

leone corradi dell'acqua

meccanica delle strutture
il comportamento dei mezzi continui

McGraw-Hill Libri Italia srl

Milano • New York • St. Louis • San Francisco • Oklahoma City • Auckland
Bogotá • Caracas • Hamburg • Lisboa • London • Madrid • Montreal • New Delhi
Paris • San Juan • São Paulo • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

ma di riferimento. Pure indipendenti saranno quindi i coefficienti (2.125a), cui ci si riferisce come agli *invarianti di deformazione* (rispettivamente, lineare, quadratico e cubico). Nel riferimento principale la loro espressione diviene

$$I_1 = e_1 + e_{II} + e_{III} \quad I_2 = e_1 e_{II} + e_{II} e_{III} + e_{III} e_1 \quad I_3 = e_1 e_{II} e_{III} \quad (2.126b)$$

2.4.4 VARIAZIONE DI VOLUME E VARIAZIONE DI FORMA

Si consideri il parallelepipedo di Figura 2.27, con spigoli paralleli agli assi principali. Questi valgano dx_α nella configurazione indeformata; a deformazione avvenuta la loro lunghezza risulterà pari a quella iniziale moltiplicata per $(1 + e_\alpha)$. Nelle due configurazioni il volume del parallelepipedo vale quindi

$$d\bar{V} = dx_I dx_{II} dx_{III} \quad dV = dx_I(1 + e_I) dx_{II}(1 + e_{II}) dx_{III}(1 + e_{III})$$

Si ottiene allora

$$dV/d\bar{V} = (1 + e_I)(1 + e_{II})(1 + e_{III}) = 1 + I_1 + I_2 + I_3$$

Tale relazione evidenzia l'ovvia circostanza fisica dell'indipendenza della variazione di volume dal riferimento. Per piccole deformazioni è peraltro $I_3 \ll I_2 \ll I_1$. Si può quindi scrivere

$$(dV - d\bar{V})/d\bar{V} \approx I_1 = e_1 + e_{II} + e_{III} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.127)$$

L'invariante lineare I_1 rappresenta quindi la *variazione di volume* dell'intorno del punto. Si ponga

$$\Theta = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.128a)$$

Il tensore

$$\eta = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \Theta \end{bmatrix} \quad (2.128b)$$

ha allora invariante primo nullo e configura quindi una deformazione che avviene a volume costante, caratterizzata da sole variazioni di forma dell'intorno. η è noto come *deviatore di deformazione*.

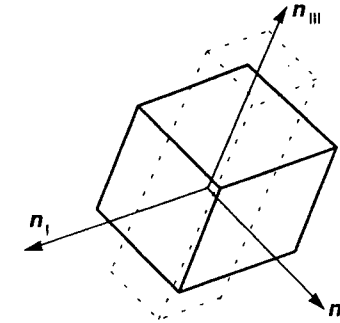


Figura 2.27

2.4.5 LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA INTERNA

Le deformazioni derivate dagli spostamenti attraverso le (2.121) costituiscono uno stato di deformazione congruente. Peraltro, valori di ε_{ij} indipendentemente assegnati non sono necessariamente congruenti. Si supponga infatti di suddividere il mezzo in elementi infinitesimi isolati e di attribuire a ognuno di essi arbitrarie deformazioni: non si potrà in genere ricostruire la continuità del mezzo con soli moti rigidi degli elementi. Questa operazione è possibile solo se le deformazioni soddisfano particolari condizioni di integrabilità, dette *condizioni di congruenza interna*.

È facile verificare per sostituzione diretta che ogni tensore di deformazione derivato attraverso la (2.121) soddisfa le sei equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \partial^2 \varepsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y / \partial x^2 &= \partial^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y \\ \partial^2 \varepsilon_y / \partial z^2 + \partial^2 \varepsilon_z / \partial y^2 &= \partial^2 \gamma_{yz} / \partial y \partial z \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 + \partial^2 \varepsilon_x / \partial z^2 &= \partial^2 \gamma_{zx} / \partial z \partial x \\ \partial^2 \varepsilon_x / \partial y \partial z &= \frac{\partial}{\partial x} (\partial \gamma_{xy} / \partial z + \partial \gamma_{zx} / \partial y - \partial \gamma_{yz} / \partial x) \\ \partial^2 \varepsilon_y / \partial z \partial x &= \frac{\partial}{\partial y} (\partial \gamma_{xy} / \partial z - \partial \gamma_{zx} / \partial y + \partial \gamma_{yz} / \partial x) \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x \partial y &= \frac{\partial}{\partial z} (-\partial \gamma_{xy} / \partial z + \partial \gamma_{zx} / \partial y + \partial \gamma_{yz} / \partial x) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Si può dimostrare che, almeno nel caso di domini monoconnessi, le (2.129) sono anche condizioni *sufficienti* di congruenza. Esse cioè garantiscono l'esistenza di un campo di spostamenti $\mathbf{s} = \{s_x, s_y, s_z\}'$ dal quale le deformazioni sono derivabili attraverso le (2.121).

Per dimostrare l'asserto, si osservi che le condizioni dovranno tradurre il fatto che, dati due punti nel continuo, gli spostamenti e le rotazioni necessari a ricostruire la congruenza di una catena di elementi tra di essi dipendono solo dai due punti e non dal percorso che li congiunge. Dovranno cioè esprimere la circostanza che le quantità