.c in $x = 0$ = $v(0)=0$; $v'(0)=1$; c.c in $x = L$ = $v(L)=0$; $-EJv''(L)=0 \Rightarrow v''(L)=0$;

$v(x)$ = $\frac{x^3}{2L^2} - \frac{3x^2}{2L} + 1\cdot x$; $v'(x)$ = $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 3\frac{x}{L} + 1$;

$M(0)$ = $-EJv''(0) = \frac{3EJ}{L}$; $T(0)$ = $-EJv'''(0) = -\frac{3EJ}{L^2}$;

$M(L)$ = $-EJv''(L) = 0$; $T(L)$ = $-EJv'''(L) = -\frac{3EJ}{L^2}$;

Esercizio n. 3 (6 punti)

Data una piastra circolare forata con bordo interno (corrispondente a $R_i = R$) *appoggiato* e bordo esterno (corrispondente a $R_e = 10R$) *libero*, determinare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0.
È noto che l'integrale generale è dato in questo caso da:

$$w(r) = A_1\, r^2 \ln r + A_2\, r^2 + A_3 \ln r + A_4 + p_0\, r^4/(64\, D),$$

dove D è la rigidezza flssionale della piastra e r la coordinata radiale.
Indicare le condizioni al contorno da applicare e cercare di ottenere la soluzione, trovando il valore dello spostamento $w(R_e)$ al bordo esterno.

c.c 1 = $w(r=R)=0$; c.c 2 = $M_r(r=R)=0 \Rightarrow -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)\Big|_{r=R} = 0$;

c.c 3 = $T_r(r=10R)=0$ $\Rightarrow D\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)\Big|_{r=10R} = 0$; c.c 4 = $M_r(r=10R)=0 \Rightarrow -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{R}\frac{dw}{dr}\right)\Big|_{r=10R} = 0$

$w(r)$ = ...;

$w(R_e)$ = $A_1(10R)^2 \ln(10R) + A_2(10R)^2 + A_3 \ln(10R) + A_4 + \frac{p_0 (10R)^4}{64D}$; (*) VEDI FOGLIO

Esercizio n. 4 (6 punti)

Indicare le condizioni al contorno per piastre di Reissner-Mindlin (deformabili a taglio) e di Kirchhoff (non deformabili a taglio) in assenza di spigoli e di coppie esterne distribuite e spiegarne l'origine.

Piastra di Reissner-Mindlin:

c.c ① $\varphi_n = \bar{\varphi}_n$ oppure $M_n = 0$ ② $\varphi_s = \bar{\varphi}_s$ oppure $M_{sn} = 0$;
③ $w = \bar{w}$ oppure $T_n = V$

Piastra di Kirchhoff:

c.c ① $\frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\varphi}_n$ oppure $M_n = 0$; ② $w = \bar{w}$ oppure

$T_n + \frac{\partial M_{sn}}{\partial s} = V$

$$W(r) = A_1 r^2 \ln r + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 + \frac{p_0 r^4}{64D}$$

$$M_r(r) = -D\left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$T_r(r) = +D\left(\frac{d^3 w(r)}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 w(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw(r)}{dr}\right)$$

$$\frac{dw(r)}{dr} = A_1(2r\ln r + r) + A_2(2r) + A_3\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{p_0 r^3}{16D}$$

$$\frac{d^2 w(r)}{dr^2} = A_1(2\ln r + 3) + A_2(2) - A_3\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{3 p_0 r^2}{16D}$$

$$\frac{d^3 w(r)}{dr^3} = A_1\left(\frac{2}{r}\right) + A_3\left(\frac{2}{r^3}\right) + \frac{3 p_0 r}{8D}$$

Pertanto

c.c. 1 $\rightarrow A_1 R^2 \ln R + A_2 R^2 + A_3 \ln R + A_4 + \frac{p_0 R^4}{64D} = 0$ [1]

c.c. 2 $\rightarrow A_1\left[2(\ln R)(1+\nu) + (3+\nu)\right] + A_2\left[2(1+\nu)\right] + A_3 \cdot \frac{1}{R^2}(-1+\nu) + \frac{p_0 R^2}{16D}(3+\nu) = 0$ [2]

c.c. 3 $\rightarrow A_1 \frac{2}{5R} + \frac{5 p_0 R}{D} = 0$ [3]

c.c. 4 $\rightarrow A_1\left[2(\ln 10R)(1+\nu) + (3+\nu)\right] + A_2\left[2(1+\nu)\right] + A_3 \frac{(-1+\nu)}{100R^2} + \frac{25}{4}\frac{p_0 R^2}{D}(3+\nu) = 0$ [4]

La soluzione del sistema è laboriosa: dalla [3] segue:

$$A_1 = -\frac{25}{2}\frac{p_0 R^2}{D}$$

poi considerando [4]−[2] (sottrazione membro a membro) si trova

$$A_3 = \frac{100}{99}\frac{p_0 R^4}{D(1-\nu)}\left[25(1+\nu)\ln 10 - \frac{99}{16}(3+\nu)\right]$$

quindi sostituendo A_1 e A_3 nella [2] si trova:

$$A_2 = \frac{p_0 R^2}{D}\left[\frac{25}{2}\left(\ln R + \frac{100}{99}\ln 10\right) + \frac{99}{32}\frac{3+\nu}{1+\nu}\right]$$

e infine dalla [1] si ricava

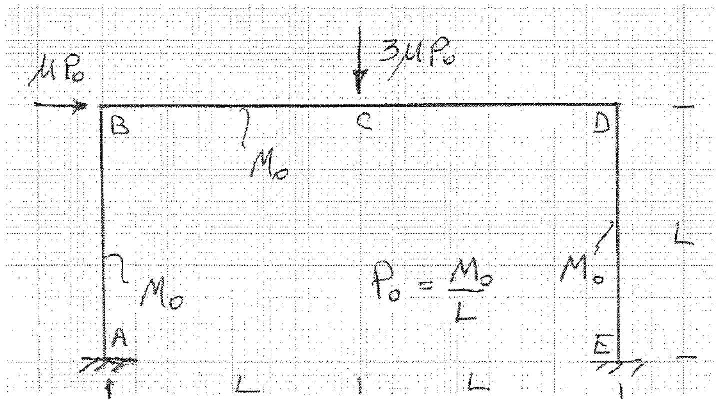
$$A_4 = -\frac{p_0 R^4}{D}\left\{\frac{1250}{99}\ln 10\left[1 + 2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\ln R\right] + \frac{595+199\nu}{64(1+\nu)} - \frac{25}{4}\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\right)\ln R\right\}$$

COME CONSEGUENZA DELL'ANNULLARSI DEI TERMINI AL CONTORNO NELL'EQUAZIONE DEL P.L.V. IN BASE ALLE IPOTESI CINEMATICHE INTRODOTTE.

Esercizio n. 5 (6 punti)

Per il telaio indicato in Figura calcolare con il metodo cinematico il moltiplicatore dei carichi per i seguenti cinematismi:

1. Meccanismo di trave (cerniere plastiche in *B*, *C*, *D*);
2. Meccanismo di parete (cerniere plastiche in *A*, *B*, *D*, *E*);
3. Meccanismo combinato (cerniere plastiche in *A*, *C*, *D*, *E*).



Meccanismo 1: μ_1 = 4/3 = 1.333

Potenza dei carichi esterni = $3\mu_1 P_0 L \dot{\varphi}$; *Potenza dissipata* = $4 M_0 \dot{\varphi}$;

Meccanismo 2: μ_2 = 4

Potenza dei carichi esterni = $\mu_2 P_0 L \dot{\varphi}$; *Potenza dissipata* = $4 M_0 \dot{\varphi}$;

Meccanismo 3: μ_3 = 3/2 = 1.500

Potenza dei carichi esterni = $4\mu_3 P_0 L \dot{\varphi}$; *Potenza dissipata* = $6 M_0 \dot{\varphi}$;

Esercizio n. 6 (bonus, 3 punti)

Data una piastra rettangolare soggetta a carico uniformemente distribuito p_0 con due bordi opposti appoggiati e da risolvere mediante serie semplice, determinare le condizioni da imporre sulla funzione $W_n(y)$ nel caso che i restanti lati siano uno appoggiato ($y = - b/2$) e l'altro libero ($y = + b/2$).
Nota: non è richiesto di determinare la soluzione, ma solo le condizioni al contorno.

c.c 1 ($y = - b/2$) = $W_n(y=-\frac{b}{2})=0$;	c.c 2 ($y = - b/2$) = $M_y(y=-\frac{b}{2})=0$ Ⓐ;
c.c 1 ($y = + b/2$) = $T_y^K(y=+\frac{b}{2})=0$ Ⓑ;	c.c 2 ($y = + b/2$) = $M_y(y=+\frac{b}{2})=0$ Ⓒ;

Tenuto conto che $w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) \sin\frac{n\pi x}{a}$

Ⓐ $M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \Rightarrow M_y = -D\sum_{n=1}^{\infty}\left[W_n''(y)-\nu\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_n(y)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}$

$\Rightarrow \left[W_n''(y)-\nu\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_n(y)\right]_{y=-\frac{b}{2}} = 0$

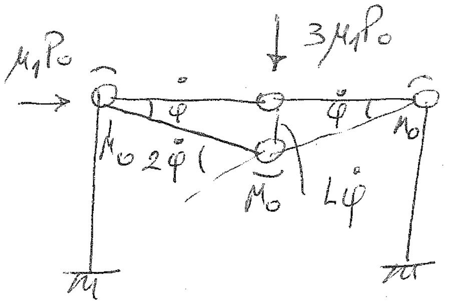
Ⓑ $T_y^K = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right) \Rightarrow T_y^K = -D\sum_{n=1}^{\infty}\left[W_n'''(y)-(2-\nu)\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_n'(y)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}$

$\Rightarrow \left[W_n'''(y)-(2-\nu)\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_n'(y)\right]_{y=+\frac{b}{2}} = 0$

Ⓒ $M_y = \dots$ (vedi sopra)

$\Rightarrow \left[W_n''(y)-\nu\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_n(y)\right]_{y=+\frac{b}{2}} = 0$

Meccanismo 1



Potenza carichi esterni:

$\mu_1 P_0 \cdot 0 + 3\mu_1 P_0 \cdot L\dot\varphi = 3\mu_1 P_0 L\dot\varphi$

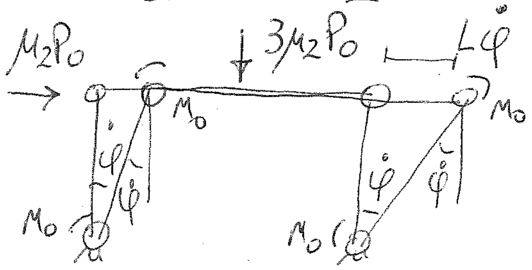
Potenza dissipata:

$M_0 \cdot \dot\varphi + M_0 \cdot 2\dot\varphi + M_0 \cdot \dot\varphi = 4 M_0 \dot\varphi$

$\Rightarrow 3\mu_1 P_0 L\dot\varphi = 4 M_0 \dot\varphi$ ovvero, poiché $P_0 L = M_0$

$3\mu_1 \cancel{M_0}\cancel{\dot\varphi} = 4\cancel{M_0}\cancel{\dot\varphi}$ $\quad 3\mu_1 = 4 \quad \mu_1 = \frac{4}{3}$

Meccanismo 2



Potenza carichi esterni:

$\mu_2 P_0 L\dot\varphi + 3\mu_2 P_0 \cdot 0 = \mu_2 P_0 L\dot\varphi$

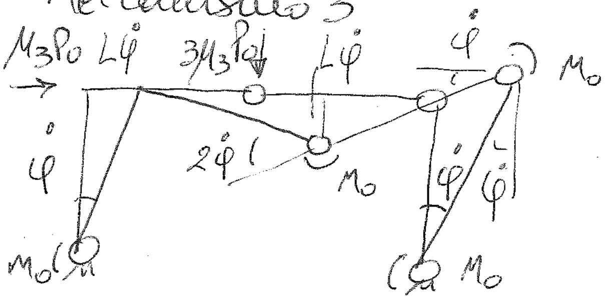
Potenza dissipata:

$4 M_0 \cdot \dot\varphi = 4 M_0 \dot\varphi$

$\Rightarrow \mu_2 P_0 L\dot\varphi = 4 M_0 \dot\varphi$ $\quad \therefore$

$\mu_2 \cancel{M_0}\cancel{\dot\varphi} = 4\cancel{M_0}\cancel{\dot\varphi}$ $\quad \mu_2 = 4$

Meccanismo 3



Potenza carichi esterni:

$\mu_3 P_0 L\dot\varphi + 3\mu_3 P_0 L\dot\varphi = 4\mu_3 P_0 L\dot\varphi$

Potenza dissipata:

$M_0 \dot\varphi + 2M_0 (2\dot\varphi) + M_0 \dot\varphi = 6 M_0 \dot\varphi$

$\Rightarrow 4\mu_3 P_0 L\dot\varphi = 6 M_0 \dot\varphi$ $\quad \therefore$

$4\mu_3 \cancel{M_0}\cancel{\dot\varphi} = 6\cancel{M_0}\cancel{\dot\varphi}$ $\quad 4\mu_3 = 6 \quad \mu_3 = \frac{3}{2}$