**Esercizio n. 2** (11 punti)

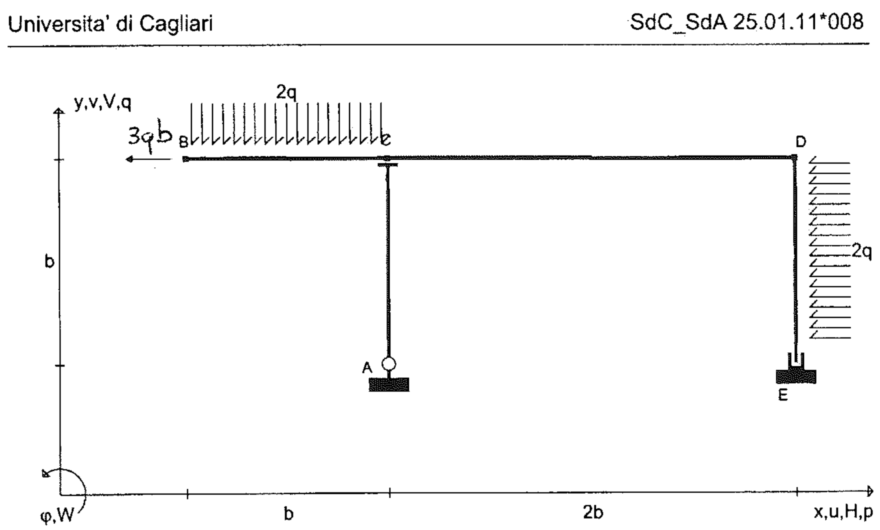
Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare $H_E$ applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

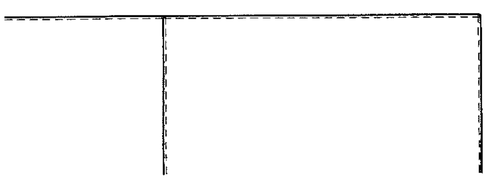
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta *ABCD*), $C_1$, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta *DE*), $C_2$, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, $C_{12}$;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto *B*, $u_B$, e quella verticale dello spostamento del punto *C*, $v_C$;

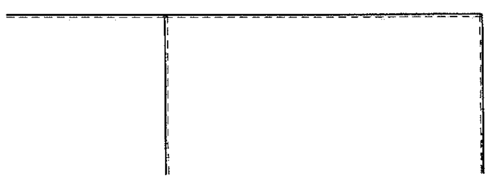
Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto *C*, $M_C$ ***riferito all'asta AC***. In questa situazione si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti *B* e *D*, $u_B$, $u_D$.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: $(\infty, m)$, dove $m$ è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio





$H_E$ (⇨) = ......................; $C_1$ = (........., ..........); $C_2$ = (........., ..........); $C_{12}$ = (........., ..........);

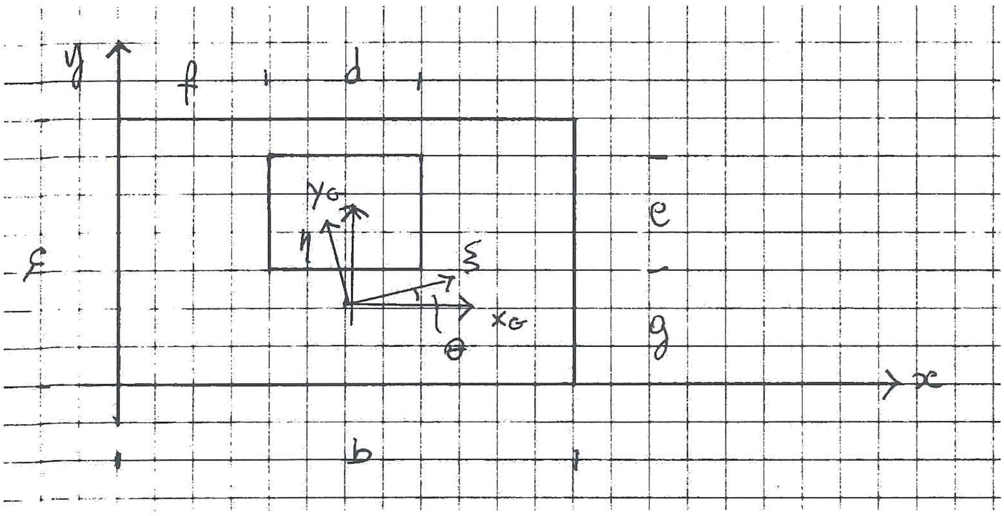
$u_B$ = ......................; $v_C$ = ............................;

$M_C$ (⇦□⇨) = .....................; $u_B$ = .....................; $u_D$ = ......................;

**Esercizio n. 3** (5 punti)

Per la lamina piana omogenea forata indicata in Figura, nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 12a$; $c = 16a$; $d = 6a$; $e = 8a$; $f = 3a$; $g = 4a$, si richiede di:

- calcolare i momenti statici, $S_x$ e $S_y$ (rispetto agli assi $x$ e $y$ indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro $x_G$ e $y_G$ rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia $J_{xG}$ e $J_{yG}$ e il momento centrifugo $J_{xGyG}$ rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, $\xi$, $\eta$;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi $x_G$ e $\xi$.




$S_x$ = ..........................................................; $S_y$ = ..............................................................;

$x_G$ = ..........................................................; $y_G$ = ..............................................................;

$J_{xG}$ = .......................................................; $J_{yG}$ = ..............................................................;

$J_{xGyG}$ = ....................................................; tan 2θ = .........................................................;

$J_\xi = J_{max}$ = ...............................................; $J_\eta = J_{min}$ = ..................................................;

**Esercizio n. 2** (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare $H_E$ applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

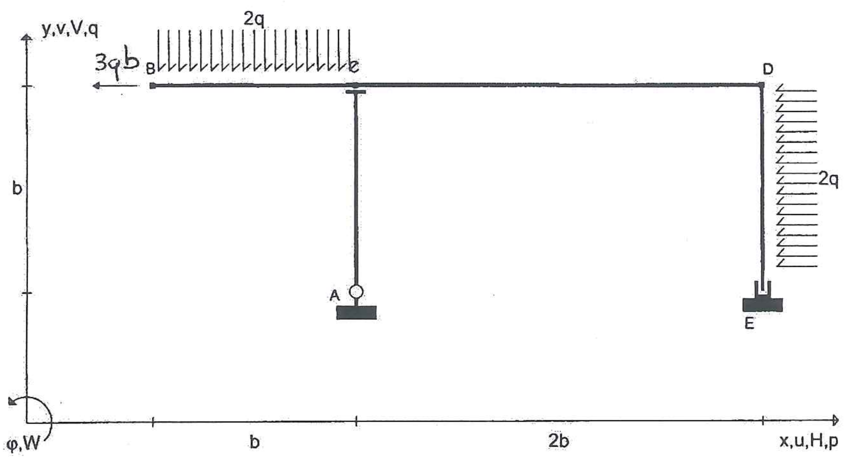
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ~~ABCD~~ AC), $C_1$, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta BCDE), $C_2$, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, $C_{12}$;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto $B$, $u_B$, e quella verticale dello spostamento del punto $C$, $v_C$;

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto $C$, $M_C$ **riferito all'asta AC**. In questa situazione si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti $B$ e $D$, $u_B$, $u_D$.

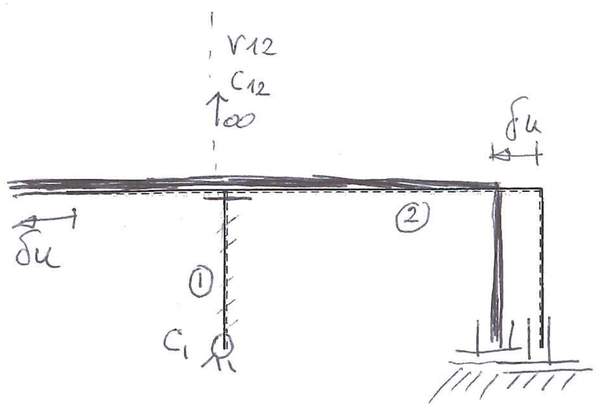
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: $(\infty, m)$, dove $m$ è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio

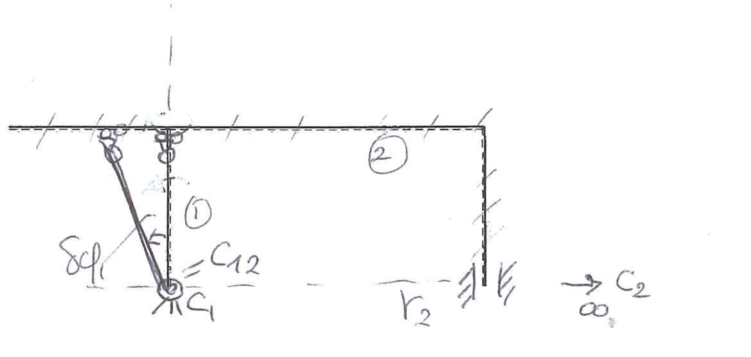
Universita' di Cagliari SdC_SdA 25.01.11*008




$$\left\{\begin{array}{l} C_2 \in r_\infty \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12} \end{array}\right\} \Rightarrow C_2 \equiv C_{12} \ (*)$$

$$\left\{\begin{array}{l} C_{12} \in r_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \leftrightarrow C_{12} \Rightarrow C_{12} \in r_2 \end{array}\right. \Rightarrow C_{12} \equiv C_1 \ (**)$$




(*) Ne segue che ① resta fisso e solo ② si sposta. $r_\infty$ $C_2$



(**) Ne segue che ② resta fisso e solo ① si sposta

$H_E$ (⇨) = ....+59b.....; $C_1$ = (....0..., ....0....); $C_2$ = (....∞...., ....∞....); $C_{12}$ = (....∞...., ....∞....);

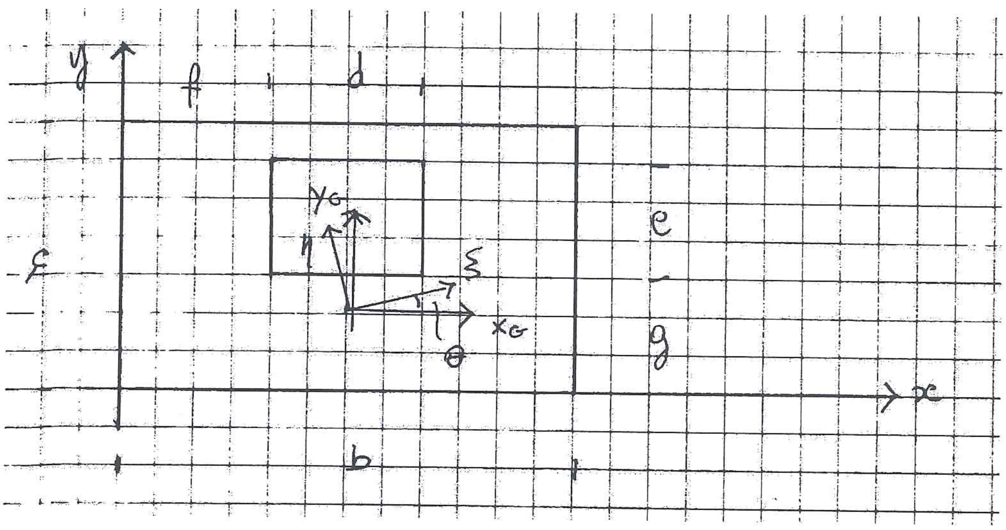
$u_B$ = ....−δu.........; $v_C$ = ..........0..........;

$M_C$ (⇦□⇨) = ......0..........; $u_B$ = ......0..........; $u_D$ = ......0..........;

**Esercizio n. 3** (5 punti)

Per la lamina piana omogenea forata indicata in Figura, nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 12a$; $c = 16a$; $d = 6a$; $e = 8a$; $f = 3a$; $g = 4a$, si richiede di:

- calcolare i momenti statici, $S_x$ e $S_y$ (rispetto agli assi $x$ e $y$ indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro $x_G$ e $y_G$ rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia $J_{xG}$ e $J_{yG}$ e il momento centrifugo $J_{xGyG}$ rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, $\xi$, $\eta$;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi $x_G$ e $\xi$.



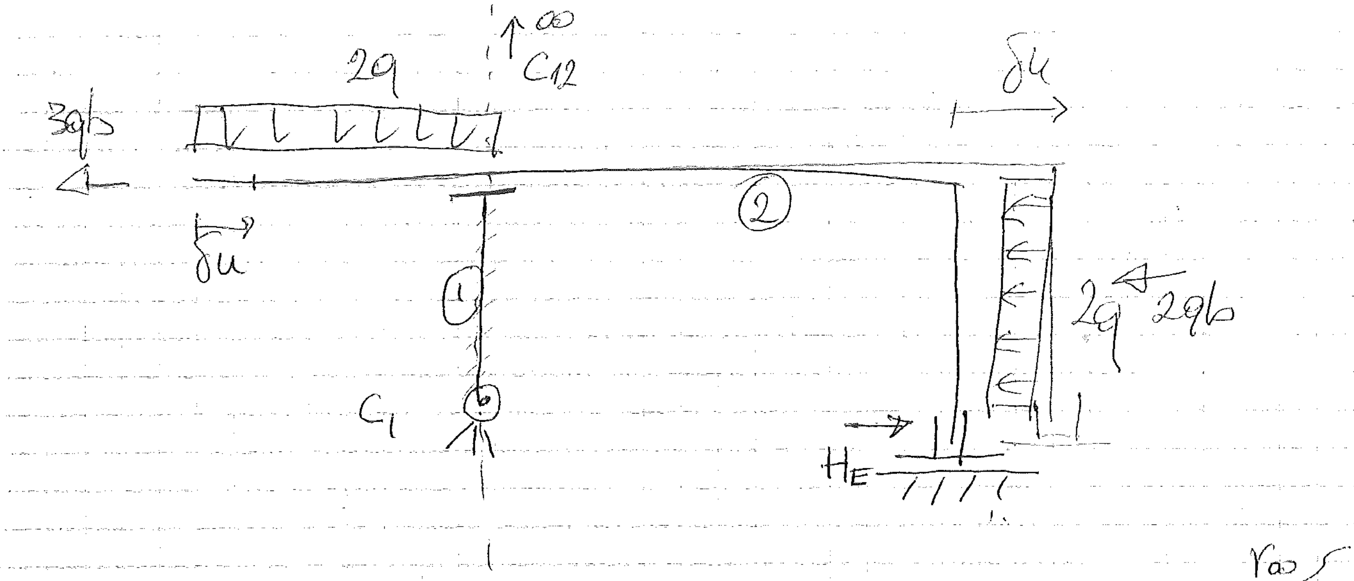

$S_x$ = ......1152 $a^3$......; $S_y$ = ......864 $a^3$......;

$x_G$ = ......6a......; $y_G$ = ......8a......;

$J_{xG}$ = ......3840 $a^4$......; $J_{yG}$ = ......2160 $a^4$......;

$J_{xGyG}$ = ......0......; tan 2θ = ......0...... (θ = 0°)......;

$J_\xi = J_{max}$ = ......3840 $a^4$......; $J_\eta = J_{min}$ = ......2160 $a^4$......;



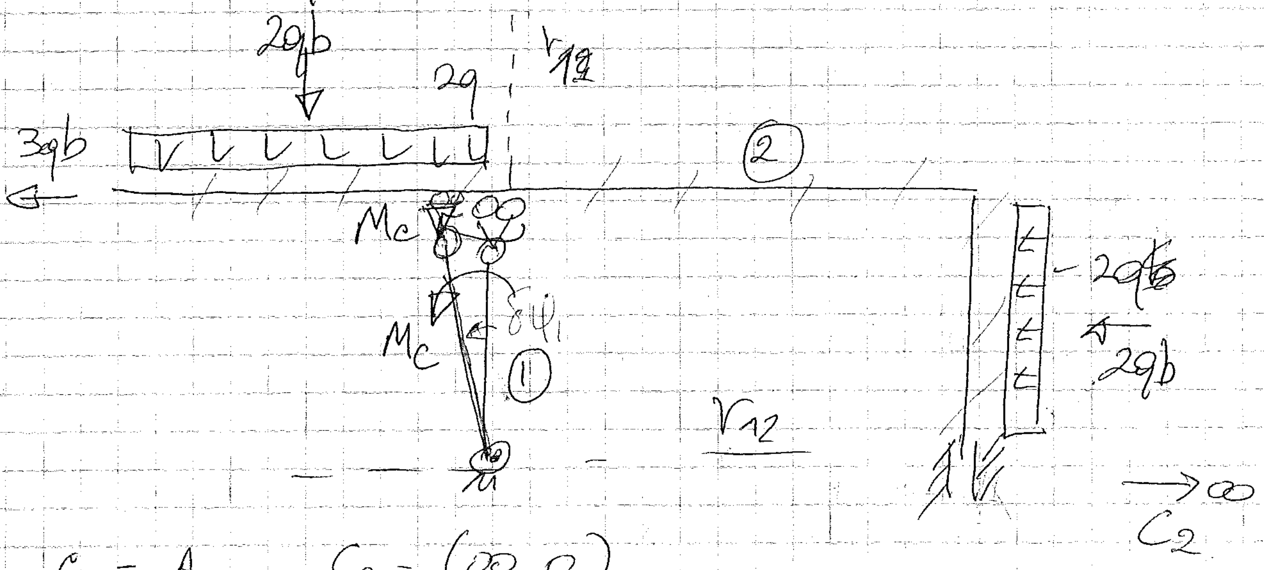

$$\left.\begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \\ C_2 \in r_\infty \end{matrix}\right\} \quad C_2 \equiv C_{12}$$

$C_2 \equiv C_{12} \Rightarrow$ (1) non si sposta.

$$\delta L = -3qb\,\delta u - 2qb\cdot\delta u + H_E\cdot\delta u = 0 \quad \forall\,\delta u$$

$$(-3qb - 2qb + H_E)\,\delta u = 0 \quad \forall\,\delta u$$

$$-5qb + H_E = 0 \qquad H_E = +5qb$$




$C_1 \equiv A \qquad C_2 = (\infty, 0)$

$C_{12} \in r_{12}$

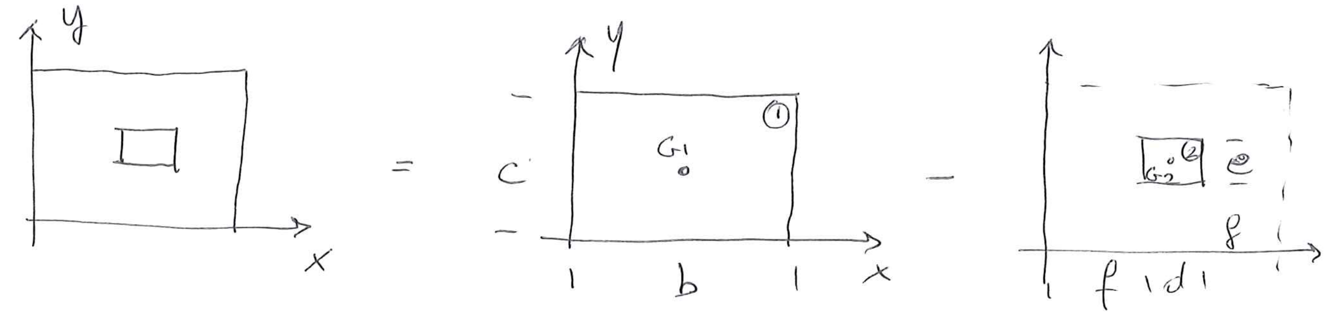
$$\left\{\begin{matrix} C_{12} \in r_{12} \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \leftrightarrow C_{12} \end{matrix}\right. \qquad C_{12} \in r_{12}$$

$$\delta L = M_C \cdot \delta\varphi_1 = 0 \quad \forall\,\delta\varphi_1$$

$$M_C = 0$$

$C_{12} \equiv C_1$ (2) non si sposta

③ Si considera la figura come differenza fra un rettangolo pieno e un rettangolo (corrispondente al foro).




Risulta pertanto:

$$A_1 = b \cdot c \qquad G_1 = \left(\frac{b}{2} ; \frac{c}{2}\right)$$

$$A_2 = -d \cdot e \qquad G_2 = \left(f + \frac{d}{2} ; g + \frac{e}{2}\right)$$

Pertanto:

$$S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} \qquad S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} \qquad S_x = S_{x1} + S_{x2}$$

$$S_{y1} = A_1 \cdot x_{G1} \qquad S_{y2} = A_2 \cdot x_{G2} \qquad S_y = S_{y1} + S_{y2}$$

$$A = A_1 + A_2 \qquad x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$J_{x1} = \frac{1}{3} b c^3 \qquad J_{x2} = -\frac{1}{12} d e^3 + A_2 y_{G2}^2 \qquad J_x = J_{x1} + J_{x2}$$

$$J_{y1} = \frac{1}{3} b^3 c \qquad J_{y2} = -\frac{1}{12} d^3 e + A_2 \cdot x_{G2}^2 \qquad J_y = J_{y1} + J_{y2}$$

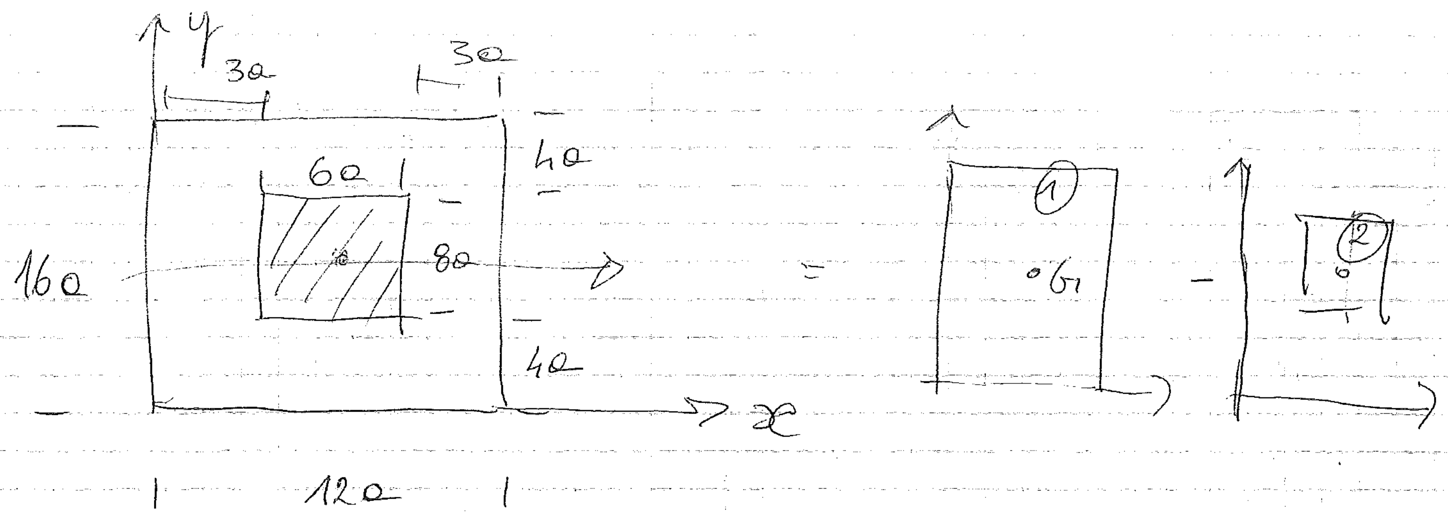
$$J_{xy1} = A_1 \cdot x_{G1} \cdot y_{G1} \qquad J_{xy2} = A_2 \, x_{G2} \, y_{G2} \qquad J_{xy} = J_{xy1} + J_{xy2}$$

$$J_{xG} = J_x - A y_G^2 \qquad J_{yG} = J_y - A x_G^2 \qquad J_{xGyG} = J_{xy} - A x_G y_G = 0$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 J_{xGyG}}{J_{xG} - J_{yG}} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \arctan\left(-\frac{2 J_{xGyG}}{J_{xG} - J_{yG}}\right) & \text{se } J_{xG} > J_{yG} \\ 2\theta = \arctan\left(-\frac{2 J_{xGyG}}{J_{xG} - J_{yG}}\right) + \pi & \text{se } J_{xG} < J_{yG} \end{cases}$$

$$J_\xi = J_{max} = \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{xG} - J_{yG}}{2}\right)^2 + J_{xGyG}^2}$$

$$J_\eta = J_{min} = \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{xG} - J_{yG}}{2}\right)^2 + J_{xGyG}^2}$$




$$A_1 = 12a \cdot 16a = 192a^2 \qquad A_2 = -48a^2$$

$$G_1 = (6a, 8a) \qquad G_2 = \left(3a + \frac{6}{2}a, \ 4a + \frac{8}{2}a\right)$$

$$G_2 = (6a, 8a)$$

$$S_{x_1} = y_{G1} \cdot A_1 = 192a^2 \cdot 8a = 1536a^3 \qquad S_{x2} = y_{G2} \cdot A_2 = -48a^2 \cdot 8a = -384a^3$$

$$S_{y2} = x_{G1} \cdot A_1 = 192a^2 \cdot 6a = 1152a^3 \qquad S_{y2} = x_{G2} \cdot A_2 = -48a^2 \cdot 6a = -288a^3$$

$$A = A_1 + A_2 = 192a^2 - 48a^2 = 144a^2$$

$$S_x = S_{x_1} + S_{x_2} = 1536a^3 - 384a^3 = 1152a^3$$

$$S_y = S_{y_1} + S_{y2} = 1152a^3 - 288a^3 = 864a^3$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{864a^3}{144a^2} = 6a$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1152a^3}{144a^2} = 8a$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{3}(12a)^3 16a = \frac{1}{3} \cdot 27648a^4 = 9216a^4$$

$$J_{y2} = -\frac{1}{12}(6a)^3 \cdot 8a - 48a^2 \cdot 6 \qquad = -\frac{1}{12} \cdot 1728a^4 - 1728a^4 = -1872a^4$$

$$J_{x_1} = \frac{1}{3}(12a)\cdot(16a)^3 = \frac{1}{3} \, 49152a^4 = 16384a^4$$

$$J_{x_2} = -\frac{1}{12}(6a)(8a)^3 + A_2 \cdot y_G^2 = -\frac{1}{12} 3072a^4 - 48 \cdot 64a^2 a^2 = -256a^4 - 3072a^4 = -3328a^4$$

$$J_{x_G} = J_{x1} + J_{x2} = 13056a^4 - 144a^2 \cdot 64a^2 = 13056a^4 - 9216a^4 = 3840a^4$$

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} = 9216a^4 - 1872a^4 = 7344a^4$$

$$J_{yG} = J_y - A \cdot 36a^2 = 2160a^4$$

**Esercizio n. 2** (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare $V_E$ applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

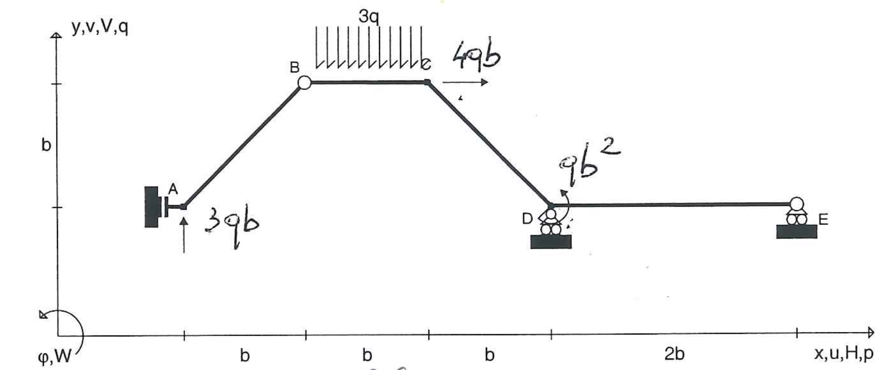
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta *AB*), $C_1$, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta *BCDE*), $C_2$, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, $C_{12}$;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti *B* e *D*, $u_B$ e $u_D$;

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto *C*, $M_C$. In questa situazione si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti *B* e *D*, $u_B$, $u_D$.

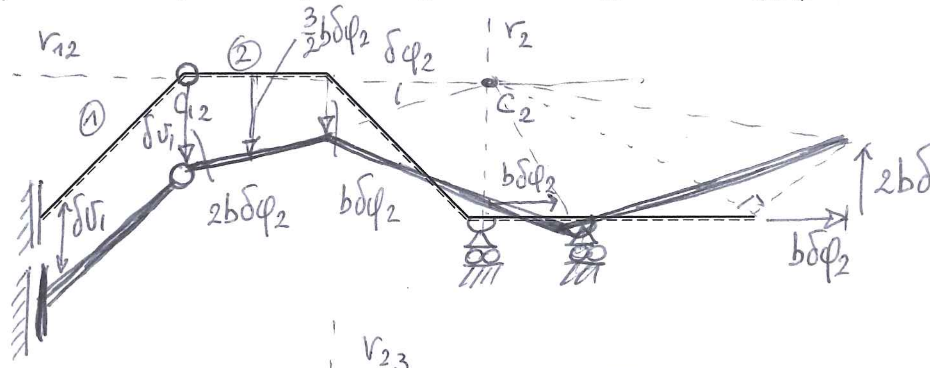
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: $(\infty, m)$, dove $m$ è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio

Universita' di Cagliari — SdC_AdC 13.07.10*003



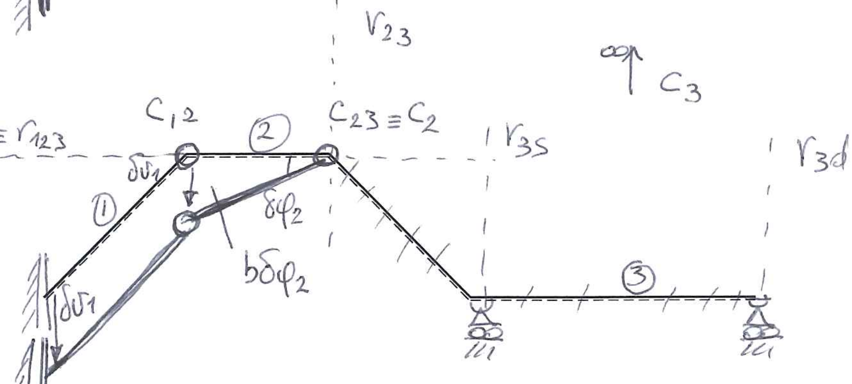

$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_2 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \in r_{12} \end{cases}$

$C_1$ $\infty \leftarrow$




$\delta v_1 = 2b\,\delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = \frac{\delta v_1}{2b}$

$r_\infty$




$\delta v_1 = b\,\delta\varphi_2$

$\Rightarrow \delta\varphi_2 = \frac{\delta v_1}{b}$ $\quad C_{13} \equiv C_1$ $\leftarrow \infty$

$C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12}$
$C_3 \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{23}$ } $C_2 \equiv C_{23}$
$C_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_3 \Rightarrow C_{13} \in r_\infty$
$C_{12} \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_{13} \Rightarrow C_{13} \in r_{123}$ } $C_{13} \equiv C_1$

} pertanto poiché $C_{23} \equiv C_2$ e $C_{13} \equiv C_1$ si conclude che la ③ non subisce spostamenti.

$V_E$ (⇧) = 1/4 qb; $C_1$ = (∞, 0); $C_2$ = (3b, b); $C_{12}$ = (b, b);

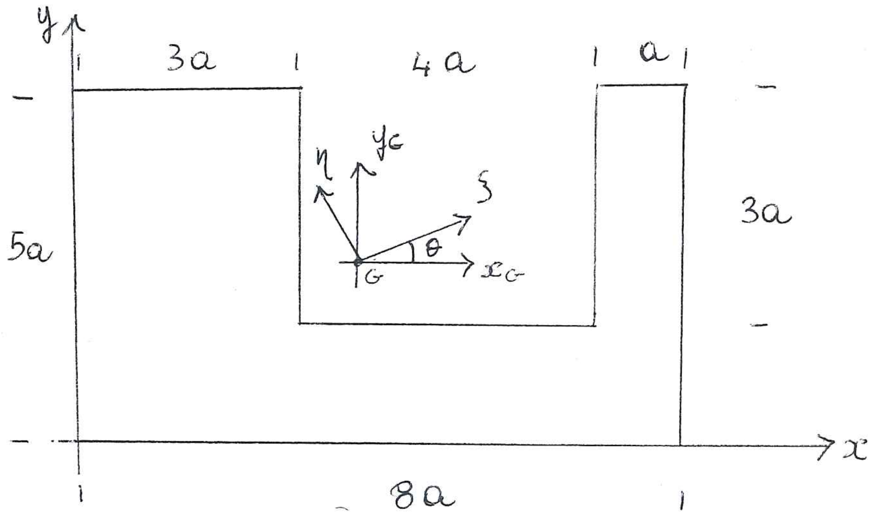
$u_B$ = 0; $u_D$ = $b\,\delta\varphi_2$;

$M_C$ = $+\frac{3}{2} qb^2$; $u_B$ = 0; $u_D$ = 0;

**Esercizio n. 3** (5 punti)

Per la lamina piana omogenea a forma di U asimmetrica indicata in Figura si richiede di:

- calcolare i momenti statici, $S_x$ e $S_y$ (rispetto agli assi $x$ e $y$ indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro $x_G$ e $y_G$ rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia $J_{xG}$ e $J_{yG}$ e il momento centrifugo $J_{xGyG}$ rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi$ e $J_\eta$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, $\xi$, $\eta$;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi $x_G$ e $\xi$.




$S_x$ = $58\ a^3$; $S_y$ = $100\ a^3$;

$x_G$ = $\frac{25}{7} a = 3{,}57143a$; $y_G$ = $\frac{29}{14} a = 2{,}07143a$;

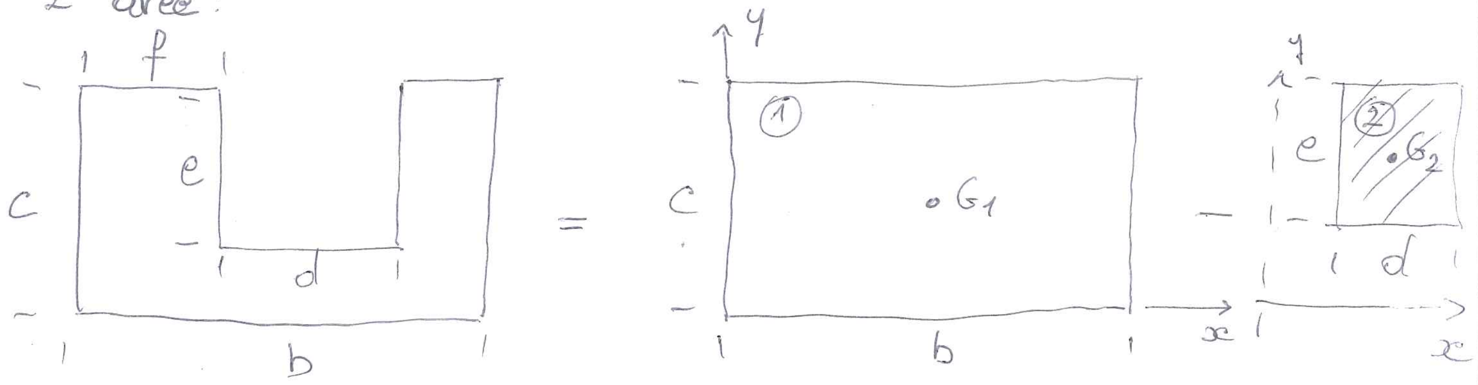
$J_{xG}$ = $\frac{1201}{21} a^4 = 57{,}1905a^4$; $J_{yG}$ = $\frac{3784}{21} a^4 = 180{,}1905a^4$;

$J_{xGyG}$ = $-\frac{120}{7} a^4 = -17{,}1429\,a^4$; tan 2θ = $-\frac{80}{287} = -0{,}27875$ $(\theta = 82^\circ{,}2122)$;

$J_\xi$ = $182{,}5350\,a^4$; $J_\eta$ = $54{,}8459\,a^4$;

Esercizio 3

Si può procedere considerando la lamina come differenza di 2 aree:




Ne segue:

$A_1 = b \cdot c$ $\quad G_1 = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ $\quad S_{x_1} = A_1 \cdot y_{G1}$ $\quad S_{y_1} = A_1 \cdot x_{G1}$

$A_2 = -d \cdot e$ $\quad G_2 = \left(f+\frac{d}{2}, c-\frac{e}{2}\right)$ $\quad S_{x_2} = A_2 \cdot y_{G2}$ $\quad S_{y_2} = A_2 \cdot x_{G2}$

$A = A_1 + A_2$ $\quad S_x = S_{x_1} + S_{x_2}$ $\quad S_y = S_{y_1} + S_{y_2}$

$$x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

$J_{x_1} = \frac{1}{3} b c^3$ $\quad J_{x_2} = -\frac{1}{12} d \cdot e^3 + A_2 \cdot y_{G_2}^2$ $\quad J_x = J_{x_1} + J_{x_2}$

$J_{y_1} = \frac{1}{3} b^3 c$ $\quad J_{y_2} = -\frac{1}{12} d^3 e + A_2 x_G^2$ $\quad J_y = J_{y_1} + J_{y_2}$

$J_{xy_1} = A_1 \cdot x_{G1} \cdot y_{G1}$ $\quad J_{xy_2} = A_2 \cdot x_{G2} \cdot y_{G2}$ $\quad J_{xy} = J_{xy_1} + J_{xy_2}$.

$J_{x_G} = J_x - A y_G^2$ $\quad J_{y_G} = J_y - A x_G^2$ $\quad J_{x_G y_G} = J_{xy} - A x_G y_G$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}}$$

$$2\theta = \arctan \frac{-2 J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} \quad \text{se } J_{x_G} > J_{y_G}$$

$$2\theta = \arctan \frac{-2 J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} + \pi \quad \text{se } J_{x_G} < J_{y_G}$$

$$J_\xi = \frac{J_{x_G} + J_{y_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_G} - J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2}$$

$$J_\eta = \frac{J_{x_G} + J_{y_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_G} - J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2}.$$