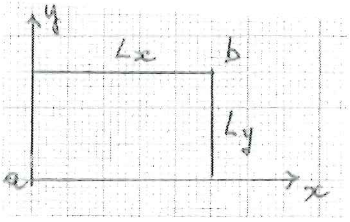
Esercizio n.4 (4 punti)

Una piastrina rettangolare di dimensioni L_x = .5. cm, L_y = ..6..cm risulta soggetta a deformazioni uniformi di componenti:
$\varepsilon_x = 0.0025$; $\varepsilon_y = 0.0050$; $\varepsilon_z = 0$, $½\gamma_{xy} = 0.0009375$; $½\gamma_{xz} = ½\gamma_{yz} = 0$.
Determinare la variazione di lunghezza della diagonale ab, ΔL_{ab}.



ΔL_{ab} = ...

Esercizio n.5 (6 punti)

Determinare la pendenza, m, della curva σ_x - ε_x in ambito elastico lineare per un materiale che viene sottoposto a prova nelle seguenti condizioni di sollecitazione:
σ_x = ..-2 σ_y = ..3.σ_z; $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.
Determinare poi, se è noto che $\nu = 1/3$ per quale coefficiente k occorre moltiplicare la pendenza per ottenere il valore del modulo di Young, E.

m = ...;
k = ...

Esercizio n.6 (bonus, 3 punti)

Un cubo di spigolo pari a 100 mm costituito di un materiale caratterizzato dalle costanti elastiche E = 30000 MPa, G = ..15000 MPa è soggetto a uno stato di sforzo idrostatico completamente individuato dalla componente p = -10 MPa.
Valutare la variazione di volume (rapportata al volume iniziale) che il cubo subisce per effetto della deformazione.

$(V'-V)/V$ = ...

I valori numerici sono i seguenti

Testo	1	2	3	4
a	4	3	2	3
b	3	4	3	2
l_x/L_x	$1+4\cdot10^{-4}$	$1+3\cdot10^{-4}$	$1+2\cdot10^{-4}$	$1+3\cdot10^{-4}$
l_y/L_y	$1-6\cdot10^{-4}$	$1-8\cdot10^{-4}$	$1-6\cdot10^{-4}$	$1-4\cdot10^{-4}$
$\cos\delta$	$6\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$
$x(P')$	$2+9\cdot10^{-4}$	$2+7\cdot10^{-4}$	$2+5\cdot10^{-4}$	$2+7\cdot10^{-4}$
$y(P')$	$1+1\cdot10^{-4}$	$1+0\cdot10^{-4}$	$1+1\cdot10^{-4}$	$1+2\cdot10^{-4}$
ω_z	$+10^{-4}$	$+10^{-4}$	$+10^{-4}$	$+10^{-4}$.

Esercizio 4 (4 punti)

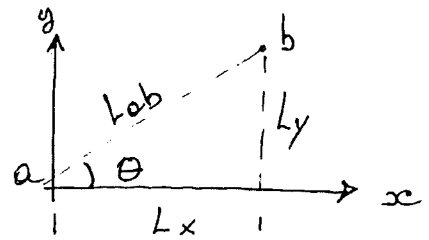
Risulta $\Delta L_{ab} = L_{ab}\cdot\varepsilon_a$, dove ε_a individua la deformazione (dilatazione) nella direzione ab.

Se α_x, α_y ($e\ \alpha_z=0$) sono i coseni direttori degli angoli che la direzione ab forma con gli assi x, y, z si ha che

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \varepsilon_z\alpha_z^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{xz}\alpha_x\alpha_z + \gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z$$

cioè, nel caso specifico ($\varepsilon_z=0$, $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$; $\alpha_z=0$)

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y.$$



$$L_{ab} = \sqrt{L_x^2+L_y^2}$$

$$\alpha_x = \cos\theta = \frac{L_x}{L_{ab}} = \frac{L_x}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}}$$

$$\alpha_y = \sin\theta = \frac{L_y}{L_{ab}} = \frac{L_y}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}}.$$

Pertanto

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\frac{L_x^2}{L_x^2+L_y^2} + \varepsilon_y\frac{L_y^2}{L_x^2+L_y^2} + 2\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\right)\frac{L_xL_y}{L_x^2+L_y^2}.$$

ovvero

$$\Delta L_{ab} = \sqrt{L_x^2+L_y^2}\,\varepsilon_a = 0.0025\,\frac{L_x^2}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}} + 0.0050\,\frac{L_y^2}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}} + \overset{0.001875}{V}\,\frac{L_x L_y}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}}$$

$$= \left(0.0025\,L_x^2 + 0.0050\,L_y^2 + 0.001875\,L_x L_y\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}}.$$

Risultati numerici:

Testo	1	2	3	4
L_x [cm]	5	2	4	3
L_y [cm]	6	3	5	4
ε_a	0.00489754	0.00509615	0.00493902	0.005
ΔL_{ab} [cm]	0.038251	0.0183744	0.0316252	0.025
L_{ab} [cm]	$\sqrt{61} = 7.810$	$\sqrt{13} = 3.606$	$\sqrt{41} = 6.403$	5.000

Esercizio 5 (6 punti)

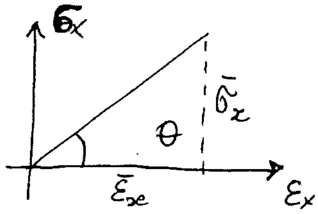
Si ha: $\sigma_x = a\,\sigma_y$; $\sigma_x = b\,\sigma_z$

ovvero $\sigma_y = \dfrac{\sigma_x}{a}$; $\sigma_z = \dfrac{\sigma_x}{b}$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

e quindi, nel caso in esame:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}\left[1 - \nu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right] \qquad \sigma_x = \frac{E\,\varepsilon_x}{1-\nu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$



e quindi la pendenza della curva (cioè il coeff. angolare $m = \tan\theta$) vale:

$$m = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\varepsilon}_x} = \frac{E}{1-\nu\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

Si ha poi $mk = E$ e dunque: $k = \dfrac{E}{m}$

Dunque $k = \dfrac{1}{m} \cdot E = 1-\nu\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

D'altra parte $\nu = \dfrac{1}{3}$, sicché

$$k = 1 - \frac{b+a}{3ab}.$$

Risultati numerici:

Testo	1	2	3	4
a	-2	3	2	3
b	3	-2	3	2
m	$E \cdot \dfrac{1}{1+\nu/6}$	$E \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{6}\nu}$	$E \cdot \dfrac{1}{1-\frac{5}{6}\nu}$	$E \cdot \dfrac{1}{1-\frac{5}{6}\nu}$
k	$\dfrac{19}{18}$	$\dfrac{19}{18}$	$\dfrac{13}{18}$	$\dfrac{13}{18}$

Esercizio 6 (3 punti)

Risulta

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} +p & 0 & 0 \\ 0 & +p & 0 \\ 0 & 0 & +p \end{bmatrix}$$

cioè $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = +p$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[-p-\nu(-2p)\right] = \frac{+p}{E}(1-2\nu)$$

$$\varepsilon_y = +\frac{p}{E}(1-2\nu)$$

$$\varepsilon_z = +\frac{p}{E}(1-2\nu)$$

$$V' = \ell^3\left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)+(1+\varepsilon_z)\right] = \ell^3\left[1+(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z)\right]$$

e trascurando i termini di ordine superiore (quelli indicati fra parentesi tratteggiate)

$$V' = \ell^3\left[1+(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

Segue immediatamente che

$$V' - V = \ell^3 \left[1 + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \ell^3 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\,\ell^3$$

$$\frac{V' - V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \,, \quad \text{indipendente da } \ell \,!$$

Nel caso specifico,

$$\frac{V' - V}{V} = 3 \left(\frac{+p}{E}\right)(1 - 2\nu)$$

e poiché $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow 1 + \nu = \dfrac{E}{2G}\,, \; \nu = \dfrac{E}{2G} - 1$

quindi

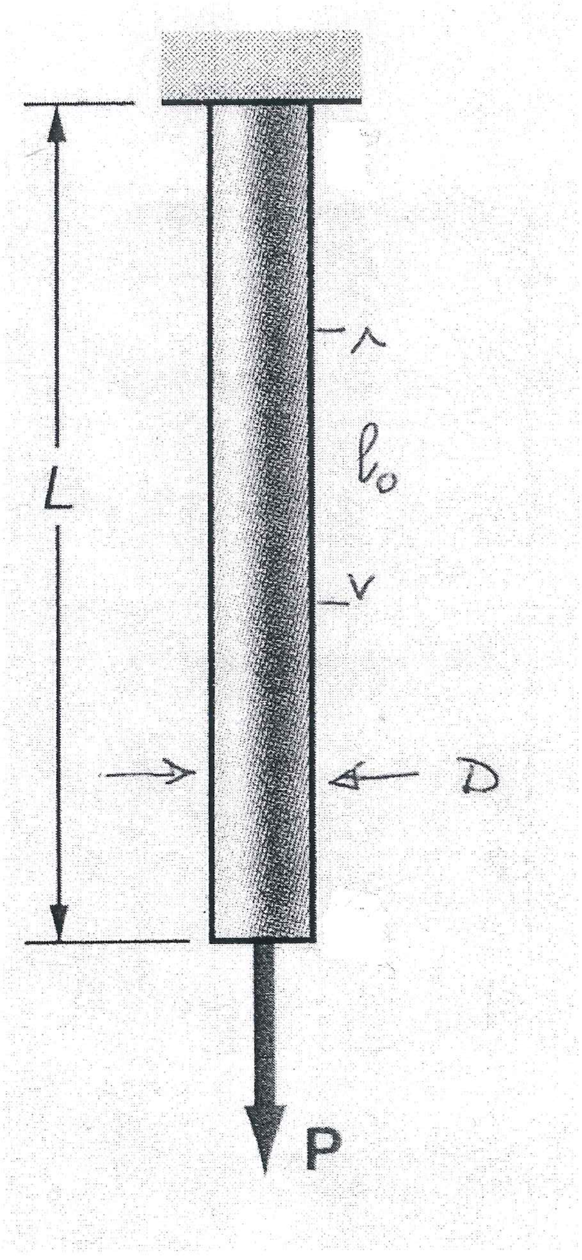
$$\frac{V' - V}{V} = +\frac{3p}{E}\left(1 - \frac{2E}{2G} + 2\right) = +\frac{3p}{E}\left(3 - \frac{E}{G}\right)$$

Valori numerici

Testo	1	2	3	4
E [MPa]	30'000	30'000	30'000	30'000
G [MPa]	15'000	11'000	13'000	12'000
p [MPa]	−10	−10	−10	−10
$\frac{V'-V}{V}$	$-\frac{1}{1000} = -0{,}001$	$\frac{-3}{11000} = -0{,}000273$	$\frac{-9}{13000} = -0{,}000692$	$\frac{-1}{2000} = -0{,}0005$

Esercizio n. 3 (6 punti)

In una prova di trazione si sottopone un'asta di materiale plastico avente diametro D pari a 30 mm a una forza di trazione di valore $P = 7$ kN.
Sapendo che su una base di misura $l_o = 150$ mm si rileva una variazione di lunghezza $\Delta l = 19$ mm e una riduzione di diametro $\Delta D = 0.85$ mm, si richiede di determinare il modulo di elasticità longitudinale (o modulo di Young), E, il coefficiente di contrazione trasversale (o coefficiente di Poisson), ν, e la rigidezza assiale, EA (dove A rappresenta l'area della sezione trasversale). Si richiede infine di valutare quali sarebbero la variazione di lunghezza, ΔL, e di raggio, ΔR, prodotte dalla stessa forza di trazione se la base di misura avesse lunghezza $L_o = 500$ mm.



E = 0,078181 GPa; ν = 0,224; EA = 55,263 kN;

ΔL = 63,333 mm; ΔR = 0,425 mm

Esercizio n. 3 (9 punti)

In una prova di trazione si sottopone un provino cilindrico di materiale con diametro D = 35 mm a una forza di trazione P = 5.8 kN.

Sapendo che su una base di misura l_o = 150 mm si rileva una variazione di lunghezza Δl = 12 mm e una riduzione di diametro ΔD = 0.85 mm, si richiede di determinare:

1. il modulo di elasticità longitudinale (o modulo di Young), E,
2. il modulo di elasticità tangenziale, G;
3. la rigidezza assiale, EA (dove A rappresenta l'area della sezione trasversale).

Infine, a parità di valore della forza di trazione, P, si richiede di valutare,qualora la base di misura avesse lunghezza L_o = 500 mm,

4. quale sarebbe la variazione di lunghezza, ΔL, del provino;
5. quale sarebbe la variazione di raggio, ΔR, del provino.

E = ...75,355............ MPa; G = ...28,903..... MPa; EA = ...72,500......................... kN;

ΔL = ...40,000................................. mm; ΔR = ...0,4250.. mm

Esercizio n. 3 (6 punti)

Una sfera piena, di raggio R = 250 mm costituita di un materiale caratterizzato dalle costanti elastiche E = 200 GPa, G = 77 GPa è soggetto a uno stato di sforzo idrostatico completamente individuato dalla componente p = - 400 MPa.

Si richiede di:

1. Determinare il raggio R' a deformazione avvenuta;
2. Valutare la variazione di volume (rapportata al volume iniziale) che la sfera subisce per effetto della deformazione;
3. Determinare quale sarebbe la massima pressione idrostatica sostenibile dal materiale, p_1 (nel caso che in regime monoassiale la tensione ammissibile valga k = 160. MPa), prevista dal criterio di Galileo-Rankine;
4. Determinare quale sarebbe la massima pressione idrostatica sostenibile dal materiale, p_2 (a parità di valore della tensione ammissibile in regime monoassiale), prevista dal criterio di Grashof;
5. Determinare quale sarebbe la massima pressione idrostatica sostenibile dal materiale, p_3 (sempre a parità di valore della tensione ammissibile in regime monoassiale), prevista dal criterio di Tresca.
6. Determinare quale sarebbe la massima pressione idrostatica sostenibile dal materiale, p_4 (sempre a parità di valore della tensione ammissibile in regime monoassiale), prevista dal criterio di von Mises.

R' = ...249.7987...... mm; $(V'-V)/V$ = ...−0.002414......;

p_1 = ...−160.0000...... MPa; p_2 = ...−397.4194...... MPa;

p_3 = ...∞...... MPa; p_4 = ...∞...... MPa

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un solido di forma cubica, di spigolo L = 200 mm con le facce parallele agli assi del sistema di riferimento è costituito di un materiale caratterizzato dalle costanti elastiche seguenti: E = 390 GPa, G = 130 GPa. È soggetto a uno stato di sforzo piano, completamente individuato da queste componenti: $\sigma_x = +60$ MPa; $\sigma_y = -60$ MPa; $\sigma_z = 0$ MPa.
Si richiede di:

1. Determinare la lunghezza a deformazione avvenuta dello spigolo originariamente parallelo alla direzione dell'asse x, L_x';
2. Determinare la lunghezza a deformazione avvenuta dello spigolo originariamente parallelo alla direzione dell'asse y, L_y';
3. Determinare il valore della componente di dilatazione secondo la direzione dell'asse z, ε_z;
4. Determinare quale sarebbe, in base al criterio di sicurezza di Galilei-Rankine, il massimo sforzo piano $\sigma_x = +\sigma^{(1)}$; $\sigma_y = -\sigma^{(1)}$ (valori espressi in MPa) sopportabile dal materiale, nel caso in cui la tensione ammissibile in regime monoassiale valga k = 100 MPa;
5. Determinare quale sarebbe, in base al criterio di sicurezza di Tresca, il massimo sforzo piano $\sigma_x = +\sigma^{(2)}$; $\sigma_y = -\sigma^{(2)}$ (valori espressi in MPa) sopportabile dal materiale, nel caso in cui la tensione ammissibile in regime monoassiale valga k = 100 MPa;
6. Determinare quale sarebbe, in base al criterio di sicurezza di von Mises, il massimo sforzo piano $\sigma_x = +\sigma^{(3)}$; $\sigma_y = -\sigma^{(3)}$ (valori sempre espressi in MPa) sopportabile dal materiale, nel caso in cui la tensione ammissibile in regime monoassiale valga k = 100 MPa.

L_x' = 200.0462 mm;	L_y' = 199.9538 mm;
ε_z = 0.0000000;	$\sigma^{(1)}$ = 100.0000 MPa;
$\sigma^{(2)}$ = 50.0000 MPa;	$\sigma^{(3)}$ = 57.7350 MPa;