M_A (⇗) = $+2qb^2$; C_1 = (0, 0); C_2 = ($2b$, 0); C_{12} = (∞, 0);

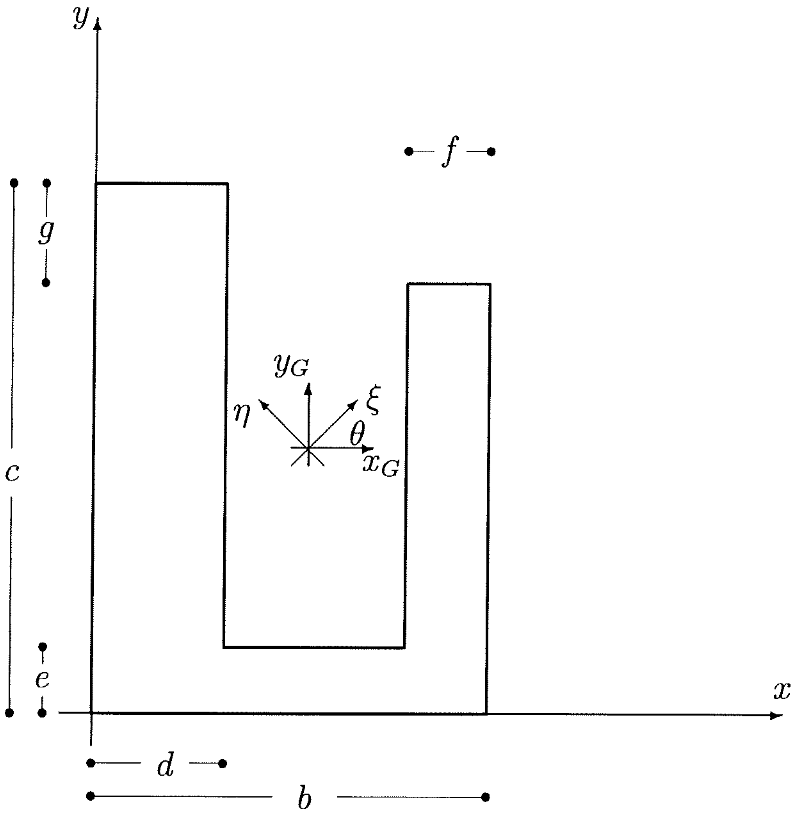
v_D = $2b\delta\varphi_1$ = $2b\delta\varphi_2$; v_B^1 = $b\delta\varphi_1$;

M_C (⇖□⇗) = $-4qb^2$; v_D = $2b\delta\varphi_3$; v_B^2 = 0;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (*Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 10a$; $c = 14a$; $d = 6a$; $f = g = 4a$; si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



S_x = $788\,a^3$; S_y = $572\,a^3$;

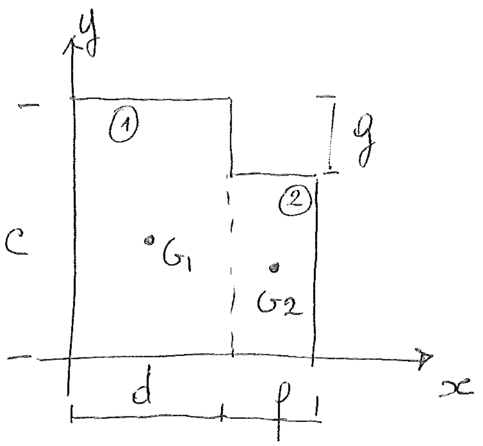
x_G = $\frac{143}{31}a = 4.61290\,a$; y_G = $\frac{197}{31}a = 6.35484\,a$;

J_{xG} = $\frac{168676}{93}a^4 = 1813.720430\,a^4$; J_{yG} = $\frac{91396}{93}a^4 = 982.752688\,a^4$;

J_{xGyG} = $-\frac{8400}{31}a^4 = -270.967742\,a^4$; tan 2θ = $\frac{15}{23} = 0.652174$ $(\theta = 16.5557^\circ)$;

$J_\xi = J_{max}$ = $1894.271199\,a^4$; $J_\eta = J_{min}$ = $902.201919\,a^4$;

Esercizio (3)



$$A_1 = c \cdot d \qquad G_1 = \left(\frac{d}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$A_2 = (c-g) \cdot f \qquad G_2 = \left(d + \frac{f}{2}, \frac{c-g}{2}\right)$$

$$S_{x,1} = A_1 \cdot y_{G1} \qquad S_{y,1} = A_1 \cdot x_{G1}$$

$$S_{x,2} = A_2 \cdot y_{G2} \qquad S_{y,2} = A_2 \cdot x_{G2}$$

$$A = A_1 + A_2 \qquad x_G = \frac{S_y}{A}$$

$$S_x = S_{x,1} + S_{x,2}$$

$$S_y = S_{y,1} + S_{y,2} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$I_{x,1} = \frac{1}{3} d c^3 \qquad I_{x,2} = \frac{1}{3} f \cdot (c-g)^3 \qquad I_x = I_{x,1} + I_{x,2}$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{3} c d^3 \qquad I_{y,2} = \frac{1}{12} (c-g) \cdot f^3 + A_2 \cdot x_{G_2}^2 \qquad I_y = I_{y,1} + I_{y,2}$$

$$I_{xy,1} = A_1 \cdot x_{G1} \cdot y_{G1} \qquad I_{xy,2} = A_2 \cdot x_{G,2} \, y_{G2} \qquad I_{xy} = I_{xy,1} + I_{xy,2}$$

$$I_{xG} = I_x - A y_G^2$$

$$I_{yG} = I_y - A y_G^2$$

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - A x_G y_G$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \arctan\left(\dfrac{-2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}}\right) \text{ se } I_{x_G} > I_{y_G} \\ 2\theta = \arctan\left(\dfrac{-2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}}\right) + \pi \text{ se } I_{x_G} < I_{y_G} \end{cases}$$

$$I_\xi = I_{max} = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x_G} - I_{y_G}}{2}\right)^2 + I_{x_G y_G}^2}$$

$$I_\eta = I_{min} = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x_G} - I_{y_G}}{2}\right)^2 + I_{x_G y_G}^2}$$

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

Prova in differita del 08.05.2003
(da riconsegnare al docente entro le 19.00 del 13.05.2003)

Si prega di riportare i risultati in forma ordinata su fogli in formato A4

Esercizio 1

Per ciascuno degli stati di sforzi sotto indicati, si richiede di tracciare i 3 cerchi di Mohr corrispondenti e di determinare i valori delle tensioni principali. Si noti che sono assegnate solo le componenti non nulle del tensore degli sforzi.

- (tensione monoassiale) $\sigma_x = 20$ MPa;
- (stato di sforzo biassiale) $\sigma_x = -30$ MPa, $\sigma_y = -15$ MPa;
- (stato di sforzo idrostatico) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 80$ MPa ;
- (stato di sforzo piano) $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30$ MPa;
- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 30$ MPa, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 30$ MPa.

Esercizio 2

Per lo stato di sforzo piano caratterizzato delle componenti $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 60$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20$ MPa, determinare i tre invarianti I_1, I_2, I_3 dello sforzo ed i tre invarianti I'_1, I'_2, I'_3 dello sforzo deviatorico.
Determinare quanto valgono le componenti normale e tangenziale del vettore sforzo su un piano la cui normale è inclinata di 30^o (in senso antiorario) rispetto all'asse x.
Quanto vale invece la componente tangenziale su un piano la cui normale è inclinata di -30^o (cioè di 30^o in senso orario) rispetto all'asse x?
Determinare i valori degli sforzi principali e le direzioni principali ed evidenziare l'elementino di materiale sul quale agiscono gli sforzi principali.

Esercizio 3

Sono assegnate nella seguente tabella:

$$10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

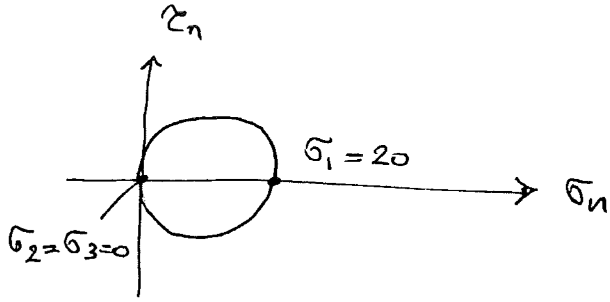
le componenti del *gradiente di spostamento* e nel punto P.
Determinare le componenti del tensore di rotazione infinitesima, ω, e del tensore di deformazione infinitesima, ε.
Valutare poi gli invarianti del *deviatore* del tensore di deformazione, J'_1, J'_2, J'_3, le dilatazioni principali e le direzioni principali.

Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2A

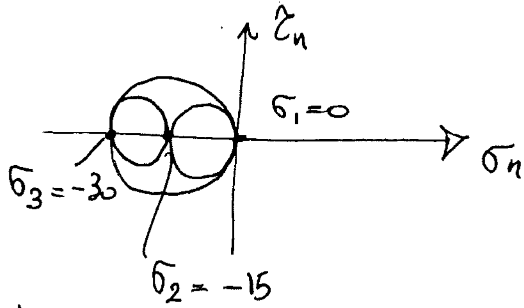
Soluzioni della prova scritta in differita del 08.05.03

Esercizio 1 (5 punti)

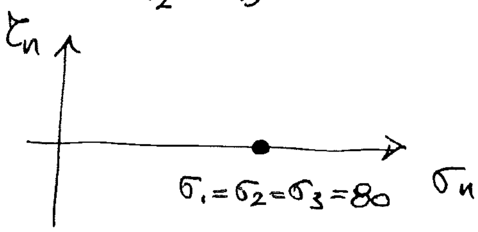
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



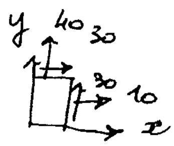
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$



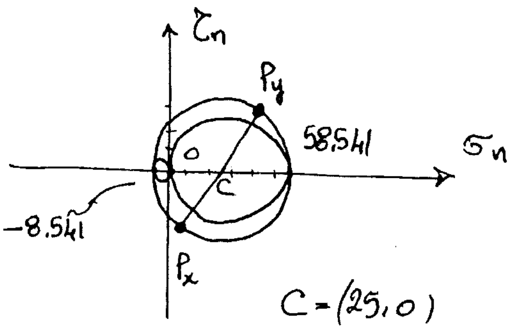
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1 &= 50 \\ I_2 &= +500 \\ I_3 &= 0 \end{aligned}$$



$P_x \equiv (10, -30)$
$P_y \equiv (40, 30)$

$$\sigma^3 - 50\sigma^2 - 500\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{1,3} = 25 \pm \sqrt{625+500} = 25 \pm 33.541 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 58.541 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.541 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1 &= 50 \\ I_2 &= +500 \\ I_3 &= 0 \end{aligned}$$

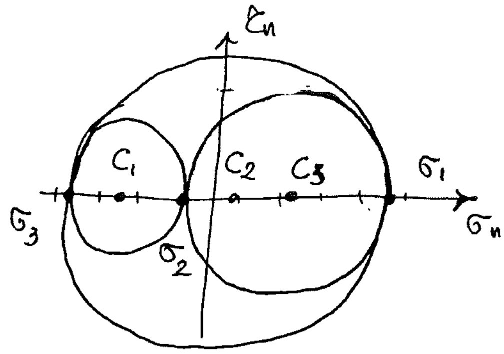


$C = (25, 0)$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 10 & 0 & 30 \\ 30 & 30 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1 &= 0 \\ I_2 &= 100+900+900 = 1900 \\ I_3 &= (-10)(-900)+30\cdot 300 = 18'000 \end{aligned}$$

$$\sigma^3 - 1900\,\sigma - 18'000 = 0 \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 47.72 \\ \sigma_2 = -10.00 \\ \sigma_3 = -37.72 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 47.72 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -37.72 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1 &= 0 \\ I_2 &= 477.2-377.2+1800 = 1900 \\ I_3 &= (-1800)(-10) = +18'000 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_1 &= (-23.86,0) & R_1 &= 13.86 \\ C_2 &= (+5,0) & R_2 &= 42.72 \\ C_3 &= (18.86,0) & R_3 &= 28.86 \end{aligned}$$

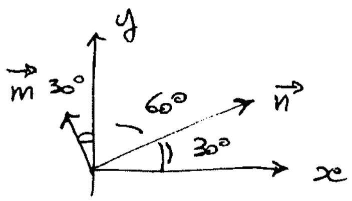
Esercizio 2 (punti)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1 &= 40 \\ I_2 &= 1600 \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \rightarrow p = \frac{I_1}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underbrace{\begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{40}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{3} \end{bmatrix}}_{p\,\underline{\underline{I}}} = \begin{bmatrix} -\frac{100}{3} & 20 & 0 \\ 20 & \frac{140}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{40}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33.33 & 20 & 0 \\ 20 & 46.66 & 0 \\ 0 & 0 & -13.33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_1' &= -33.33+46.66-13.33 = 0 \\ I_2' &= 1955.55 + 622.22 - 444.44 = 2133.33 \\ I_3' &= (-1955.55)(-13.33) = 26074.1 \end{aligned}$$

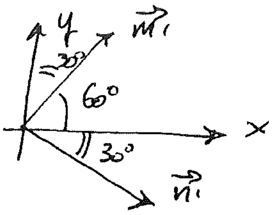
$$\begin{aligned} \alpha_x &= \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \beta_x &= \cos(120°) = -\frac{1}{2} \\ \alpha_y &= \cos(60°) = \frac{1}{2} & \beta_y &= \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_z &= \cos(90°) = 0 & \beta_z &= \cos(90°) = 0 \end{aligned}$$



$$\sigma_n = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y = -20\cdot\frac{3}{4} + 60\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = 17.321 \text{ MPa}$$

$$\tau_{nm} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) = -20\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 60\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 20\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right) = 44.641 \text{ MPa}$$

$$\alpha_{x'} = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \beta_{x'} = \cos(60°) = \frac{1}{2}$$
$$\alpha_{y'} = \cos(120°) = -\frac{1}{2} \qquad \beta_{y'} = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha_{z'} = \cos(90°) = 0 \qquad \beta_{z'} = \cos(90°) = 0$$



$$\sigma_{n'} = \sigma_x \alpha_{x'}^2 + \sigma_y \alpha_{y'}^2 + 2\tau_{xy}\alpha_{x'}\alpha_{y'} = -20\cdot\frac{3}{4} + 60\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot 20\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -17.321 \text{ MPa}$$

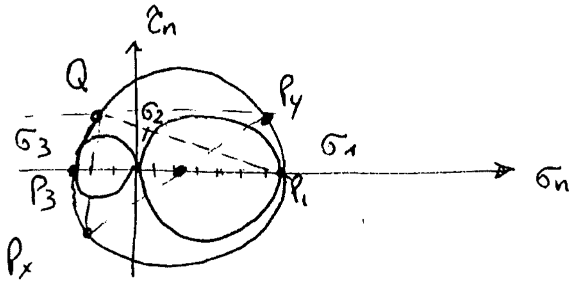
$$\tau_{n'm'} = \sigma_x \alpha_{x'}\beta_{x'} + \sigma_y \alpha_{y'}\beta_{y'} + \tau_{xy}\left(\alpha_{x'}\beta_{y'} + \alpha_{y'}\beta_{x'}\right) = -20\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + 60\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 20\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = -24.641 \text{ MPa}$$

$$\sigma_n^3 - 40\sigma_n^2 - 1600\,\sigma_n = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{1,3} = 20 \pm \sqrt{400+1600} = \begin{cases} 64.721 = \sigma_1 \\ -24.721 = \sigma_3 \end{cases} \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 64.721 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24.721 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_1 &= 40 \\ I_2 &= 1600 \\ I_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{n}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0.973 \\ -0.230 \\ 0.000 \end{Bmatrix}; \qquad \vec{n}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad \vec{n}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.230 \\ 0.973 \\ 0.000 \end{Bmatrix}$$

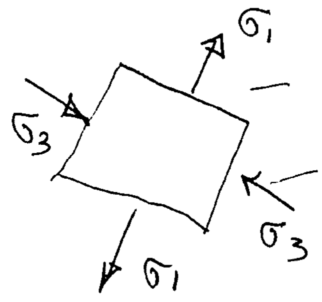
$$\vec{n}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\begin{Bmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{n}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad \vec{n}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\begin{Bmatrix} \sqrt{5}-2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$P_x \equiv (-20, -20)$

$P_y \equiv (60, +20)$

Q è il polo del cerchio di Mohr.



parallelo a $\overline{Q-P_1}$

parallela a $\overline{Q-P_3}$

Esercizio 3 (punti)

$$\underline{W} = 10^{-5}\begin{bmatrix} 0 & \frac{3+3}{2} & \frac{-2+8}{2} \\ \frac{-3-3}{2} & 0 & \frac{-1+1}{2} \\ \frac{-8+2}{2} & -\frac{1+1}{2} & 0 \end{bmatrix} = 10^{-5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Università degli Studi di Trento – Facoltà di Ingegneria

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2A

A.A. 2002-03

Primo compito scritto in aula del 23.05.2003

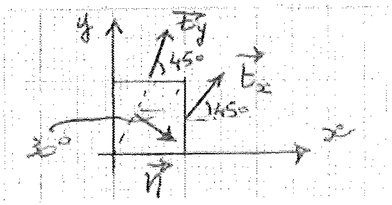
Testo 1.

Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n.1 (6 punti)

Un elemento di materiale è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente, con $|t_x| = |t_y| =$ 12 MPa ed entrambi inclinati di un angolo di 45° rispetto all'asse x come indicato.
Si chiede di costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}, nonché le componenti di sforzo σ_n, τ_n agenti su un piano la cui normale n forma un angolo $\varphi = -30°$ (cioè pari a 30° *in senso orario*) con l'asse x



σ_1 = ...; σ_2 = ...; τ_{max} = ...
σ_n = ...; τ_n = ...;

cerchio di Mohr:

Esercizio n.2 (8 punti)

In un punto P lo stato di sforzo è definito dalle componenti (tutte espresse in Mpa):
$\sigma_x = .25$, $\sigma_y = +20$, $\sigma_z = -10$, $\tau_{xy} = +5$, $\tau_{xz} = -10$, $\tau_{yz} = -15$.
Si richiede di determinare:

1. le componenti t_{nx}, t_{ny}, t_{nz} del vettore tensione agente su una superficie di normale $\boldsymbol{n}$ individuata dai coseni direttori $\alpha_x = +1/2$, $\alpha_y = +1/\sqrt{2}$, $\alpha_z =$ positivo;
2. Il modulo, $|\boldsymbol{t}_n|$ del vettore $\boldsymbol{t}_n$ e il valore della sua componente normale σ_n e della componente tangenziale *totale* τ_n;
3. Il coseno δ dell'angolo che il vettore $\boldsymbol{t}_n$ forma con la normale $\boldsymbol{n}$;
4. I coseni direttori β_x, β_y, β_z degli angoli che il vettore $\boldsymbol{t}_n$ forma con gli assi coordinati

t_{nx} = ...; t_{ny} = ...; t_{nz} = ...

$|\boldsymbol{t}_n|$ = ...; σ_n = ...; τ_n = ...;

δ = ...; β_x = ...; β_y = ...; β_z = ...

Esercizio n.3 (6 punti)

Il campo di spostamento al quale è soggetto un corpo deformabile è definito da queste componenti:
$u = k(4.x + y^2)$; $v = k(x^2 - 3.y^2)$; $w = 0$; $k = 10^{-4}$.
Determinare:

1. la lunghezza a deformazione avvenuta l_x, l_y dei lati di un elementino infinitesimo spiccato dal punto P di coordinate(2,1,0) inizialmente orientati secondo gli assi x e y e di lunghezza iniziale rispettivamente pari a L_x, L_y, nonché il *coseno* dell'angolo δ che essi formano a deformazione avvenuta;
2. determinare la nuova posizione del punto P, P';
3. determinare la componente ω_z della rotazione rigida rispetto al punto P.

l_x = ...; l_y = ...; cos δ = ...

P' = (.................,.................................,.................); ω_z = ...

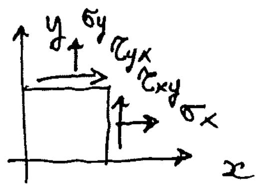
CORSO di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2A.

Soluzioni del primo compito scritto in aula del 23.05.03

Esercizio 1 (6 punti)

Poiché $|\vec{t}_x| = |\vec{t}_y| = t$, le componenti non nulle del tensore degli sforzi risultano:

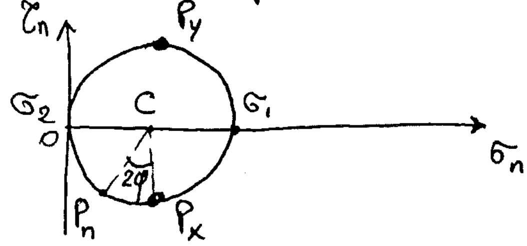
$$\sigma_x = t\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_{xy} = t\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sigma_y = t\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_{yx} = t\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} t\frac{\sqrt{2}}{2} & t\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t\frac{\sqrt{2}}{2} & +t\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



(Si osservi che poiché $I_2 = 0$ e $I_3 = 0$ lo stato di sforzo è monoassiale.)

Nel piano di Mohr i punti rappresentativi dello stato di sforzo agenti sulle facce di normale x e y sono:

$$P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy}) = \left(t\frac{\sqrt{2}}{2}, -t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$P_y = (\sigma_y, +\tau_{yx}) = \left(t\frac{\sqrt{2}}{2}, +t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

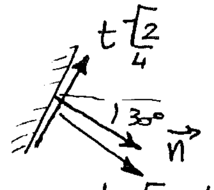


Pertanto il cerchio di Mohr ha centro in $C = \left(t\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e raggio $R = t\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ne segue che
$$\sigma_1 = \overline{OC} + R = t\sqrt{2}$$
$$\sigma_2 = \overline{OC} - R = 0$$
$$\tau_{max} = R = t\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Su una faccia la cui normale $\vec{n}$ forma un angolo di 30° con l'asse x (in senso orario) lo stato di sforzo è caratterizzato dalle componenti seguenti:
$$\sigma_n = \sigma_x - R\sin 60° = t\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\tau_n = -R\cos 60° = -t\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Il fatto che sia τ_n negativa indica che esso tende a fare ruotare la faccia (e quindi l'elementino di materiale) in senso antiorario, cioè risulta diretto verso l'alto.



$$t\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = t\,\frac{\sqrt{2}}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Si osservi, in base al cerchio di Mohr che lo stato di sforzo è effettivamente monoassiale, e che la direzione principale 1 si ottiene ruotando di $+45°$ l'asse x (cioè ruotandolo in senso orario di metà di un angolo retto).

I risultati numerici per i vari casi sono:

Testo	1	2	3	4
t	12	15	7	10
σ_1	$12\sqrt{2} = 16.971$	$15\sqrt{2} = 21.213$	$7\sqrt{2} = 9.899$	$10\sqrt{2} = 14.142$
σ_2	0	0	0	0
τ_{MAX}	$12\frac{\sqrt{2}}{2} = 8.485$	$\frac{15\sqrt{2}}{2} = 10.607$	$\frac{7\sqrt{2}}{2} = 4.950$	$\frac{10\sqrt{2}}{2} = 7.071$
σ_n	1.137	1.421	0.663	0.947
τ_n	$-12\frac{\sqrt{2}}{4} = -4.243$	$-15\frac{\sqrt{2}}{4} = -5.303$	$-7\frac{\sqrt{2}}{4} = -2.475$	$-10\frac{\sqrt{2}}{4} = -3.536$

(valori espressi in MPa).

Si osservi che le componenti σ_n, τ_n sono state calcolate a partire dal punto P_x, rappresentativo dello stato di sforzo sulla faccia di normale x. Se, invece, le si calcola a partire dalla tensione principale σ_1 si ha:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}-60°\right)\cdot R$$
$$\tau_n = R\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}-60°\right)$$

Esercizio 2 (8 punti)

Le componenti del tensore degli sforzi, posto $\sigma_x = a$ risultano:

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & 5 & -10 \\ 5 & 20 & -15 \\ -10 & -15 & -10 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda α_z, si deve avere:

$$\alpha_z^2 = 1 - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \implies \alpha_z = \pm \frac{1}{2}$$

e, poiché è prescritto che sia $\alpha_z > 0$, deve risultare $\alpha_z = +\frac{1}{2}$

Si trova quindi:

$$t_{nx} = \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z = a \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{10}{2} = \frac{a - 10 + 5\sqrt{2}}{2}$$

$$t_{ny} = \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{20}{\sqrt{2}} - \frac{15}{2} = \frac{-10 + 20\sqrt{2}}{2}$$

$$t_{nz} = \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z = -10 \cdot \frac{1}{2} - \frac{15}{\sqrt{2}} - \frac{10}{2} = \frac{-20 - 15\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{t}_n| = \sqrt{t_{nx}^2 + t_{ny}^2 + t_{nz}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a - 10 + 5\sqrt{2})^2 + (-10 + 20\sqrt{2})^2 + (-20 - 15\sqrt{2})^2}$$

$$|\vec{t}_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 100 + 50 - 20a + 10\sqrt{2}a - 100\sqrt{2}) + (100 + 800 - 400\sqrt{2}) + (400 + 450 + 600\sqrt{2})}$$

$$|\vec{t}_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (10\sqrt{2} - 20)a + 100\sqrt{2} + 1900}$$

$$\sigma_n = t_{nx}\alpha_x + t_{ny}\alpha_y + t_{nz}\alpha_z = \frac{a - 10 + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{-10 + 20\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-20 - 15\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a - 10 + 5\sqrt{2}}{4} + \frac{40 - 10\sqrt{2}}{4} + \frac{-20 - 15\sqrt{2}}{4} = \frac{a + 10 - 20\sqrt{2}}{4}$$

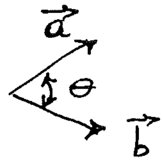
$$\tau_n = \sqrt{|\vec{t}_n|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2 + (10\sqrt{2} - 20)a + 100\sqrt{2} + 1900\right] - \frac{1}{16}\left[a + 10 - 20\sqrt{2}\right]^2}$$

$$\tau_n = \sqrt{\frac{4}{16}\left[a^2+(10\sqrt{2}-20)a+100\sqrt{2}+1900\right]-\frac{1}{16}\left[a^2+100+800+(20-40\sqrt{2})a-400\sqrt{2}\right]}$$

$$\tau_n = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2+(-100+80\sqrt{2})a+800\sqrt{2}-6700}$$

Osservando che per definizione il prodotto scalare di 2 vettori qualsiasi, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è dato da:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



dove θ è l'angolo compreso fra i 2 vettori, se $|\vec{a}|=1$ e $|\vec{b}|=1$ si ha:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta = \delta$$

indicando con δ il valore di $\cos\theta$.
Nel caso specifico, per calcolare δ è sufficiente calcolare il prodotto scalare seguente (nel quale entrambi i vettori sono di modulo unitario):

$$\delta = \frac{\vec{t}_n}{|\vec{t}_n|}\cdot\vec{n} = \frac{1}{|\vec{t}_n|}\left(\vec{t}_n\cdot\vec{n}\right) = \frac{1}{|\vec{t}_n|}\left(t_{nx}\alpha_x+t_{ny}\alpha_y+t_{nz}\alpha_z\right) = \frac{\sigma_n}{|\vec{t}_n|}$$

e quindi

$$\delta = \frac{a+10-20\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+(10\sqrt{2}-20)a+100\sqrt{2}+1900}}$$

Per calcolare infine i coseni direttori degli angoli che $\vec{t}_n$ forma con gli assi coordinati x, y, z è sufficiente considerare i prodotti scalari

$$\frac{\vec{t}_n}{|\vec{t}_n|}\cdot\vec{i} = \frac{t_{nx}}{|\vec{t}_n|} = \beta_x \; ; \quad \frac{\vec{t}_n}{|\vec{t}_n|}\cdot\vec{j} = \frac{t_{ny}}{|\vec{t}_n|} = \beta_y \; ; \quad \frac{\vec{t}_n}{|\vec{t}_n|}\cdot\vec{k} = \frac{t_{nz}}{|\vec{t}_n|} = \beta_z$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori degli assi.

Si trova quindi:

$$\beta_x = \frac{a - 10 + 5\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + (10\sqrt{2}-20)a + 100\sqrt{2} + 1900}}$$

$$\beta_y = \frac{-10 + 20\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + (10\sqrt{2}-20)a + 100\sqrt{2} + 1900}}$$

$$\beta_z = \frac{-20 - 15\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + (10\sqrt{2}-20)a + 100\sqrt{2} + 1900}}$$

I risultati numerici per i vari casi sono:

Testo	1	2	3	4
t_{nx} [MPa]	$\frac{5}{2}(3+\sqrt{2}) = 11.036$	$5+\frac{5}{\sqrt{2}} = 8.536$	$\frac{5}{2}(1+\sqrt{2}) = 6.036$	$\frac{5}{\sqrt{2}} = 3.536$
t_{ny} [MPa]	$-5+10\sqrt{2} = 9.142$	$-5+10\sqrt{2} = 9.142$	$-5+10\sqrt{2} = 9.142$	$-5+10\sqrt{2} = 9.142$
t_{nz} [MPa]	$-\frac{5}{2}(4+3\sqrt{2}) = -20.607$	$-\frac{5}{2}(4+3\sqrt{2}) = -20.607$	$-\frac{5}{2}(4+3\sqrt{2}) = -20.607$	$-\frac{5}{2}(4+3\sqrt{2}) = -20.607$
$\lvert\vec{t}_n\rvert$ [MPa]	$\frac{5}{2}\sqrt{81+14\sqrt{2}} = 25.100$	$5\sqrt{19+3\sqrt{2}} = 24.105$	$\frac{5}{2}\sqrt{73+6\sqrt{2}} = 23.338$	$5\sqrt{18+2\sqrt{2}} = 22.819$
σ_n [MPa]	$\frac{35}{4}-5\sqrt{2} = 1.679$	$\frac{15}{2}-5\sqrt{2} = 0.429$	$\frac{25}{4}-5\sqrt{2} = -0.821$	$5-5\sqrt{2} = -2.071$
τ_n [MPa]	$\sqrt{\frac{6075}{16}+175\sqrt{2}} = 25.044$	$\frac{5}{2}\sqrt{59+24\sqrt{2}} = 24.102$	$\frac{5}{4}\sqrt{235+80\sqrt{2}} = 23.323$	$5\sqrt{15+4\sqrt{2}} = 22.725$
δ	0.067	0.018	−0.035	−0.091
β_x	0.440	0.354	0.259	0.155
β_y	0.364	0.379	0.392	0.401
β_z	−0.820	−0.855	−0.883	−0.903
σ_x [MPa]	+25	+20	+15	+10

Esercizio 3 (6 punti)

$$u = k(ax + y^2) \qquad v = k(x^2 - by^2) \qquad w = 0 \qquad k = 10^{-4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ak \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ky \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2kx \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2kby \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Pertanto le componenti dei tensori $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\omega}}$ sono:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} ak & \frac{1}{2}(2kx+2ky) & 0 \\ \frac{1}{2}(2kx+2ky) & -2kby & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(2ky-2kx) & 0 \\ \frac{1}{2}(2kx-2ky) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e nel punto $P(2,1,0)$ le componenti di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\omega}}$ valgono

$$\varepsilon = k \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \omega = k \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$l_x = L_x(1+\varepsilon_x) = L_x(1+ka)$$
$$l_y = L_y(1+\varepsilon_y) = L_y(1+2kb)$$
$$\cos\delta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_{xy}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\varepsilon_{xy}\right) \doteq \cos\left(\frac{\pi}{2}-6k\right) = \sin 6k$$

e poiché $6k \ll 1$, $\sin 6k \simeq 6k$ sicché $\cos\delta \simeq 6k$

Le componenti di spostamento del punto P valgono:

$$u = k(2a+1^2) = k(2a+1)$$
$$v = k(2^2-b\cdot 1^2) = k(4-b)$$
$$w = 0$$

Per cui a spostamento avvenuto le coordinate del punto P' sono date da: $P' \equiv (2+u,\ 1+v,\ 0+w)$ ovvero

$$P' \equiv (2+k(2a+1),\ 1+k(4-b),\ 0)$$

Per quanto riguarda ω_z si riconosce che è pari a

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\,2(kx-ky) = k(x-y)$$

e, valutato in P fornisce $\omega_z = +k = \omega_{21}$.

I valori numerici sono i seguenti

Testo	1	2	3	4
a	4	3	2	3
b	3	4	3	2
l_x/L_x	$1+4\cdot 10^{-4}$	$1+3\cdot 10^{-4}$	$1+2\cdot 10^{-4}$	$1+3\cdot 10^{-4}$
l_y/L_y	$1-6\cdot 10^{-4}$	$1-8\cdot 10^{-4}$	$1-6\cdot 10^{-4}$	$1-4\cdot 10^{-4}$
$\cos\delta$	$6\cdot 10^{-4}$	$6\cdot 10^{-4}$	$6\cdot 10^{-4}$	$6\cdot 10^{-4}$
$x(P')$	$2+9\cdot 10^{-4}$	$2+7\cdot 10^{-4}$	$2+5\cdot 10^{-4}$	$2+7\cdot 10^{-4}$
$y(P')$	$1+1\cdot 10^{-4}$	$1+0\cdot 10^{-4}$	$1+1\cdot 10^{-4}$	$1+2\cdot 10^{-4}$
ω_z	$+10^{-4}$	$+10^{-4}$	$+10^{-4}$	$+10^{-4}$

Esercizio 4 (4 punti)

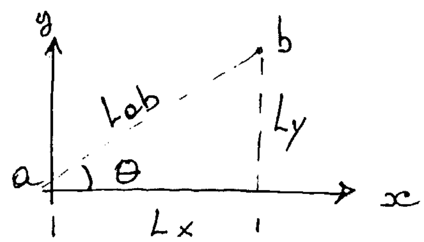
Risulta $\Delta L_{ab} = L_{ab}\cdot\varepsilon_a$, dove ε_a individua la deformazione (dilatazione) nella direzione ab.

Se α_x, α_y ($e\,\alpha_z=0$) sono i coseni direttori degli angoli che la direzione ab forma con gli assi x, y, z si ha che

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \varepsilon_z\alpha_z^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{xz}\alpha_x\alpha_z + \gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z$$

cioè, nel caso specifico ($\varepsilon_z=0$, $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$, $\alpha_z=0$)

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y .$$



$$L_{ab} = \sqrt{L_x^2+L_y^2}$$

$$\alpha_x = \cos\theta = \frac{L_x}{L_{ab}} = \frac{L_x}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}}$$

$$\alpha_y = \sin\theta = \frac{L_y}{L_{ab}} = \frac{L_y}{\sqrt{L_x^2+L_y^2}} .$$

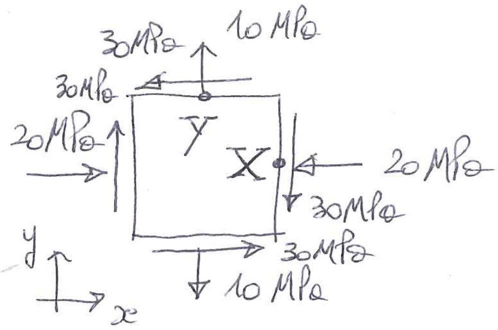
Pertanto

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\frac{L_x^2}{L_x^2+L_y^2} + \varepsilon_y\frac{L_y^2}{L_x^2+L_y^2} + 2\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\right)\frac{L_xL_y}{L_x^2+L_y^2} .$$

Esercizio n. 3 (4 punti)

Determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, la massima tensione tangenziale, τ_{max}, e l'angolo φ formato dall'asse x con la prima direzione principale (cioè quella secondo la quale agisce lo sforzo principale massimo), nonché il cerchio di Mohr per lo stato di sforzo piano avente componenti speciali di tensione di valori rispettivamente pari a σ_x = -20 MPa, σ_y = +10 MPa, τ_{xy} = -30 MPa.

Componenti di tensione applicati all'elementino infinitesimo:



Tensore degli sforzi:

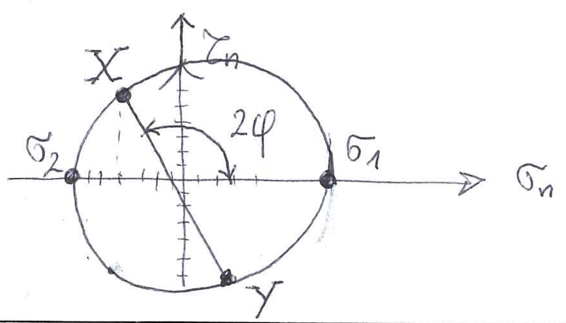
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -20 & -30 & 0 \\ -30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coordinate dei punti X e Y nel piano di Mohr sono rispettivamente: $X = (-20, +30)$; $Y = (+10, -30)$

σ_1 = $\begin{cases} -5+15\sqrt{5} \\ 28.541 \end{cases}$ MPa; σ_2 = $\begin{cases} -5-15\sqrt{5} \\ -38.541 \end{cases}$ MPa; τ_{max} = $\begin{cases} 15\sqrt{5} \\ 33.541 \end{cases}$ MPa.

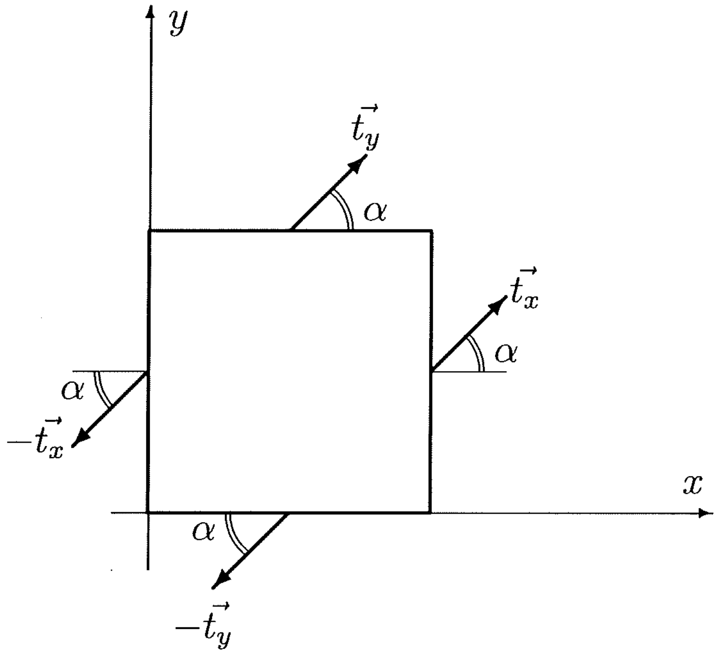
φ = 58.283 °;

cerchio di Mohr:



Esercizio n. 3 (9 punti)

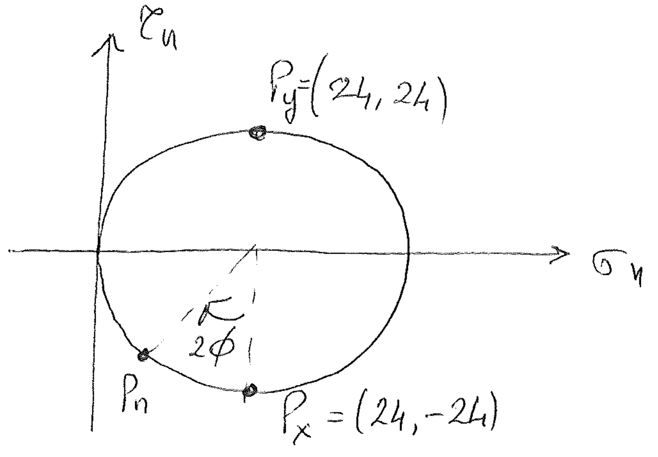
Un elemento di materiale è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente, con $|\boldsymbol{t}_x| = |\boldsymbol{t}_y| = 24\sqrt{2}$ MPa ed entrambi inclinati di un angolo di 45° rispetto all'asse x, come indicato.
Si chiede di costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}, nonché le componenti di sforzo σ_n, τ_n agenti su un piano la cui normale $\boldsymbol{n}$ forma un angolo φ = -30° (cioè pari a 30° *in senso orario*) con l'asse x.



σ_1 = ..48.000...... (MPa); σ_2 = ..0.000...... (MPa); τ_{max} = ...24.000............................ (MPa);

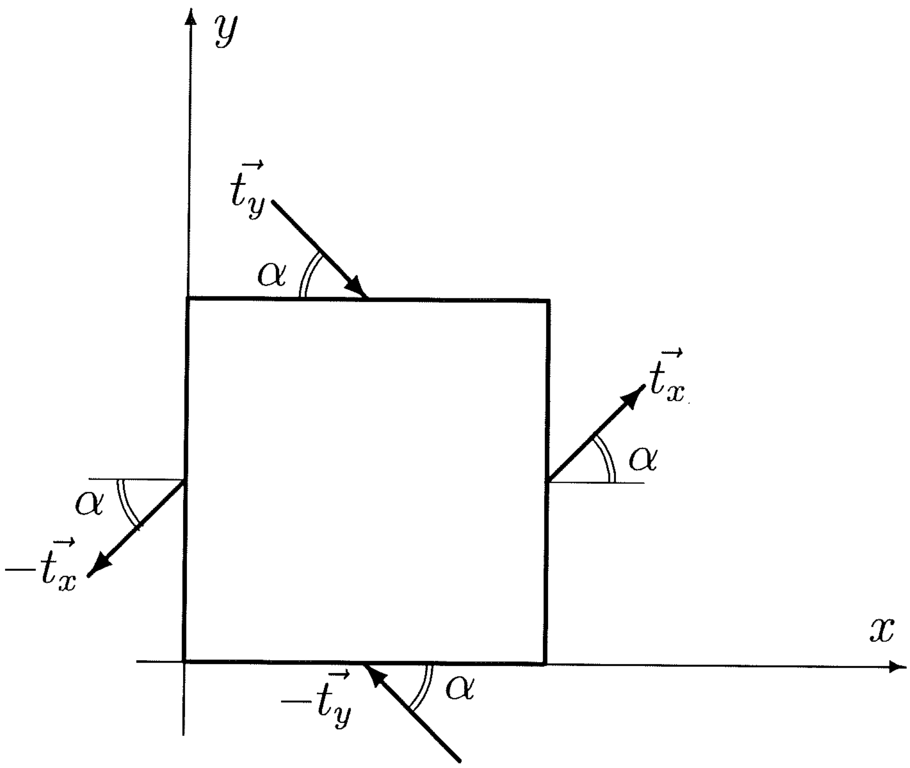
σ_n = ...3.2154....... (MPa); τ_n = ...12.000..... (MPa);

cerchio di Mohr:



Esercizio n. 3 (9 punti)

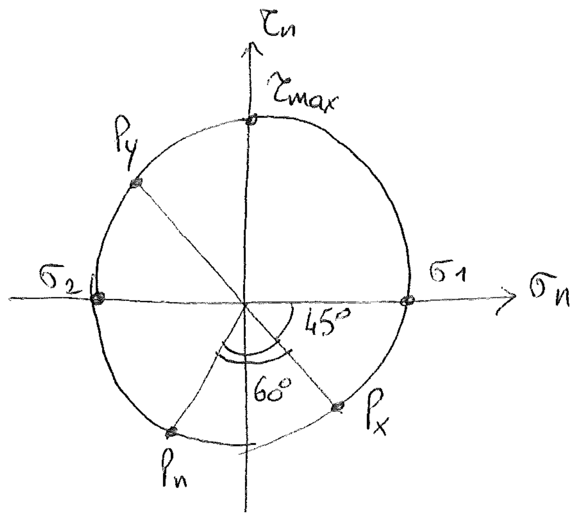
Un elemento di materiale è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente, con $|\boldsymbol{t}_x| = |\boldsymbol{t}_y| = 48\sqrt{2}$ MPa ed entrambi inclinati, come indicato in Figura, di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto all'orizzontale.
Si chiede di costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}, nonché le componenti di sforzo σ_n, τ_n agenti su un piano la cui normale $\boldsymbol{n}$ forma un angolo $\varphi = -30°$ (cioè pari a 30° *in senso orario*) con l'asse x.



σ_1 = ...67.882...... (MPa); σ_2 = -67.882...... (MPa); τ_{max} = ...67.882............................ (MPa);

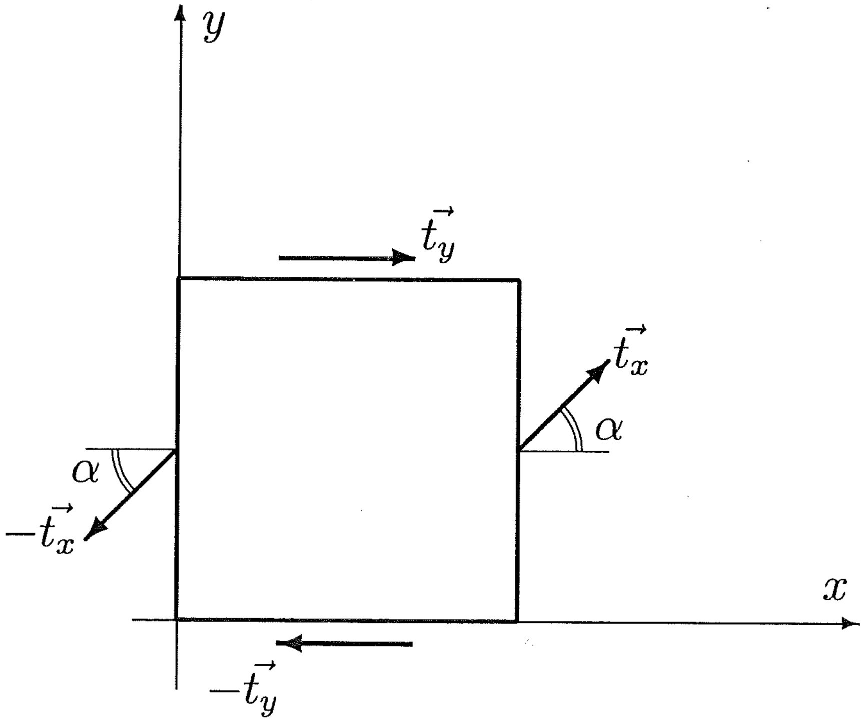
σ_n = ...-17.569..... (MPa); $|\tau_n|$ = ...65.569........ (MPa);

cerchio di Mohr:



Esercizio n. 3 (9 punti)

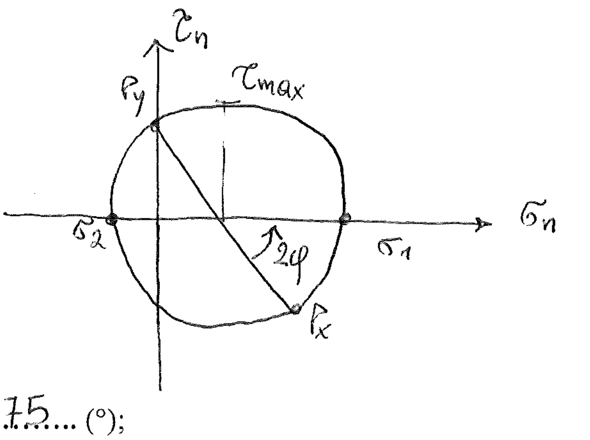
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente; di questi $\boldsymbol{t}_x$ è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 45°$ e ha modulo di valore $|\boldsymbol{t}_x| = 75\sqrt{2}$ MPa. L'altro vettore sforzo, $\boldsymbol{t}_y$, è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.



σ_x = ..75.0000...... (MPa); σ_y = ..0.0000...... (MPa); τ_{xy} = ..75.0000...... (MPa);

σ_1 = ...121.3525..... (MPa); σ_2 = ...-46.3525....... (MPa); τ_{max} = ...83.8525............... (MPa);

cerchio di Mohr:

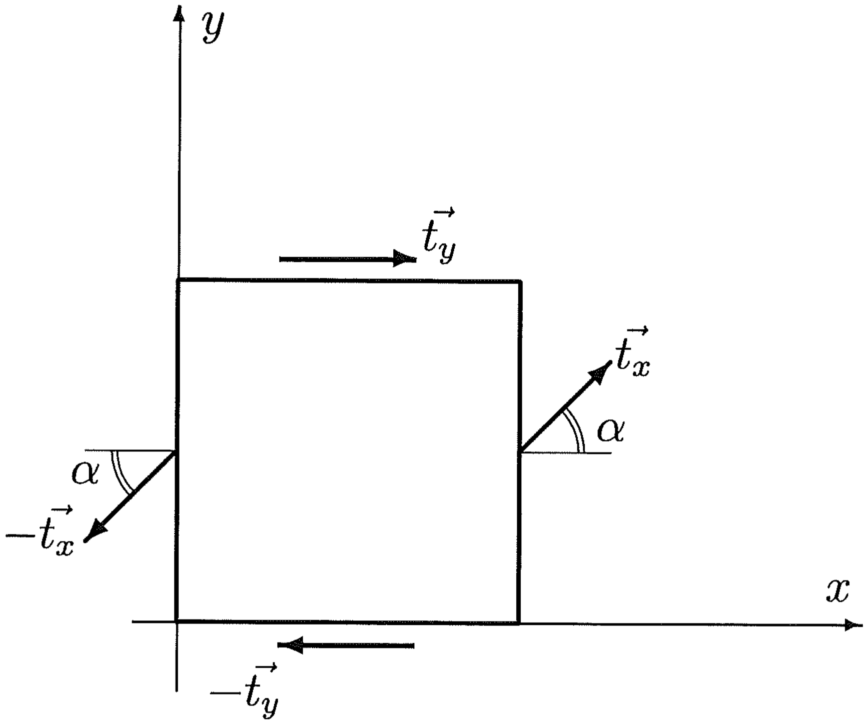


$P_x = (75.0000, -75.0000)$
$P_y = (0.0000, +75.0000)$

φ = ...31°.7175... (°);

Esercizio n. 3 (9 punti)

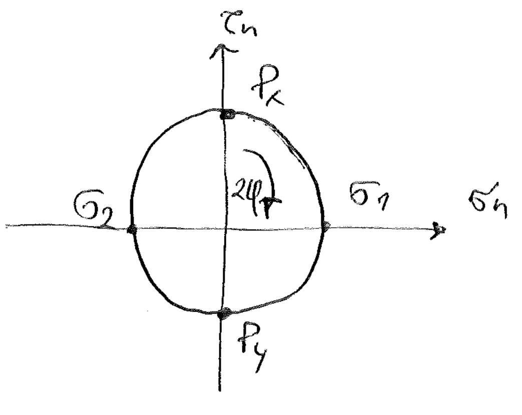
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -90°$ (sicché $\cos\alpha = 0$; $\sin\alpha = -1$) e ha modulo di valore $|t_x| = 340$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y, è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.

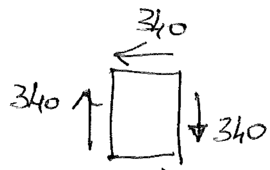


σ_x = 0,0000 (MPa); σ_y = 0,0000 (MPa); τ_{xy} = -340,0000 (MPa);

σ_1 = 340,0000 (MPa); σ_2 = -340,0000 (MPa); τ_{max} = 340,0000 (MPa);

cerchio di Mohr:





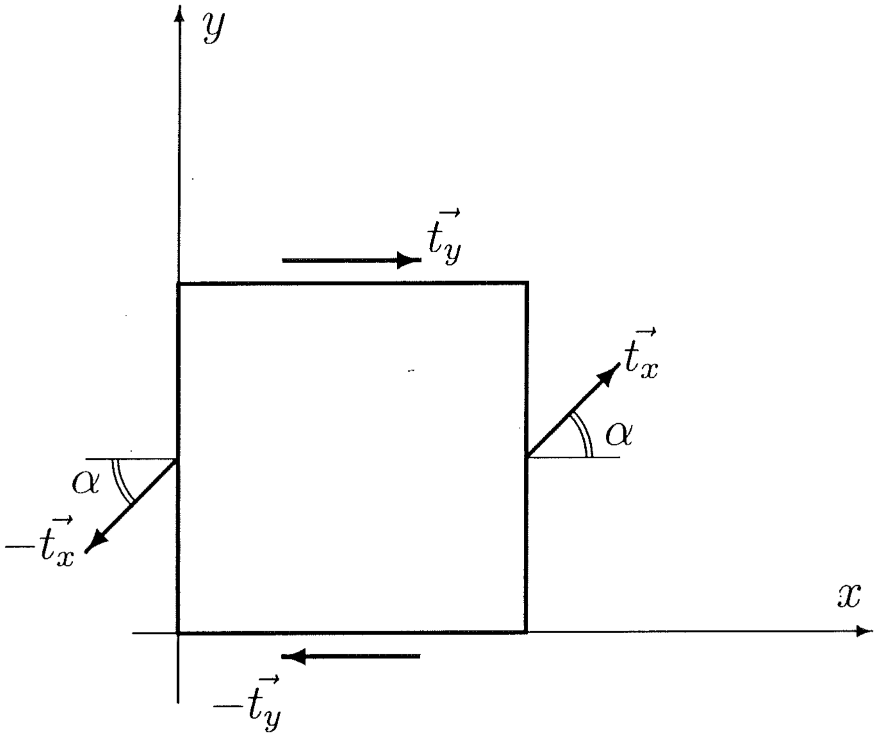
$P_x = (0,0000, +340,0000)$

$P_y = (0,0000, -340,0000)$

φ = -45,0000 (°);

Esercizio n. 3 (9 punti)

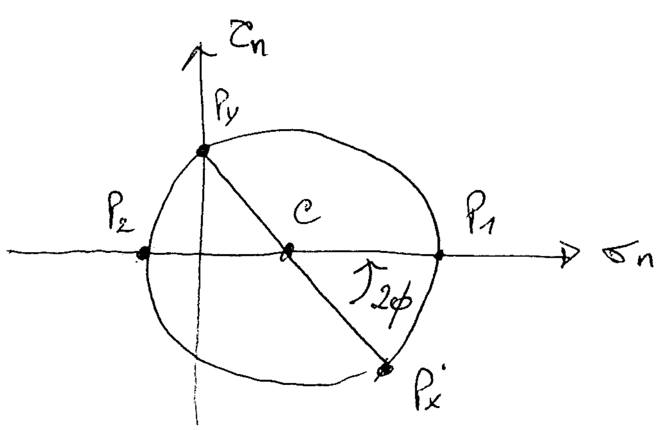
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 30°$ e ha modulo di valore $|t_x| = 70$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y, è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.



σ_x = 60,6218 (MPa); σ_y = 0,0000 (MPa); τ_{xy} = 35,0000 (MPa);

σ_1 = 76,6115 (MPa); σ_2 = −15,9898 (MPa); τ_{max} = 46,3006 (MPa);

cerchio di Mohr:



φ = 24°,5533 (°);