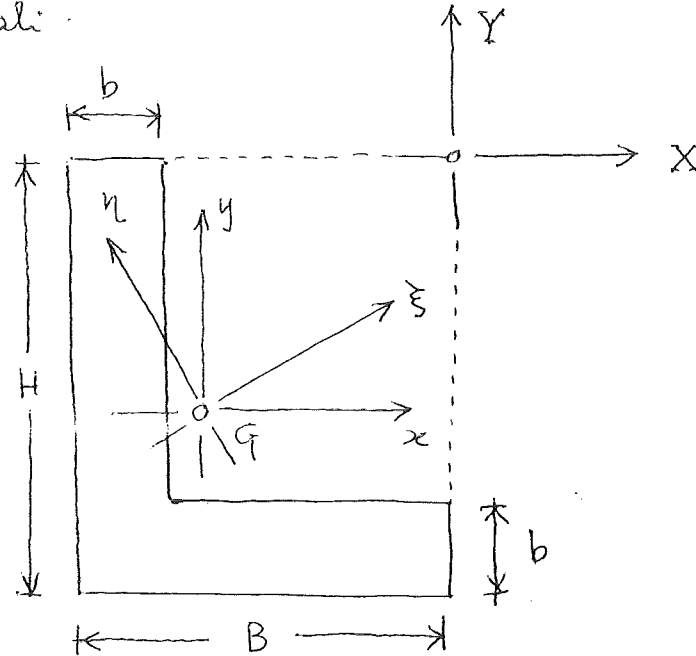


esempio. Data la sezione a L illustrata in figura, determinare le componenti del tensore dei momenti d'inerzia, calcolati rispetto agli assi  $x$  e  $y$  baricentrici e paralleli ai lati, e ricavare l'orientamento degli assi principali d'inerzia e i relativi momenti principali.



Si decompone la figura piana in due rettangoli. L'area della figura vale:

$$A = BH - (B-b)(H-b) = (B+H)b - b^2$$

I momenti statici rispetto agli assi  $X$  e  $Y$  valgono:

$$S_Y = BH \left(-\frac{B}{2}\right) - (B-b)(H-b) \left(-\frac{B-b}{2}\right) = -\frac{1}{2} [B^2H - (B-b)^2(H-b)^2]$$

$$S_X = BH \left(-\frac{H}{2}\right) - (B-b)(H-b) \left(-\frac{H-b}{2}\right) = -\frac{1}{2} [BH^2 - (B-b)(H-b)^2]$$

A questo punto è quindi possibile determinare le distanze del baricentro  $G$  dagli assi  $X$  e  $Y$ .

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = - \frac{B^2 H - (B-b)^2 (H-b)}{2 [(B+H)b - b^2]}$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = - \frac{B^2 H^2 - (B-b)(H-b)^2}{2 [(B+H)b - b^2]}$$

Ricordando che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto alla sua base vale  $bh^3/3$ , si ha che i momenti d'inerzia rispetto agli assi  $X$  e  $Y$  valgono:

$$J_{XX} = \frac{BH^3}{3} - \frac{(B-b)(H-b)^3}{3} = \frac{BH^3 - (B-b)(H-b)^3}{3}$$

$$J_{YY} = \frac{B^3 H}{3} - \frac{(B-b)^3 (H-b)}{3} = \frac{B^3 H - (B-b)^3 (H-b)}{3}$$

Ricordando il teorema di Huygens, che nel caso in esame si scrive:

$$J_{XX} = J_{xx} + A Y_G^2$$

$$J_{YY} = J_{yy} + A X_G^2$$

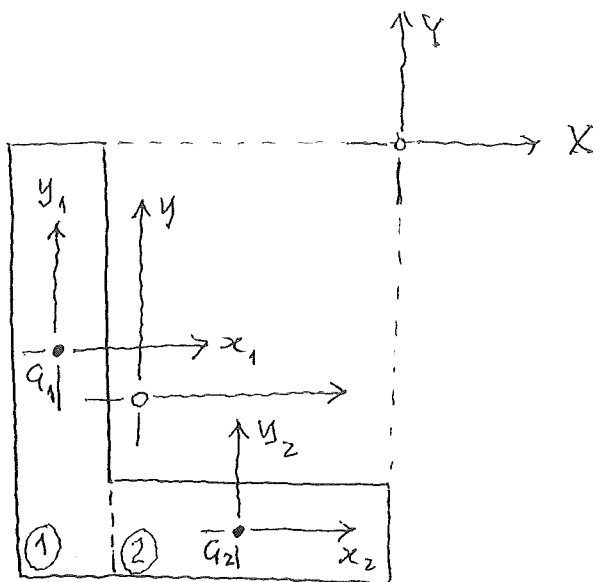
si ottiene:

$$J_{xx} = J_{XX} - A Y_G^2 = \frac{BH^3 - (B-b)(H-b)^3}{3} - \frac{[BH^2 - (B-b)(H-b)^2]^2}{4 [(B+H)b - b^2]}$$

$$J_{yy} = J_{YY} - A X_G^2 = \frac{B^3 H - (B-b)^3 (H-b)}{3} - \frac{[B^2 H - (B-b)^2 (H-b)]^2}{4 [(B+H)b - b^2]}$$

Rimane da calcolare il momento d'inerzia centrifugo  $J_{xy}$ .

Si considera quindi l'area piana decomposta in due rettangoli nel modo seguente.



Rispetto agli assi  $x_1-y_1$  e  $x_2-y_2$  i momenti d'inertia centrifughi dei rettangoli 1 e 2 sono nulli, poiché ~~essi~~ tali assi sono principali d'inertia.

Pertanto, ricordando ancora il teorema di Huygens

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + A x_{G_1} y_{G_1}$$

si ha che

$$J_{xy} = A_1 x_{G_1} y_{G_1} + A_2 x_{G_2} y_{G_2}$$

dove:

$$A_1 = Hb \quad ; \quad A_2 = (B-b)b$$

$$x_{G_1} = X_{G_1} - X_G = \left(B - \frac{b}{2}\right) + \frac{B^2 H - (B-b)^2 (H-b)}{2[(B+H)b - b^2]}$$

$$x_{G_2} = X_{G_2} - X_G = -\frac{B-b}{2} + \frac{B^2 H - (B-b)^2 (H-b)}{2[(B+H)b - b^2]}$$

$$y_{G_1} = Y_{G_1} - Y_G = -\frac{H}{2} + \frac{BH^2 - (B-b)(H-b)^2}{2[(B+H)b - b^2]}$$

$$y_{G_2} = Y_{G_2} - Y_G = -\left(H - \frac{b}{2}\right) + \frac{BH^2 - (B-b)(H-b)^2}{2[(B+H)b - b^2]}$$

Introducendo dei valori numerici, ad esempio  $H=10$  cm,  
 $B=8$  cm,  $b=3$  cm, si ottiene:

$$J_{xx} = 383.7 \text{ cm}^4$$

$$J_{yy} = 213.7 \text{ cm}^4$$

$$J_{xy} = -138.8 \text{ cm}^4$$

Dalla formula di rotazione del momento centrifugo:

$$J_{\xi\eta} = J_{xy} \cos 2\theta + \frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \sin 2\theta = 0$$

si ricava

$$\tan 2\theta = - \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}$$

da cui

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( - \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right)$$

Introducendo i valori numerici ricavati in precedenza:

$$\theta = 29.26 \text{ gradi centesimali.}$$

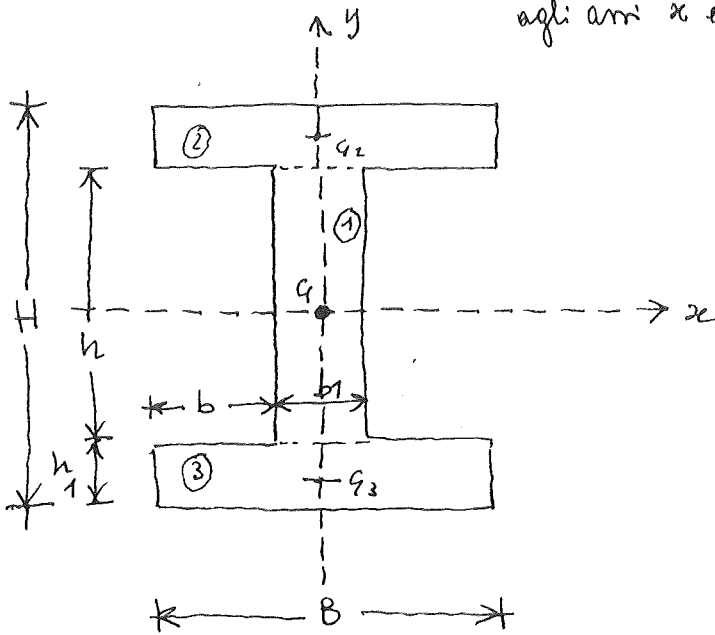
I valori dei momenti d'inerzia principali:

$$J_{\xi\xi} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}^2} = 461.4 \text{ cm}^4$$

$$J_{\eta\eta} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}^2} = 136.0 \text{ cm}^4$$

Esempio 2

Si vogliono i momenti di inerzia rispetto agli assi  $x$  e  $y$ .



ipotesi:  $\rho = 1$

Si scompone la figura in tre rettangoli.

Per ciascun rettangolo i momenti d'inerzia rispetto ai propri assi baricentrici sono:

$$J_{x_1 x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h^3}{12}$$

$$J_{y_1 y_1}^{(1)} = \frac{h b_1^3}{12}$$

$$J_{x_2 x_2}^{(2)} = \frac{B h_2^3}{12}$$

$$J_{y_2 y_2}^{(2)} = \frac{h_2 B^3}{12}$$

$$J_{x_3 x_3}^{(3)} = \frac{B h_3^3}{12}$$

$$J_{y_3 y_3}^{(3)} = \frac{h_3 B^3}{12}$$

Per i rettangoli 2 e 3 possiamo applicare la legge di trasposizione.

Ricordiamo il teorema di Huygens:

$$J_{xx} = J_{x_c x_c} + A y_c^2$$

$$J_{yy} = J_{y_c y_c} + A x_c^2$$

Si ha quindi per il rettangolo 2:

$$J_{xx} = \frac{B h^3}{12} + B h_1 \left( \frac{h+h_1}{2} \right)^2$$

$$J_{yy} = J_{y_c y_c}$$

Per il rettangolo 3, analogamente:

$$J_{xx} = \frac{B h^3}{12} + B h_1 \left( \frac{h+h_1}{2} \right)^2$$

$$J_{yy} = J_{y_c y_c}$$

I momenti d'inerzia risultano quindi essere:

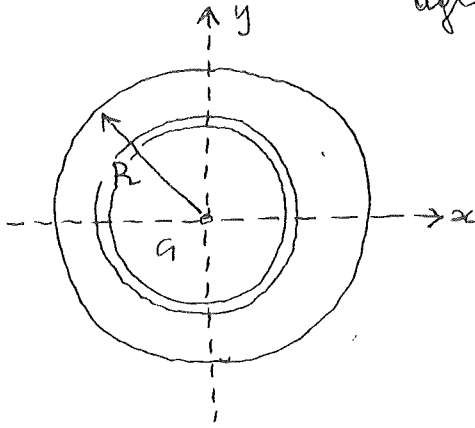
$$J_{xx} = 2 \left[ \frac{B h^3}{12} + B h_1 \left( \frac{h+h_1}{2} \right)^2 \right] + \frac{b_1 h^3}{12}$$

$$J_{yy} = 2 \frac{h_1 B^3}{12} + \frac{h b_1^3}{12}$$

Osservazione: Gli assi  $x-y$  sono assi di simmetria, quindi sono assi principali d'inerzia ed i momenti calcolati sono momenti principali.

Esempio 3

Determinare il momento d'inerzia polare e i momenti d'inerzia ~~secondo gli~~ rispetto agli assi  $x$  e  $y$ .



ipotesi :  $\rho = 1$

Momento d'inerzia polare :

$$J_G = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A r^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_{yy} + J_{xx}$$

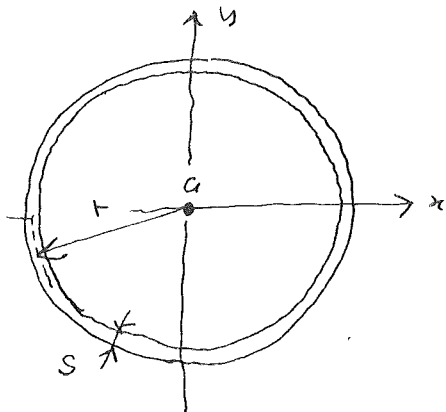
$$J_G = \int_0^R r^2 2\pi r dr = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Dalla geometria della figura sappiamo che

$$J_{xx} = J_{yy}$$

○ pertanto:

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{J_G}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Esempio 4

ipotesi : s piccolo

Momento d'inerzia polare

Poiché  $s$  è piccolo si può pensare l'area concentrata lungo la circonferenza media (è una approssimazione).

Quindi,

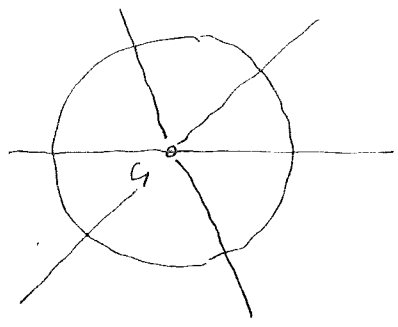
$$J_G = A \cdot r^2 = 2\pi r s \cdot r^2 = 2\pi r^3 s$$

Per la particolare geometria :

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{J_G}{2} = \pi r^3 s$$

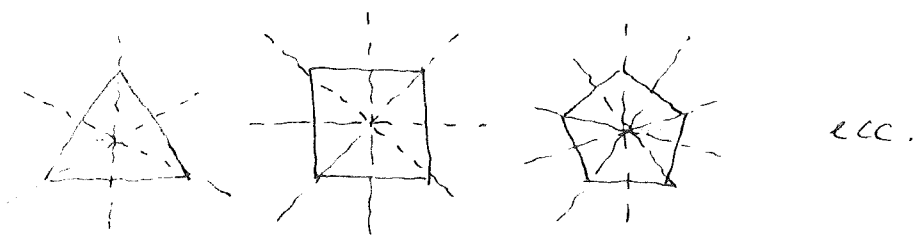
Osservazione.

Il cerchio ha infiniti assi di simmetria:

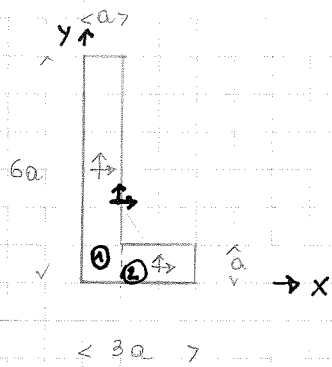


Pertanto qualsiasi coppia di assi ortogonali  
biconcentrici sono assi principali d'inerzia.

Analogamente per i poligoni regolari:



00



$$S_x = (6a^2 \cdot 3a) + 2a^2 \cdot \frac{a}{2} = 18a^3 + a^3 = 19a^3$$

$$S_y = (6a^2 \cdot \frac{a}{2}) + (2a^2) \cdot 2a = 3a^3 + 4a^3 = 7a^3$$

$$A = A_1 + A_2 = 6a^2 + 2a^2 = 8a^2$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{7}{8}a \\ y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{19}{8}a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{x_G x_G} &= \frac{1}{12} (6a^3) a + A_1 \cdot \left( \frac{-24+19}{8} a \right)^2 + \frac{1}{12} (2a) a^3 + A_2 \left( \frac{-4+19}{8} a \right)^2 \\ &= \frac{216}{12} a^4 + 6a^2 \cdot \frac{25}{64} a^2 + \frac{1}{6} a^4 + 2a^2 \cdot \frac{225}{64} a^2 \\ &= 18a^4 + \frac{1}{6} a^4 + \frac{600}{64} a^4 = \left( 18 + \frac{1}{6} + \frac{75}{8} \right) a^4 = \frac{432+4+225}{24} a^4 = \frac{661}{24} a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_G y_G} &= \frac{1}{12} 6a \cdot a^3 + A_1 \left( \frac{-4+7}{8} a \right)^2 + \frac{1}{12} (2a) \cdot a^3 + A_2 \left( \frac{-16+7}{8} a \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} a^4 + 6a^2 \cdot \frac{9}{64} a^2 + \frac{2}{3} a^4 + 2a^2 \cdot \frac{81}{64} a^2 \\ &= \frac{7}{6} a^4 + \frac{54+162}{64} a^4 = \left( \frac{7}{6} + \frac{27}{8} \right) a^4 = \frac{28+81}{24} a^4 = \frac{109}{24} a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_G y_G} &= A_1 \left( \frac{7-4}{8} a \right) \left( \frac{19-24}{8} a \right) + A_2 \left( \frac{7-16}{8} a \right) \left( \frac{19-4}{8} a \right) \\ &= 6a^2 \left( \frac{3}{8} a \right) \left( \frac{-5}{8} a \right) + 2a^2 \left( \frac{-9}{8} a \right) \left( \frac{15}{8} a \right) \\ &= -\frac{90}{64} a^4 - \frac{270}{64} a^4 = -\frac{360}{64} a^4 = -\frac{45}{8} a^4 = -\frac{135}{24} a^4 \end{aligned}$$

$$I_{\xi} = \frac{I_{x_G x_G} + I_{y_G y_G}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_G x_G} - I_{y_G y_G})^2 + 4 I_{x_G y_G}^2} \quad (I_{x_G x_G} > I_{y_G y_G})$$

$$I_{\eta} = \frac{I_{x_G x_G} + I_{y_G y_G}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_G x_G} - I_{y_G y_G})^2 + 4 I_{x_G y_G}^2}$$

$$\frac{1}{2} (I_{x_G x_G} + I_{y_G y_G}) = \frac{1}{2} \left( \frac{661}{24} + \frac{109}{24} \right) a^4 = \frac{385}{24} a^4 \quad I_{x_G x_G} - I_{y_G y_G} = \frac{552}{24} a^4$$

$$\begin{aligned} I_{x_G y_G} &= -\frac{135}{24} a^4 \\ \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_G x_G} - I_{y_G y_G})^2 + 4 I_{x_G y_G}^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{24} a^4 \right) \sqrt{(552)^2 + 4 \cdot (135)^2} \\ &\approx \frac{614.5}{48} a^4 = \frac{307.25}{24} a^4 \end{aligned}$$

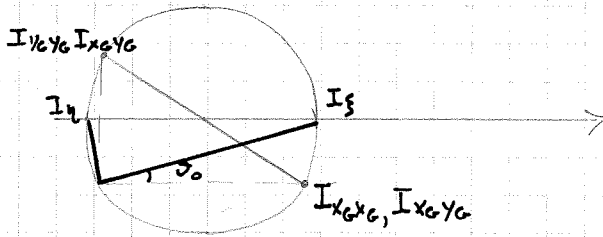
$$I_{\xi} = \frac{385 + 307.25}{24} a^4 = \frac{692.25}{24} a^4$$

$$f_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{A}} = \sqrt{\frac{692.25 a^4}{24 \cdot 8a^2}} \approx 1.9a$$

$$I_{\eta} = \frac{385 - 307.25}{24} a^4 = \frac{77.75}{24} a^4$$

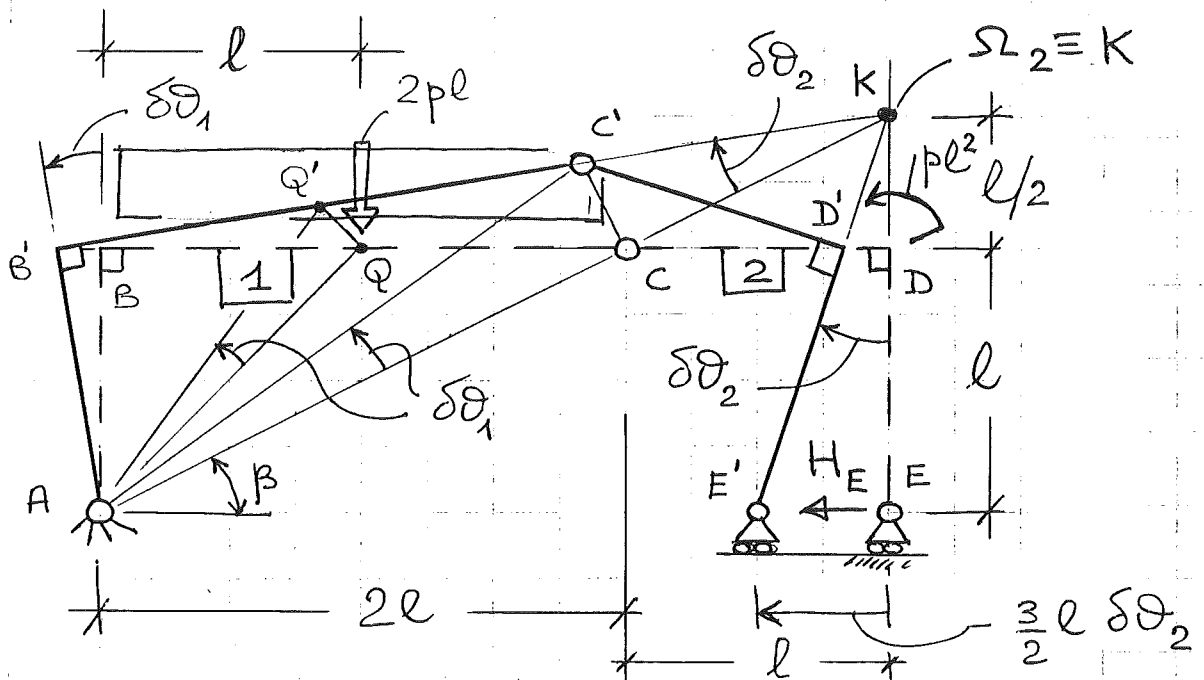
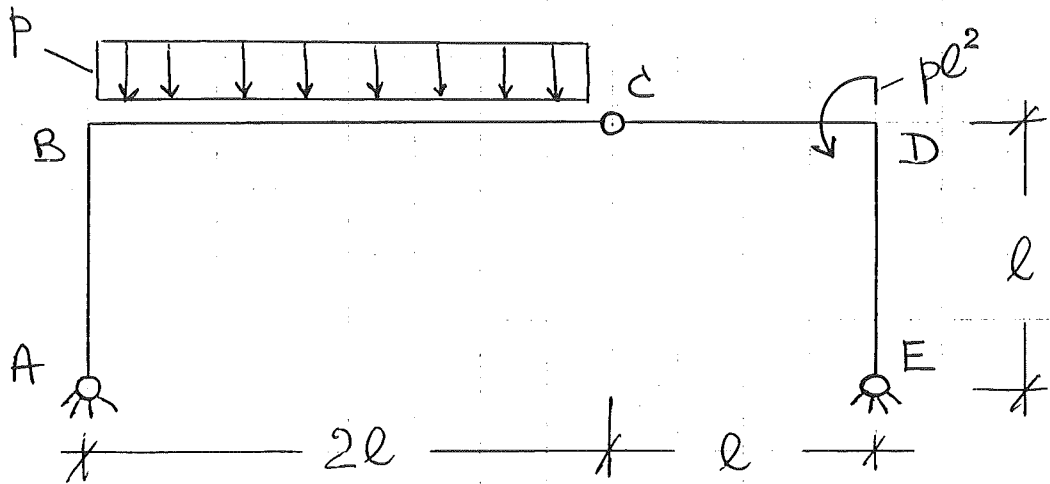
$$f_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{A}} = \sqrt{\frac{77.75 a^4}{24 \cdot 8a^2}} \approx 0.64a$$

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 I_{x_0 y_0}}{I_{y_0 y_0} - I_{x_0 x_0}} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{-270}{109 - 661} = \frac{1}{2} \tan^{-1}(0.49) \rightarrow \vartheta_0 \approx 13^\circ$$



# Esercizio su PLV

Per la struttura ISOSTATICA (non labile) assegnata, determinare la reaz. orizzontale in E mediante PLV.

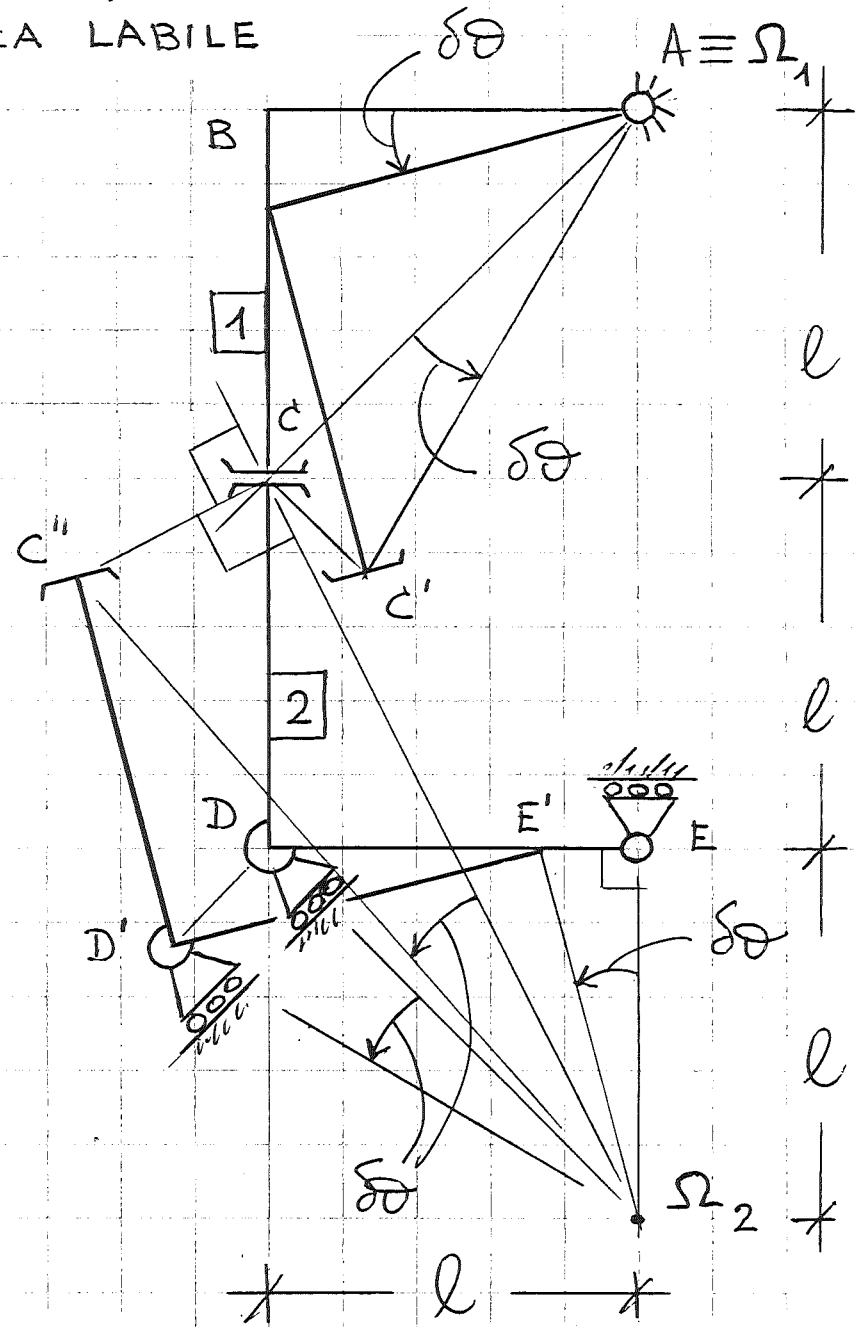
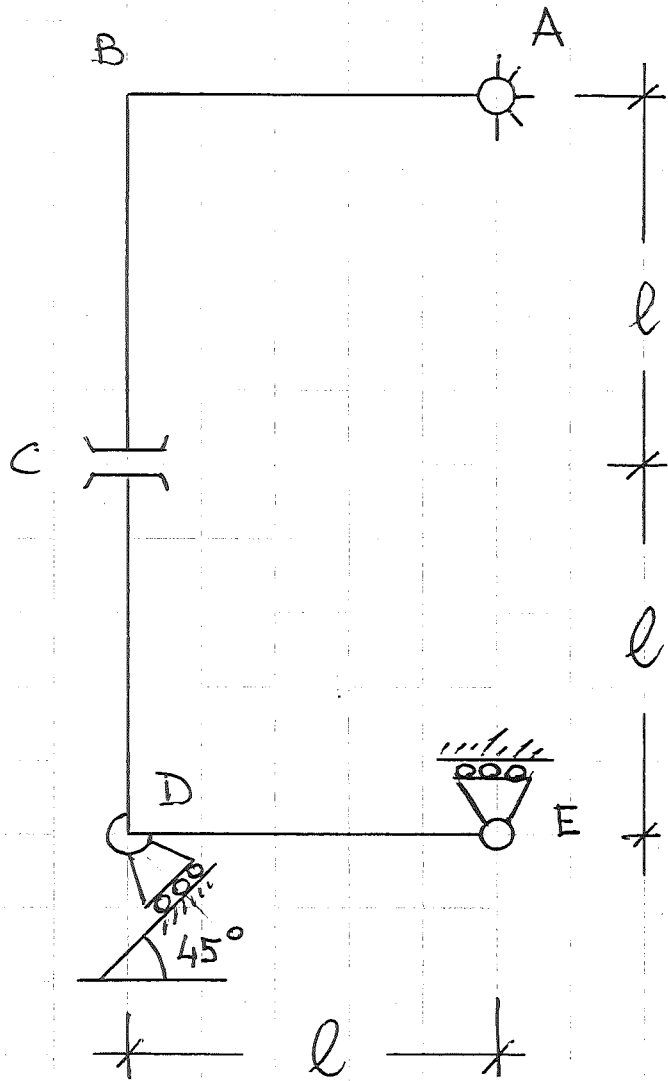


$$\left. \begin{aligned} \overline{CC'} &= \overline{AC'} \delta\theta_1 = (2l/\cos\beta) \delta\theta_1 \\ \overline{CC'} &= \overline{KC'} \delta\theta_2 = (l/\cos\beta) \delta\theta_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta\theta_2 = 2\delta\theta_1$$

$$\delta L = -(2pl)(l\delta\theta_1) - (pe^2) \delta\theta_2 + H_E \left(\frac{3}{2}l\delta\theta_2\right) = 0$$

$$\delta L = (-2pe^2 - 2pe^2 + 3H_E l) \delta\theta_1 = 0 \Rightarrow \boxed{H_E = \frac{4}{3}pe}$$

Esempio di struttura  
ISOSTATICA LABILE



CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2011-2012

Prova scritta in aula del 25.09.2012

Parte I - Testo 1

CdS Edilizia

CdS AdC

CdS SdA

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

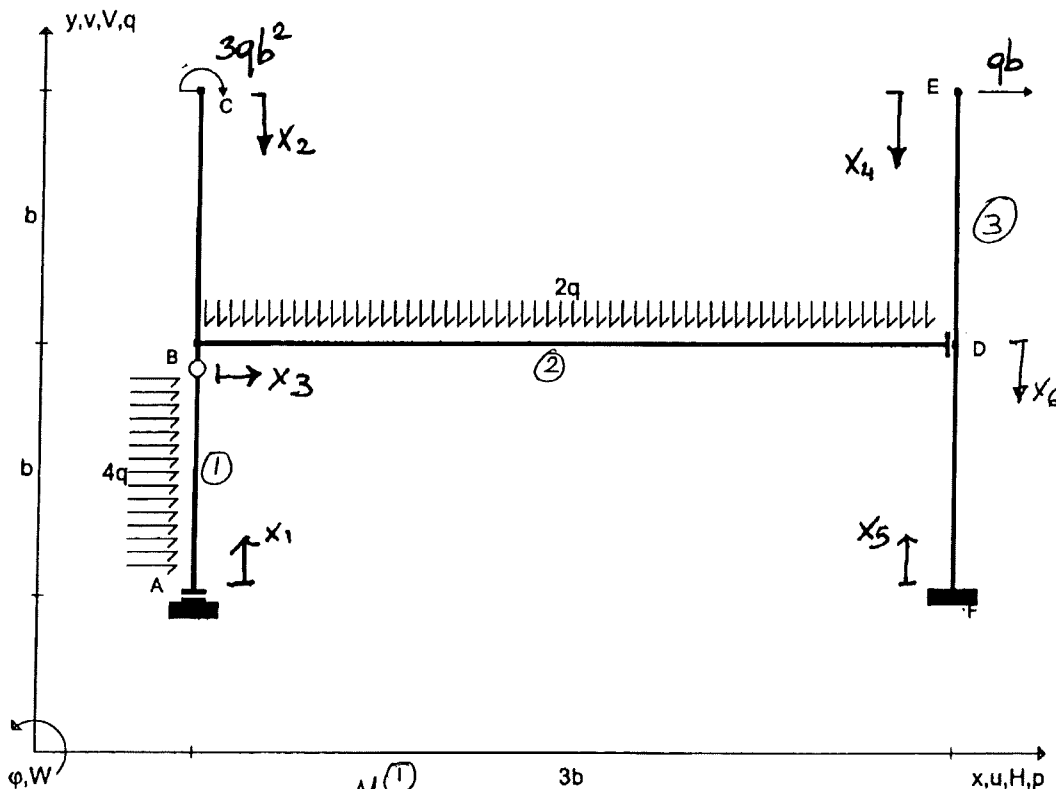
Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.  
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 25.09.12\*001



eq. ausiliarie:

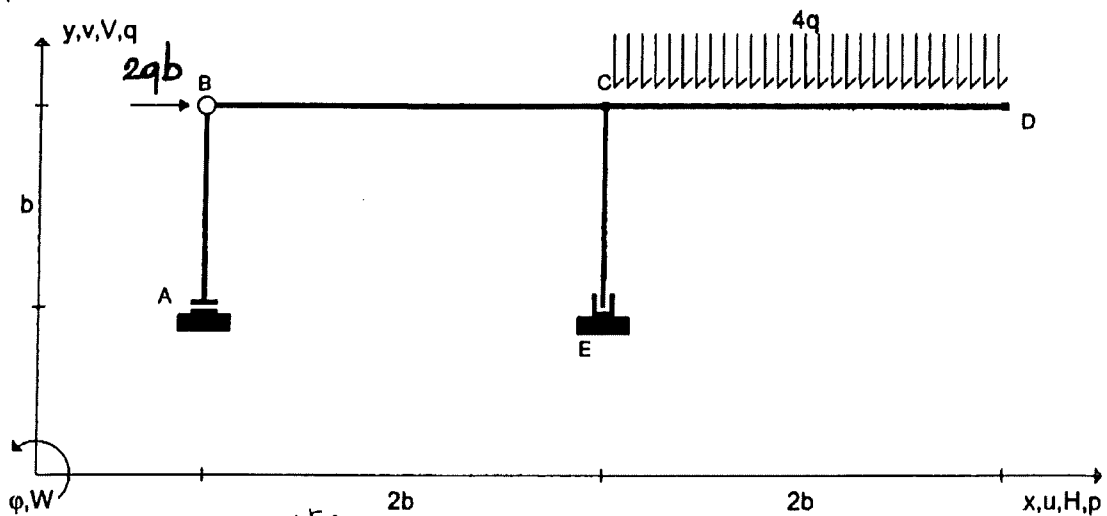
$$\begin{cases} M_Z^{(B)} = 0 \\ R_y^{(3)} = 0 \end{cases}$$

**Esercizio n. 2 (11 punti)**

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare  $M_F$  applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta AB),  $C_1$ , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta BC'ED),  $C_2$ , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi.  $C_{12}$ ;
  2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
  3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto A,  $u_A$ , e quella verticale dello spostamento del punto D,  $v_D$ ;
- Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto C dell'asta BC,  $M_C^{(M)}$ . In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, DCE*) si richiede di:
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
  5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti verticali dello spostamento virtuale dei punti D,  $v_D$ , ed E,  $v_E$ .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:  $(\infty, m)$ , dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



Handwritten kinematic diagrams and calculations for the instantaneous centers of rotation.

**Diagram 1 (Top):** Shows the instantaneous center  $C_1$  at infinity (indicated by  $\infty$ ) and  $C_2$  at the intersection of the vertical line through A and the horizontal line through C. The relative instantaneous center  $C_{12}$  is shown on the line AC. Virtual displacements are indicated:  $\delta u_1$  at A,  $b\delta\varphi_2$  at C, and  $4b\delta\varphi_2$  at D.

**Diagram 2 (Bottom):** Shows the instantaneous center  $C_1$  at infinity and  $C_2$  at the intersection of the vertical line through E and the horizontal line through C. The relative instantaneous center  $C_{23}$  is shown on the line CE. Virtual displacements are indicated:  $\delta v_3$  at E,  $2b\delta\varphi_2$  at C, and  $\delta v_3$  at D.

**Equations and Relations:**

- $C_2 \equiv A \begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \therefore C_2 \in r_1 \end{cases}$
- $\delta u_1 = b\delta\varphi_2$
- $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_1$
- $C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \Rightarrow C_2 \in r_2$
- $\Rightarrow C_2 \equiv C_{12}$  e la trave non si sposta
- $C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{23} \Rightarrow C_{13} \in r_1$
- $C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \Rightarrow C_{13} \in r_2$
- $\Rightarrow C_{13} \equiv C_3$

**Final Calculations:**

- $\delta v_3 = 2b\delta\varphi_2$
- Scritto 25.09.2012, Parte I - Testo 1, pag.2

$$M_E(\hat{\varphi}) = +26qb^2; C_1 = (\dots a \dots, \dots a \dots); C_2 = (\dots 0 \dots, \dots 0 \dots); C_{12} = (\dots 0 \dots, \dots b \dots);$$

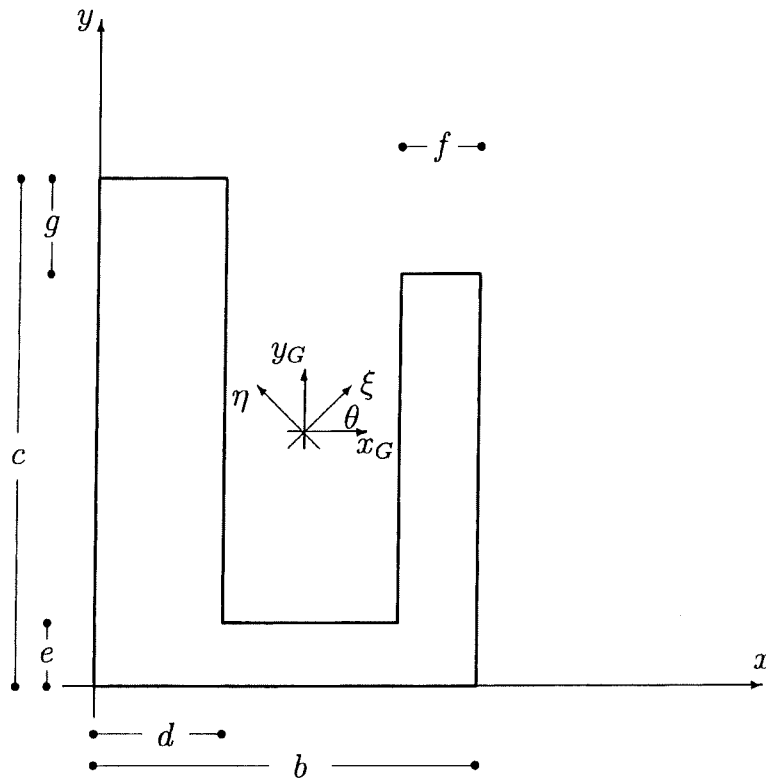
$$u_A = \int u_2 = b \delta q_2; v_A = -4b \delta q_2;$$

$$M_C^{(BC)}(\hat{\varphi}) = +16qb^2; v_B = -\int u_2 = -7b \delta q_2; v_C = -\int u_3 = -17b \delta q_2$$

### Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti:  $b = c = 10a$ ;  $d = 4a$ ;  $e = 4a$ ;  $f = 2a$ ;  $g = 0$ ; si richiede di:

- calcolare i momenti statici,  $S_x$  e  $S_y$  (rispetto agli assi  $x$  e  $y$  indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro  $x_G$  e  $y_G$  rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia  $J_{xG}$  e  $J_{yG}$  e il momento centrifugo  $J_{xGyG}$  rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia,  $J_\xi = J_{\max}$  e  $J_\eta = J_{\min}$  rispetto agli assi centrali d'inerzia,  $\xi$ ,  $\eta$ ;
- calcolare la tangente trigonometrica,  $\tan 2\theta$ , del doppio dell'angolo  $\theta$  formato dagli assi  $x_G$  e  $\xi$ .



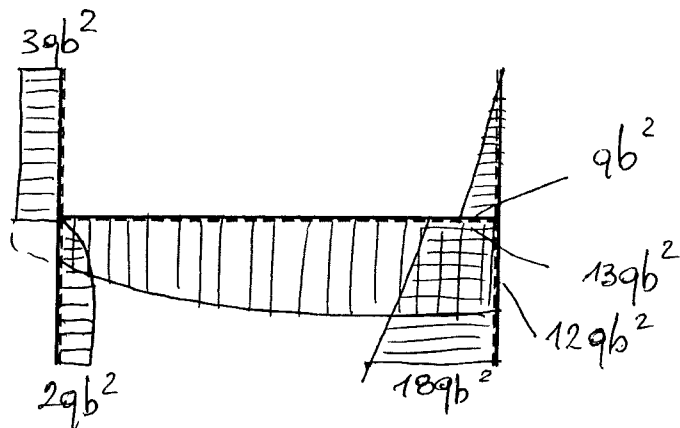
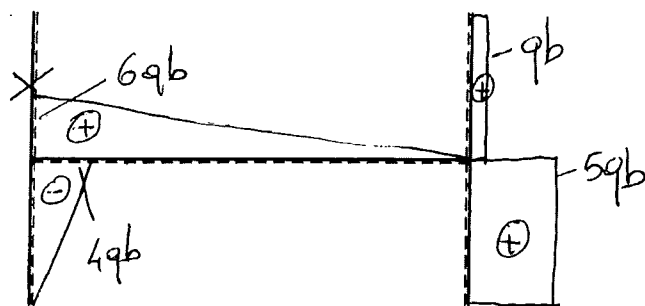
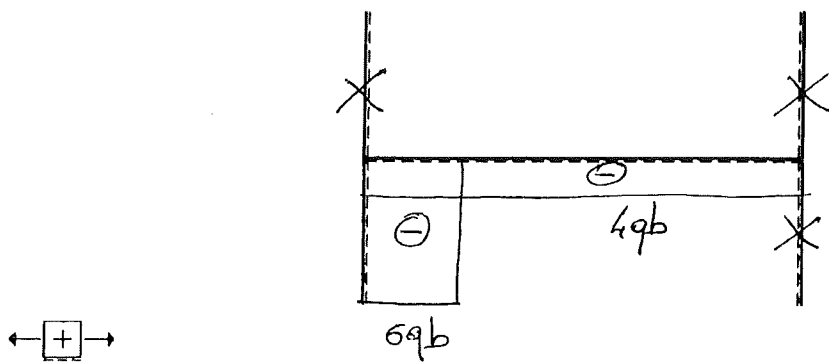
$$S_x = 332a^3; S_y = 356a^3;$$

$$x_G = \frac{89}{18}a = 4.94421a; y_G = \frac{83}{19}a = 4.36842a;$$

$$J_{xG} = \frac{36196}{57}a^4 = 635.01754a^4; J_{yG} = \frac{43876}{57}a^4 = 769.75439a^4;$$

$$J_{xGyG} = -\frac{1200}{19}a^4 = -63.15789a^4; \tan 2\theta = -\frac{15}{16} = -0.9375 \quad (\theta = -21.5762^\circ)$$

$$J_\xi = J_{\max} = 784.73002a^4; J_\eta = J_{\min} = 610.04191a^4;$$



$V_A(\uparrow) = 6qb$	$M_A(\curvearrowright) = -2qb^2$	$H_F(\Rightarrow) = -5qb$	$V_F(\uparrow) = 0$	$M_F(\curvearrowright) = 18qb^2$
$N_{AB} = -6qb$	$T_{AB} = -4qx_1$	$M_{AB} = 2qb^2 - 2qx_1^2$		
$N_{CB} = 0$	$T_{CB} = 0$	$M_{CB} = -3qb^2$		
$N_{BD} = -4qb$	$T_{BD} = 6qb - 2qx_3$	$M_{BD} = 3qb^2 + 6qb x_3 - qx_3^2$		
$N_{ED} = 0$	$T_{ED} = qb$	$M_{ED} = qb x_4$		
$N_{FD} = 0$	$T_{FD} = 5qb$	$M_{FD} = \begin{cases} 18qb^2 - 5qx_5 \\ 13qb^2 + 5qb x_6 \end{cases}$		