

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 17.04.2020

Parte II - Testo I

CdS Edilizia

CdS AdC

CdS SdA

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

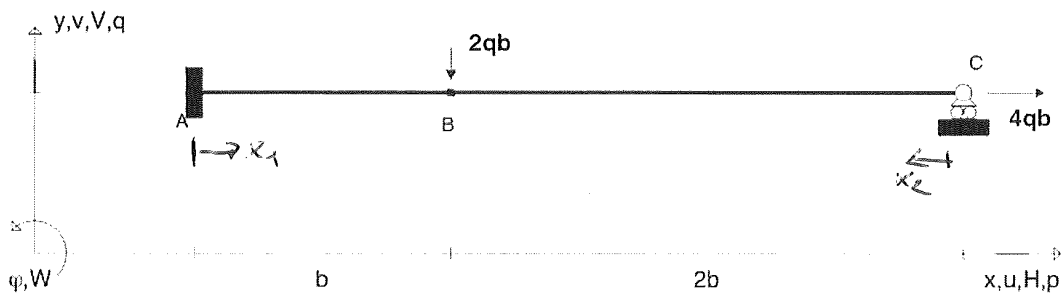
Esercizio n. 1 (19 punti)

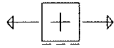
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, l'appoggio in C, V_C .

Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

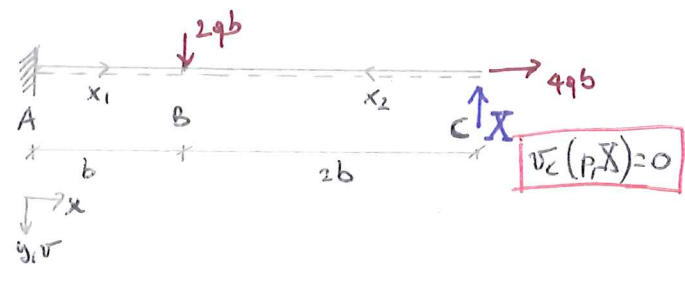
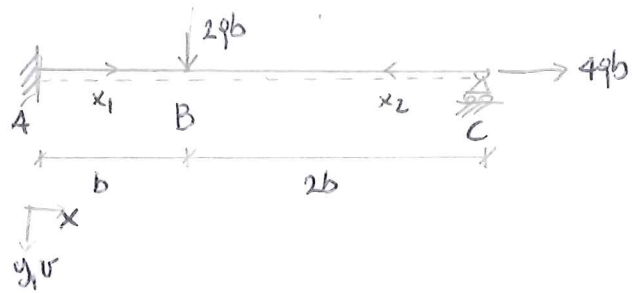
Universita' di Cagliari

SdC_SdA 17.04.20*001





$H_A(\hat{\varphi}) = \dots\dots\dots; V_A(\hat{v}) = \dots\dots\dots; M_A(\hat{\varphi}) = \dots\dots\dots; V_C(\hat{v}) = \dots\dots$
$N_{AB} = \dots\dots\dots; T_{AB} = \dots\dots\dots; M_{AB} = \dots\dots\dots;$
$N_{CB} = \dots\dots\dots; T_{CB} = \dots\dots\dots; M_{CB} = \dots\dots\dots;$



SP0

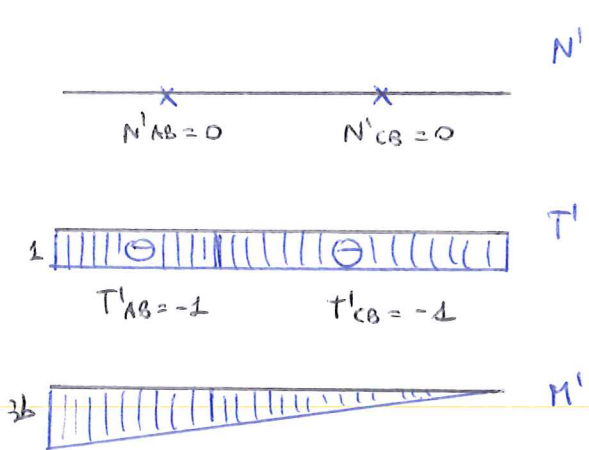
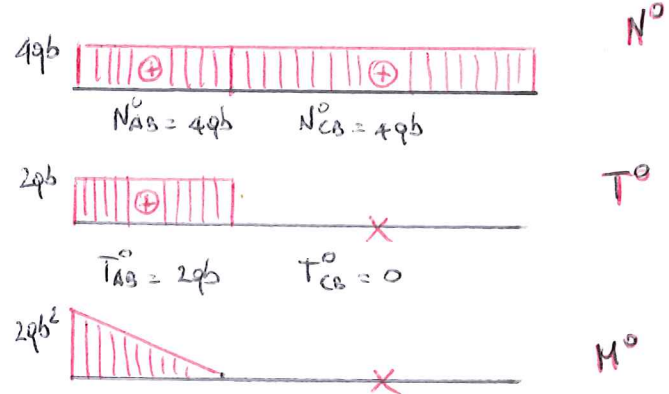
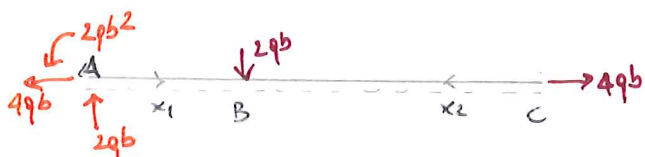


$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A^0 + 4qb = 0 & \underline{H_A^0 = -4qb} \\ \uparrow R_y = 0 & V_A^0 - 2qb = 0 & \underline{V_A^0 = 2qb} \\ \sum M_{z(A)} = 0 & M_A^0 - 2qb^2 = 0 & \underline{M_A^0 = 2qb^2} \end{cases}$$

SA1



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A^1 = 0 & \underline{H_A^1 = 0} \\ \uparrow R_y = 0 & V_A^1 + 1 = 0 & \underline{V_A^1 = -1} \\ \sum M_{z(A)} = 0 & M_A^1 + 1 \cdot 3b = 0 & \underline{M_A^1 = -3b} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \leftarrow \sum M^0 & \quad \leftarrow \sum M^0 \\ H_{AB}^0 = -2qb^2 + 2qb \cdot x_1 & \quad M_{CB}^0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \sum M^1 & \quad \leftarrow \sum M^1 \\ M_{AB}^1 = 3b - 1 \cdot x_1 & \quad M_{CB}^1 = 1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

$\delta L_e = \delta L_i$

$\delta L_e = 1 \cdot v_c = 1 \cdot 0 = 0$ $\delta L_e = 0 \rightarrow \delta L_i = 0$

$\delta L_i = \int_0^L N'(x) \delta \epsilon_x dx + \int_0^L T'(x) \delta \gamma_x dx + \int_0^L M'(x) \delta \chi_x dx = 0$

$\chi_x = \frac{M^0(x) + \chi M^1(x)}{EJ}$ $\delta L_i = \int_0^L N'(x) \frac{M^0(x) + \chi M^1(x)}{EJ} dx = \int_0^L \frac{N'(x) M^0(x)}{EJ} dx + \chi \int_0^L \frac{N'(x) M^1(x)}{EJ} dx = 0$

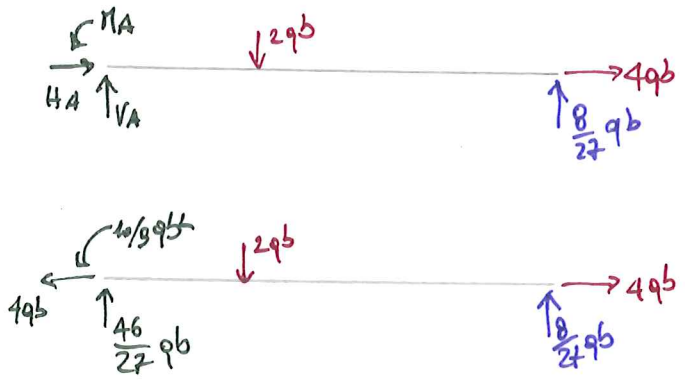
MEMB	L	M^0	M^1	$M^0 + M^1$	M^2
AB	b	$-2qb^2 + 2qbx$	$3b - x$	$-6qb^3 + 2qb^2x + 6qb^2x - 2qbx^2$	$9b^2 - 6bx + x^2$
BC	2b	//	x	//	x^2

$$\int \delta L_i = \int_0^b \frac{1}{EI} (-6qb^3 + 8qbx^2 - 2qbx^2) dx + X \int_0^b \frac{1}{EI} (9b^2 - 6bx + x^2) dx + X \int_0^b \frac{1}{EI} (x^2) dx = 0$$

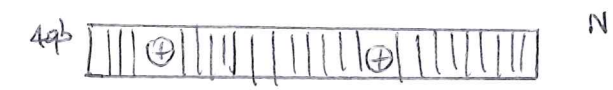
$$\int \delta L_i = \frac{1}{EI} \left[-6qb^3x + \frac{8qbx^3}{3} - \frac{2qbx^3}{3} \right]_0^b + \frac{1}{EI} \left[X \left[9b^2x - 6b \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^b + X \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b \right] = 0$$

$$\int \delta L_i = \frac{1}{EI} \left(-6qb^4 + 4qb^4 - \frac{2}{3}qb^4 \right) + \frac{1}{EI} \left[X \left(9b^3 - 3b^3 + \frac{b^3}{3} + \frac{8b^3}{3} \right) \right] = 0$$

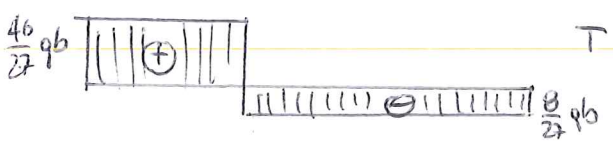
$$\int \delta L_i = -\frac{8qb^4}{3EI} + \frac{9b^3X}{EI} = 0 \quad X \frac{9b^3}{EI} = \frac{8qb^4}{3EI} \quad X = \frac{8qb^4}{3EI} \cdot \frac{EI}{9b^3} \quad \boxed{X = \frac{8qb}{27}}$$



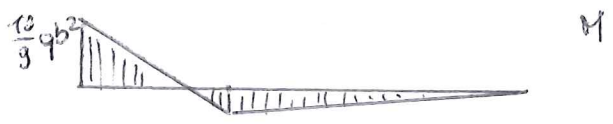
$$\begin{cases} H_A = H_A^0 + X H_A^1 & H_A = 4qb \\ V_A = V_A^0 + X V_A^1 = 2qb + \left(\frac{8}{27}qb\right)(-1) = \frac{46}{27}qb = V_A \\ H_A = H_A^0 + X H_A^1 = 2qb + \left(\frac{8}{27}qb\right)(-3b) = \frac{10}{3}qb^2 = H_A \end{cases}$$



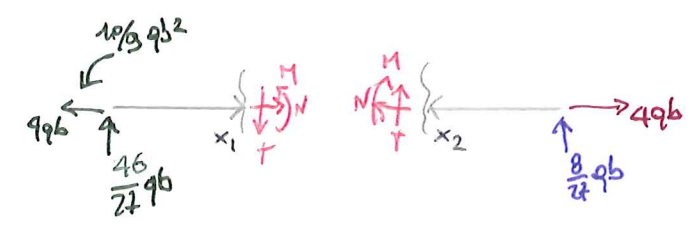
$$N = N^0 + X N^1 \quad N_{AB} = 4qb \quad N_{CB} = 4qb$$



$$T = T^0 + X T^1 \quad T_{AB} = 2qb + \frac{8}{27}qb(-1) = \frac{46}{27}qb \quad T_{CB} = 0 + \frac{8}{27}qb(-1) = -\frac{8}{27}qb$$



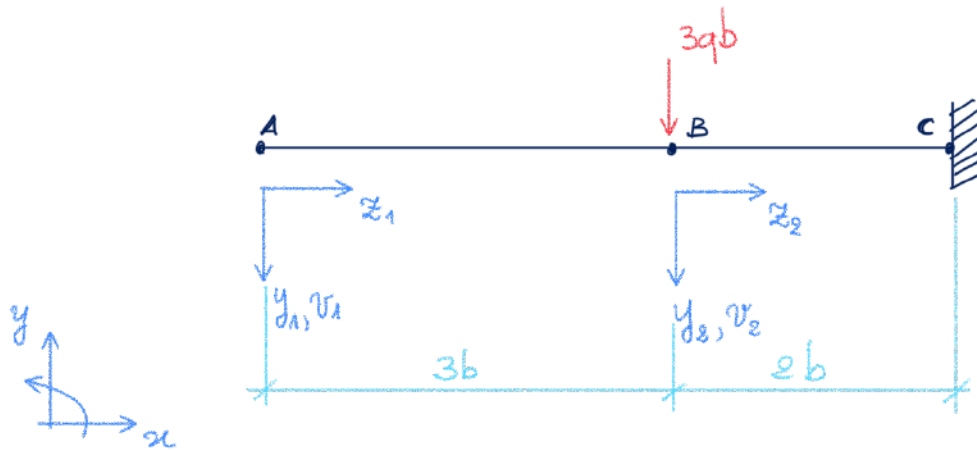
$$M = M^0 + X M^1 \quad M_{AB} = -2qb^2 + 2qbx_1 + \frac{8}{27}qb(3b - x_1) = -2qb^2 + 2qbx_1 + \frac{8}{3}qb^2 - \frac{8}{27}qb x_1 = \frac{10}{3}qb^2 - \frac{46}{27}qb x_1$$



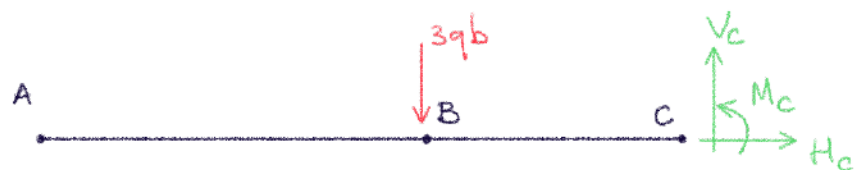
$$M_{CB} = 0 + \frac{8}{27}qb(x_2) = \frac{8}{27}qb x_2$$

ESERCIZIO 2 (13/03/2016)

Consideriamo la seguente struttura ipostatica



Per determinare le reazioni vincolari, consideriamo il diagramma di corpo libero



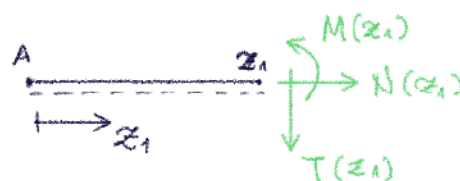
Scriviamo le equazioni cardinali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow R_x = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \\ \curvearrowright M_z = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} H_c = 0 \\ -3qb + V_c = 0 \\ 3qb \cdot 2b + M_c = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} H_c = 0 \\ V_c = 3qb \\ M_c = -6qb^2 \end{array} \right.$$

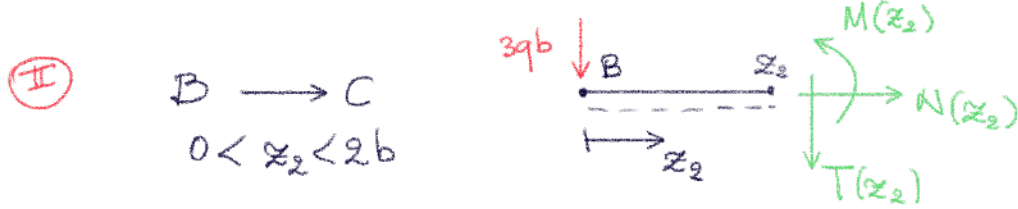
CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

Per determinare le azioni interne, consideriamo i due tratti AB e BC.

Ⓘ $A \rightarrow B$
 $0 < z_1 < 3b$



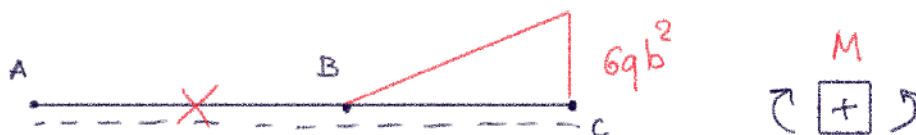
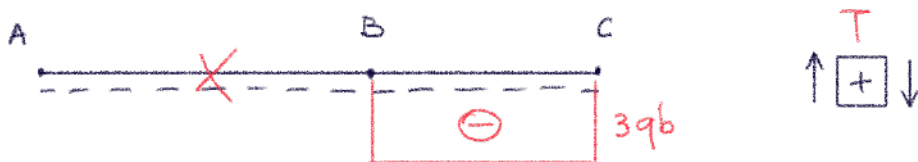
$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow R_{//} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \curvearrowright M_x = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} N(z_1) = 0 \\ -T(z_1) = 0 \\ M(z_1) = 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow R_{//} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \curvearrowright M_x = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} N(z_2) = 0 \\ -3qb - T(z_2) = 0 \\ 3qb \cdot z_2 + M(z_2) = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} N(z_2) = 0 \\ T(z_2) = -3qb \\ M(z_2) = -3qb z_2 \end{array} \right.$$

dove $\begin{cases} M(z_2=0) = 0 \\ M(z_2=2b) = -6qb^2 \end{cases}$

Quindi possiamo tracciare i diagrammi delle azioni interne (N è sempre nulla e quindi non la riportiamo)



CONDIZIONI AL CONFINAMENTO

Nel punto A si ha un estremo libero e, quindi, spostamenti e rotazioni sono liberi. Nel punto B

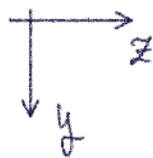
abbiamo condizioni di continuità tra v_1 e v_2 ,
mentre in C abbiamo le condizioni al contorno
di un incastrato.

$$\textcircled{B} \quad \begin{cases} v_1(z_1=3b) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0) \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \quad \begin{cases} v_2(z_2=2b) = 0 \\ v_2'(z_2=2b) = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

Perché i sistemi di riferimento locali che stiamo
utilizzando sono orientati come abbiamo visto,
allora il segno all'interno dell'equazione differenziale
del secondo ordine è univocamente determinato



$$v''(z) = - \frac{M_x(z)}{E J_x}$$

Integriamo questa equazione sui due tratti della
struttura

$$\textcircled{AB} \quad v_1''(z_1) = 0 \Rightarrow v_1'(z_1) = a_1$$

$$v_1(z_1) = a_1 z_1 + a_2$$

$$\textcircled{BC} \quad v_2''(z_2) = - \frac{M_x(z_2)}{E J_x} = \frac{3q_0 z_2}{E J_x}$$

$$v_2'(x_2) = \frac{3qb x_2^2}{2EJ_x} + C_1$$

$$v_2(x_2) = \frac{qb x_2^3}{2EJ_x} + C_1 x_2 + C_2$$

Imponiamo le condizioni al contorno

Ⓒ • $v_2(x_2=2b) = 0$

$$\frac{4qb^4}{EJ_x} + 2bC_1 + C_2 = 0$$

• $v_2'(x_2=2b) = 0$

$$\frac{6qb^3}{EJ_x} + C_1 = 0$$

Quindi

$$\begin{cases} 2bC_1 + C_2 = -\frac{4qb^4}{EJ_x} \\ C_1 = -\frac{6qb^3}{EJ_x} \end{cases}$$

$$-2b \cdot \frac{6qb^3}{EJ_x} + C_2 = -\frac{4qb^4}{EJ_x}$$

$$C_2 = \frac{12qb^4}{EJ_x} - \frac{4qb^4}{EJ_x} = \frac{8qb^4}{EJ_x}$$

Ⓑ

$$v_1(x_1=3b) = v_2(x_2=0)$$

$$3b a_1 + a_2 = C_2$$

$$v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0)$$

$$a_1 = c_1$$

$$3b c_1 + a_2 = c_2 \Rightarrow a_2 = c_2 - 3b c_1$$

Quindi

$$a_1 = -\frac{6qb^3}{EJ_x}$$

$$a_2 = \frac{8qb^4}{EJ_x} + 3b \cdot \frac{6qb^3}{EJ_x} = \frac{26qb^4}{EJ_x}$$

In definitiva, possiamo scrivere le defonate delle linee d'asse e le sue derivata prime come

$$v_1(z_1) = \frac{26qb^4}{EJ_x} - \frac{6qb^3}{EJ_x} z_1$$

$$v_2(z_2) = \frac{8qb^4}{EJ_x} - \frac{6qb^3}{EJ_x} z_2 + \frac{1}{2} \frac{qb}{EJ_x} z_2^3$$

$$v_1'(z_1) = -\frac{6qb^3}{EJ_x}$$

$$v_2'(z_2) = -\frac{6qb^3}{EJ_x} + \frac{3}{2} \frac{qb}{EJ_x} z_2^2$$

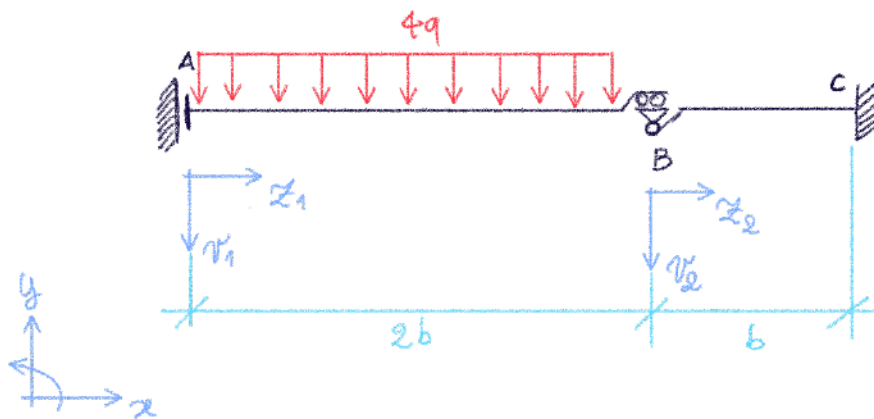
Vogliamo, infine, determinare il valore dello spostamento verticale in A e delle rotazioni in B.

$$v_A = v_1(z_1=0) = \frac{26qb^4}{EIx}$$

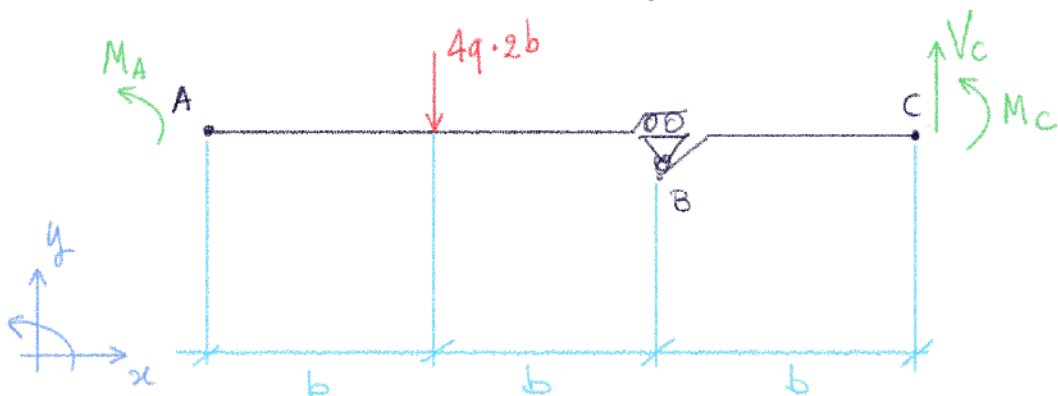
$$v_B = v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0) = -6 \frac{qb^3}{EIx}$$

ESERCIZIO 2 (25/01/2011)

Consideriamo la seguente struttura ipostatica



Per determinare le reazioni vincolari, considero il diagramma di corpo libero. Poiché non vi è alcuna sollecitazione assiale, ci limiteremo a studiare le componenti trasversali e i momenti



$$\begin{cases} \uparrow R_y = 0 \\ \curvearrowright M_z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} -8qb + V_c = 0 \\ M_A + 8qb \cdot 2b + M_c = 0 \end{cases}$$

Inoltre, consideriamo una equazione ausiliarie fornite del vincolo interno

$$\curvearrowright M_z^{AB} = 0 \Rightarrow M_A + 8qb \cdot b = 0$$

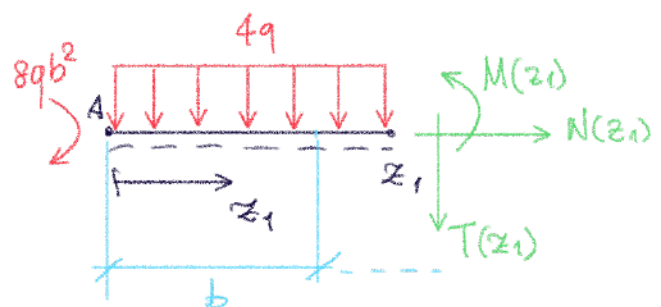
$$M_A = -8qb^2$$

Quindi:

$$\begin{cases} V_c = 8qb \\ M_A = -8qb^2 \\ M_c = -16qb^2 - M_A = -8qb^2 \end{cases}$$

AZIONI INTERNE

$$\textcircled{I} \quad A \longrightarrow B \\ 0 < z_1 < 2b$$

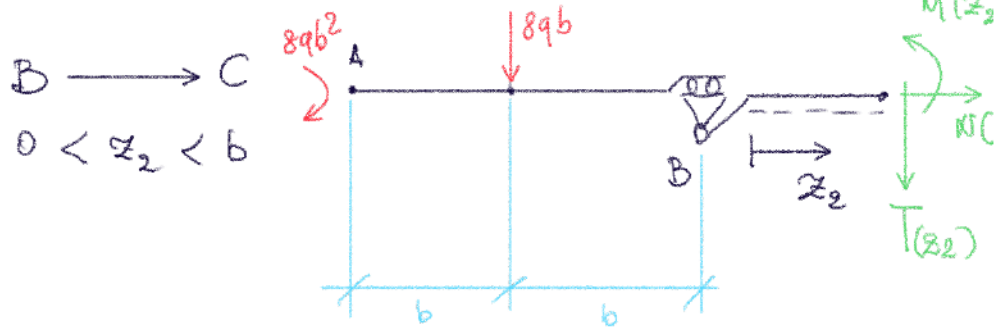


$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \curvearrowright M_x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ -4q z_1 - T(z_1) = 0 \\ -8qb^2 + 4q z_1 \cdot \frac{z_1}{2} + M(z_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = -4qbz_1 \\ M(z_1) = 8qb^2 - 2qbz_1^2 \end{cases}$$

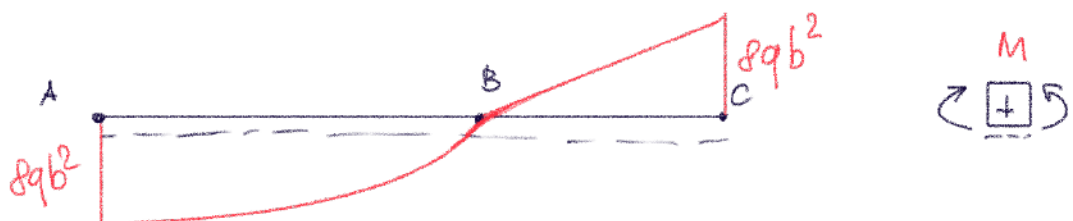
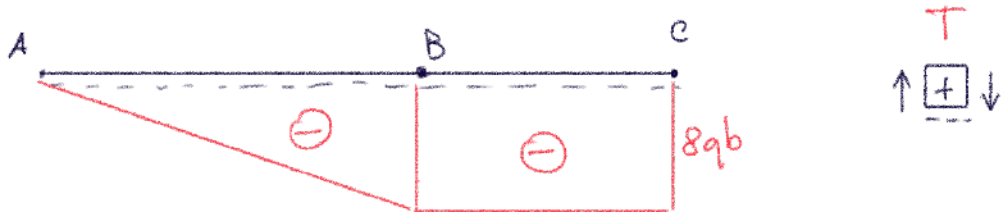
$$\begin{cases} T(z_1=0) = 0 \\ T(z_1=2b) = -8qb \\ M(z_1=0) = 8qb^2 \\ M(z_1=2b) = 0 \end{cases}$$

II



$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \curvearrowright M_x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} N(z_2) = 0 \\ -8qb - T(z_2) = 0 \\ -8qb^2 + 8qb \cdot (b + z_2) + M(z_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(z_2) = 0 \\ T(z_2) = -8qb \\ M(z_2) = 8qb^2 - 8qb^2 - 8qbz_2 = -8qbz_2 \end{cases} \begin{cases} M(z_2=0) = 0 \\ M(z_2=b) = -8qb^2 \end{cases}$$



CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\textcircled{A} \quad v_1'(z_1=0) = 0$$

$$\textcircled{B} \quad v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0)$$

$$\textcircled{C} \quad \begin{cases} v_2(z_2=b) = 0 \\ v_2'(z_2=b) = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

AB

$$v_1''(z_1) = -\frac{M_x(z_1)}{EJ_x} = -\frac{8qb^2}{EJ_x} + \frac{2qz_1^2}{EJ_x}$$

$$v_1'(z_1) = -\frac{8qb^2}{EJ_x} z_1 + \frac{2q}{3EJ_x} z_1^3 + a_1$$

$$v_1(z_1) = \frac{q}{6EJ_x} z_1^4 - \frac{4qb^2}{EJ_x} z_1^2 + a_1 z_1 + a_2$$

BC

$$v_2''(z_2) = -\frac{M_x(z_2)}{EJ_x} = \frac{8qbz_2}{EJ_x}$$

$$v_2'(z_2) = \frac{4qb}{EJ_x} z_2^2 + c_1$$

$$v_2(z_2) = \frac{4qb}{3EJ_x} z_2^3 + c_1 z_2 + c_2$$

Applichiamo le condizioni al contorno per determinare il valore delle costanti di integrazione a_1, a_2, c_1, c_2 .

$$\textcircled{1} v_1'(z_1=0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\textcircled{2} v_2'(z_2=b) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{4qb^3}{EJ_x}$$

$$\textcircled{3} v_2(z_2=b) = 0 \Rightarrow \frac{4qb^4}{3EJ_x} + c_1 b + c_2 = 0$$

$$v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0)$$

$$\textcircled{4} \frac{8qb^4}{3EJ_x} - \frac{16qb^4}{EJ_x} + a_2 = c_2$$

$$2 \rightarrow 1 \quad c_2 = -\frac{4qb^4}{3EJ_x} + \frac{4qb^4}{EJ_x} = \frac{8qb^4}{3EJ_x}$$

$$a_2 = c_2 + \frac{16qb^4}{EJ_x} - \frac{8qb^4}{3EJ_x}$$

$$= \frac{8qb^4}{3EJ_x} + \frac{16qb^4}{EJ_x} - \frac{8qb^4}{3EJ_x} = \frac{16qb^4}{EJ_x}$$

Quindi

$$v_1(z_1) = \frac{16qb^4}{EJ_x} - 4 \frac{qb^2 z_1^2}{EJ_x} + \frac{1}{6} \frac{q z_1^4}{EJ_x}$$

$$v_2(z_2) = \frac{8}{3} \frac{qb^4}{EJ_x} - 4 \frac{qb^3 z_2}{EJ_x} + \frac{4}{3} \frac{qb z_2^3}{EJ_x}$$

$$v_1'(z_1) = -8 \frac{qb^2 z_1}{EJ_x} + \frac{2}{3} \frac{q z_1^3}{EJ_x}$$

$$v_2'(z_2) = -4 \frac{qb^3}{E\partial_x} + 4 \frac{qbz_2^2}{E\partial_x}$$

Infine, possiamo calcolare gli spostamenti verticali del punto A e del punto B.

$$v_A = v_1(z_1=0) = 16 \frac{qb^4}{E\partial_x}$$

$$v_B = v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0) = \frac{8}{3} \frac{qb^4}{E\partial_x}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 25.03.2021

Parte II - Testo 1

CdS Edilizia

CdS AdC

CdS SdA

Nota: Per chi dispone di una propria stampante, i risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; per chi non dispone di stampante occorrerà predisporre un primo foglio nel quale riportare i dati riportati nei riquadri insieme ai risultati; il primo foglio dovrà contenere anche le seguenti informazioni: la prova (I prova intermedia o II prova intermedia), la data dell'appello, il nome e cognome, la matricola, la mail, il corso di studi; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati a seguire. Al termine della prova ed entro il limite di tempo indicato dalla commissione si dovrà caricare il compito svolto sulla piattaforma TEAMS in forma di unico file PDF le immagini fotografiche del primo foglio e a seguire dello svolgimento. Il file va nominato: cognome_matricola_data dell'appello.

Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

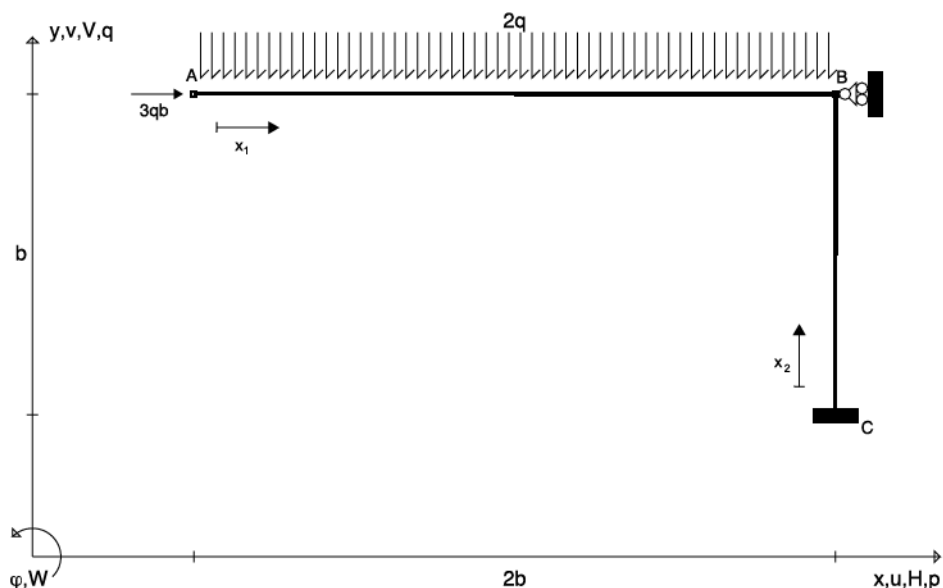
Esercizio n. 1 (17 punti)

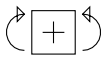
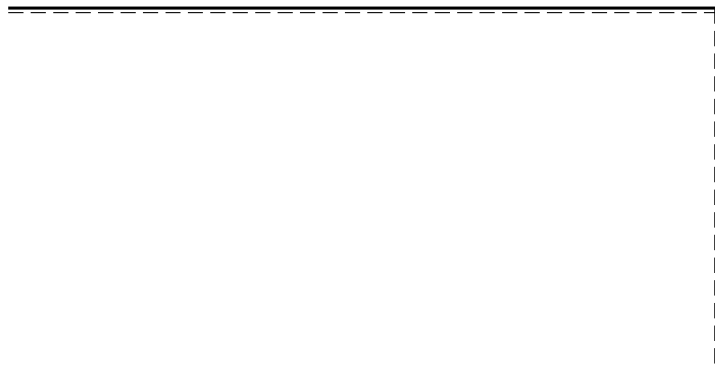
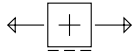
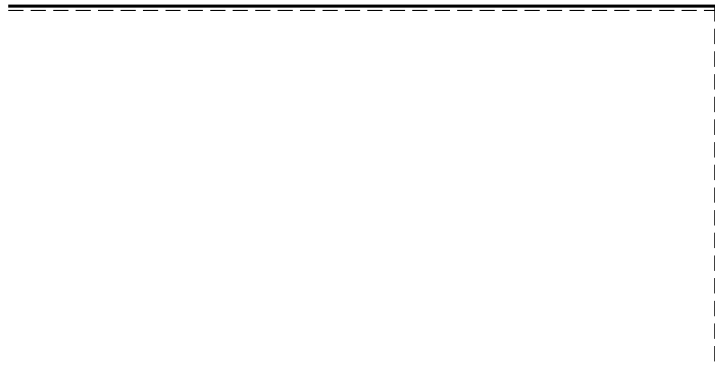
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo come incognita iperstatica il momento di incastro in C M_C . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciare nello spazio predisposto i corrispondenti grafici.

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

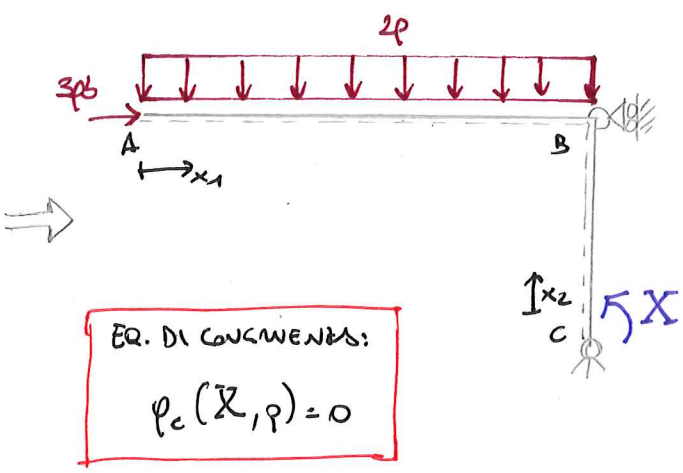
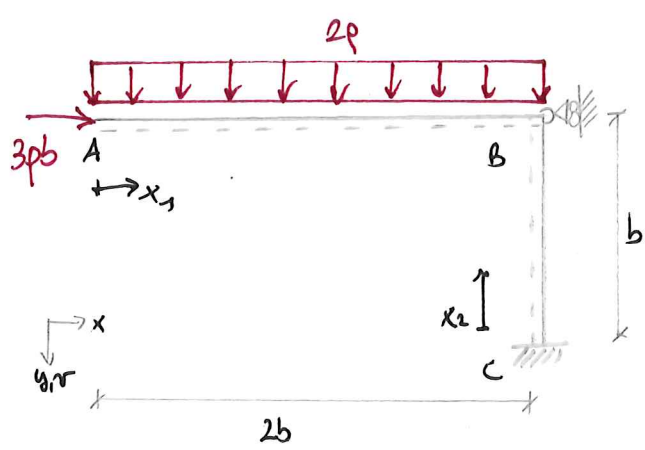
Universita' di Cagliari

SdC_SdA 25.03.21*001

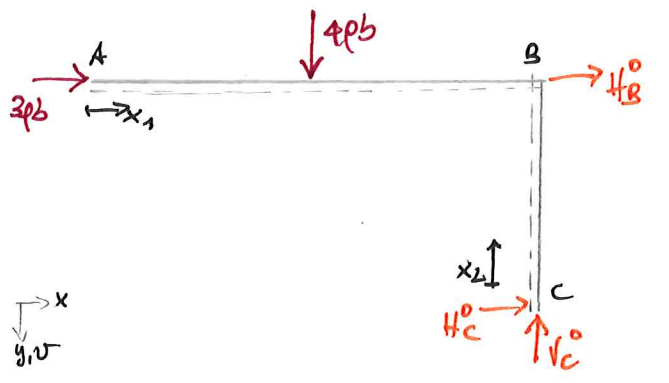




$H_B (\Rightarrow) = \dots\dots\dots; H_C (\Rightarrow) = \dots\dots\dots; V_C (\uparrow) = \dots\dots\dots; M_C (\curvearrowright) = \dots\dots\dots;$
 $N_{AB} = \dots\dots\dots; T_{AB} = \dots\dots\dots; M_{AB} = \dots\dots\dots;$
 $N_{CB} = \dots\dots\dots; T_{CB} = \dots\dots\dots; M_{CB} = \dots\dots\dots;$

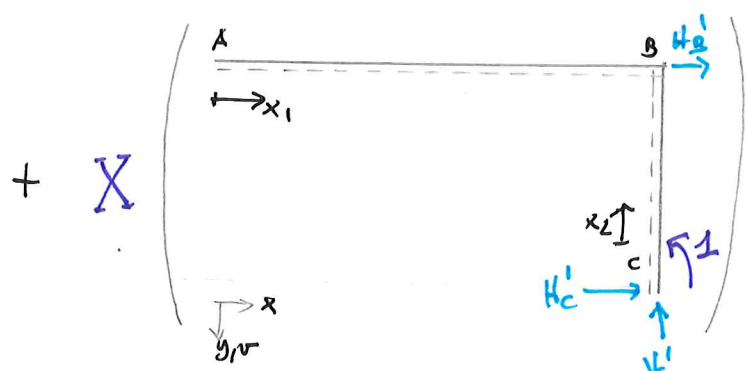


SISTEMA PRINCIPALE SP0

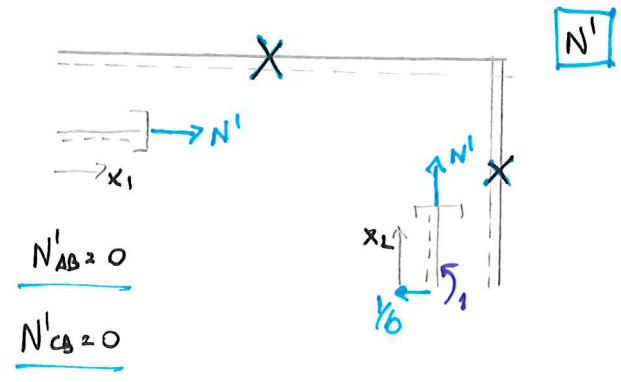
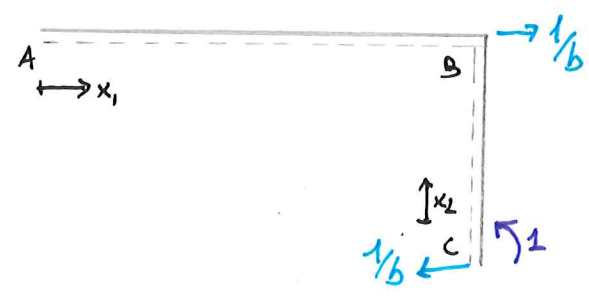
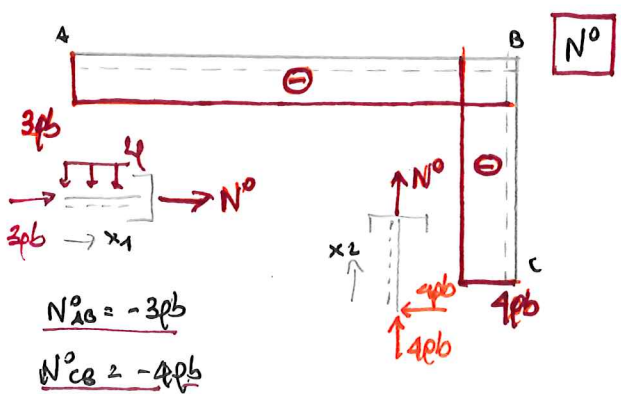
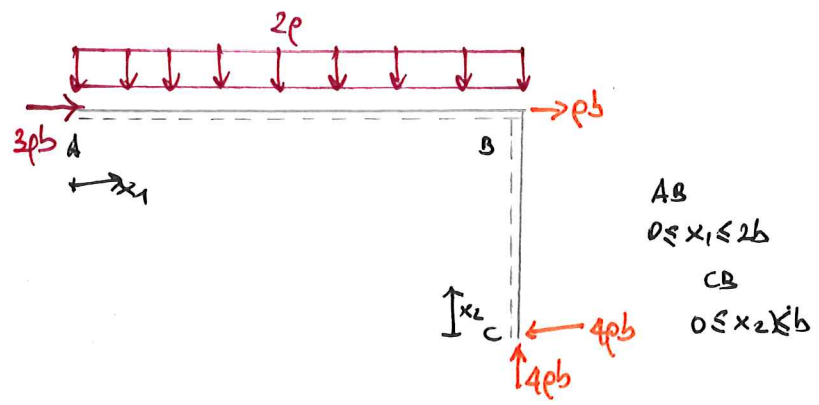


$\rightarrow R_x = 0 \quad H_B^0 + H_C^0 + 3pb = 0 \quad (3) \Rightarrow H_B^0 = 9b$
 $\uparrow R_y = 0 \quad V_C^0 - 4pb = 0 \quad (1) \Rightarrow V_C^0 = 4pb$
 $\curvearrowright M_{(B)} = 0 \quad H_C^0 b + 4pb^2 = 0 \quad (2) \Rightarrow H_C^0 = -4pb$

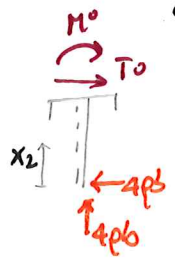
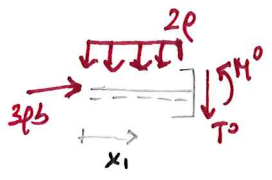
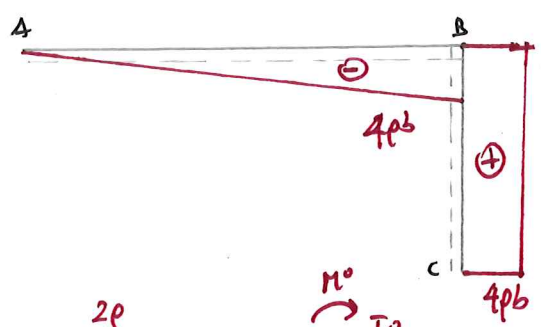
SISTEMA AUXILIARE 1 SA1



$\rightarrow R_x = 0 \quad H_B^1 + H_C^1 = 0 \quad (3) \Rightarrow H_C^1 = -\frac{1}{b}$
 $\uparrow R_y = 0 \quad V_C^1 = 0 \quad (1) \Rightarrow V_C^1 = 0$
 $\curvearrowright M_{(C)} = 0 \quad 1 - H_B^1 b = 0 \quad (2) \Rightarrow H_B^1 = \frac{1}{b}$



T^0



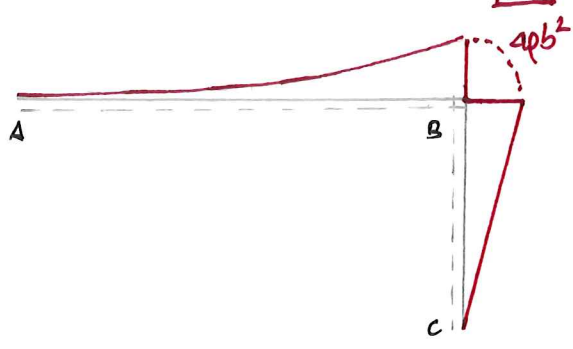
$T_{AB}^0 = -2px_1$

$T_{CB}^0 = 4qb$

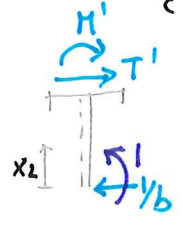
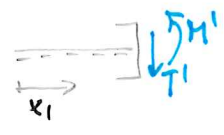
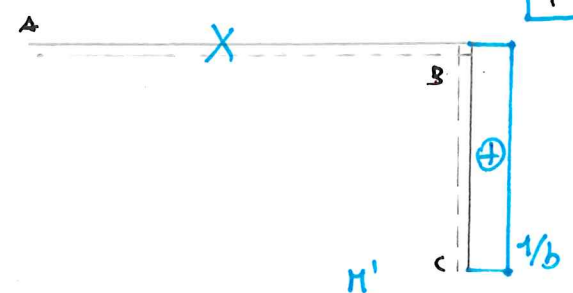
$M_{AB}^0 = -qx_1^2$

$M_{CB}^0 = -4qb x_2$

M^0



T^1



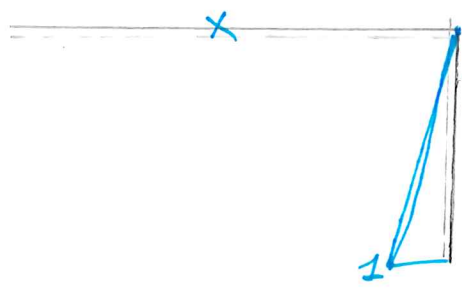
$T_{AB}^1 = 0$

$T_{CB}^1 = 1/b$

$M_{AB}^1 = 0$

$M_{CB}^1 = +1 - 1/b x_2$

M^1



$\delta L_e = \delta L_i$

$\delta L_e = 1 \cdot \varphi_c \Rightarrow \varphi_c = 0 \Rightarrow \delta L_e = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \delta L_e = \delta L_i \Rightarrow \delta L_i = 0$

$\delta L_i = \int_{l_i} N'(x) \chi_x dx + \int_{l_i} T'(x) \chi_x dx + \int_{l_i} M'(x) \chi_x dx = 0$

$\chi_x = \frac{M^0(x) + X M^1(x)}{E \Delta}$

$\delta L_i = \int_{l_i} M^1(x) \frac{M^0(x) + X M^1(x)}{E \Delta} dx = \int_{l_i} \frac{M^0(x) M^1(x)}{E \Delta} dx + X \int_{l_i} \frac{M^1(x)^2}{E \Delta} dx = 0$

$C_{20} + X C_{11} = 0 \Rightarrow X = -\frac{C_{20}}{C_{11}}$

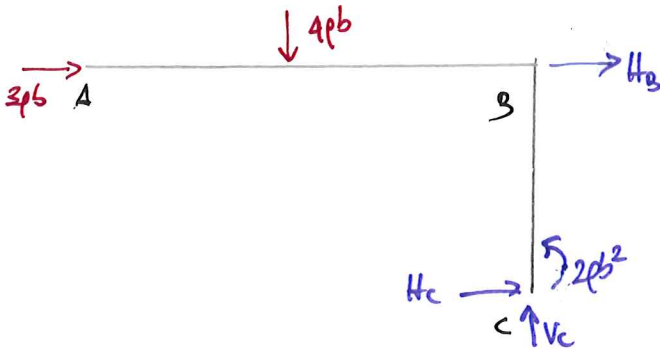
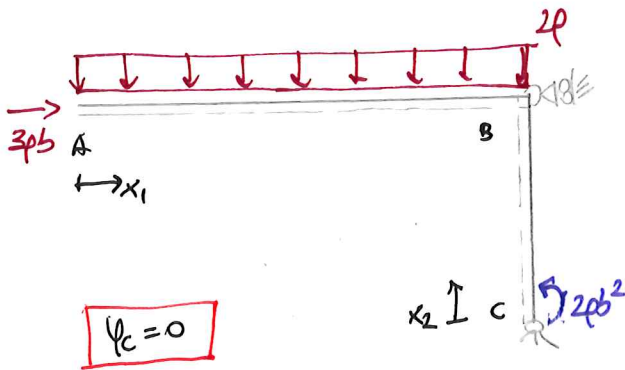
T_{AB}^0	L	M^0	M^1	$M^0 M^1$	M^1^2
AB	2b	$-px_1^2$	0	0	0
CB	b	$-4qb x_2$	$+1 - 1/b x_2$	$-4pb x_2 + 4qx_2^2$	$1 - 2/b x_2 + 1/b^2 x_2^2$

$$C_{10} = \int_0^b \frac{M^0(x) M^1(x)}{EI} dx = \int_0^b \frac{-4pbx_2 + 4px_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^b (-4pbx_2 + 4px_2^2) dx = \frac{1}{EI} \left[-4pb \frac{x_2^2}{2} + 4p \frac{x_2^3}{3} \right]_0^b = \frac{1}{EI} \left[-2pb^3 + \frac{4}{3}pb^3 \right] = \frac{-2pb^3 + \frac{4}{3}pb^3}{EI} = \frac{-\frac{2}{3}pb^3}{EI}$$

$$C_{11} = \int_0^b \frac{M^1(x)^2}{EI} dx = \int_0^b \frac{1 - 2/b x_2 + 1/b^2 x_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^b \left(1 - \frac{2}{b}x_2 + \frac{1}{b^2}x_2^2 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[x_2 - \frac{2}{b} \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{b^2} \frac{x_2^3}{3} \right]_0^b = \frac{1}{EI} \left[b - b + \frac{b}{3} \right] = \frac{b}{3EI}$$

$$X = -\frac{C_{10}}{C_{11}} = -\left(\frac{-\frac{2}{3}pb^3}{EI} \right) \left(\frac{3EI}{b} \right) = +2pb^2$$

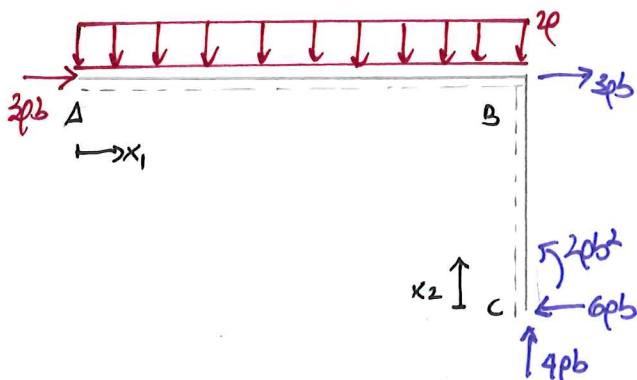
$$X = +2pb^2$$



$$H_b = H_b^0 + X H_b^1 \Rightarrow qb + (2pb^2) \frac{1}{b} = 3pb$$

$$H_c = H_c^0 + X H_c^1 \Rightarrow -4pb + (2pb^2) \left(-\frac{1}{b}\right) = -6pb$$

$$V_c = V_c^0 + X V_c^1 \Rightarrow 4pb + (2pb^2) (0) = 4pb$$



$$N_{AB} = N_{AB}^0 + X N_{AB}^1 \Rightarrow -3pb + (2pb^2) 0 = -3pb$$

$$N_{CB} = N_{CB}^0 + X N_{CB}^1 \Rightarrow -4pb + (2pb^2) 0 = -4pb$$

$$T_{AB} = T_{AB}^0 + X T_{AB}^1 \Rightarrow -2px_1 + (2pb^2) 0 = -2px_1$$

$$T_{CB} = T_{CB}^0 + X T_{CB}^1 \Rightarrow 4pb + (2pb^2) \left(\frac{1}{b}\right) = 6pb$$

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + X M_{AB}^1 \Rightarrow -px_1^2 + (2pb^2) 0 = -px_1^2$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + X M_{CB}^1 \Rightarrow -4pbx_2 + (2pb^2) \left(1 - \frac{1}{b}x_2\right) = 2pb^2 - 6pbx_2$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 25.03.2021

Parte II - Testo I

CdS Edilizia

CdS AdC

CdS SdA

Nota: Per chi dispone di una propria stampante, i risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; per chi non dispone di stampante occorrerà predisporre un primo foglio nel quale riportare i dati riportati nei riquadri insieme ai risultati; il primo foglio dovrà contenere anche le seguenti informazioni: la prova (I prova intermedia o II prova intermedia), la data dell'appello, il nome e cognome, la matricola, la mail, il corso di studi; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati a seguire. Al termine della prova ed entro il limite di tempo indicato dalla commissione si dovrà caricare il compito svolto sulla piattaforma TEAMS in forma di unico file PDF le immagini fotografiche del primo foglio e a seguire dello svolgimento. Il file va nominato: cognome_matricola_data dell'appello.

Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

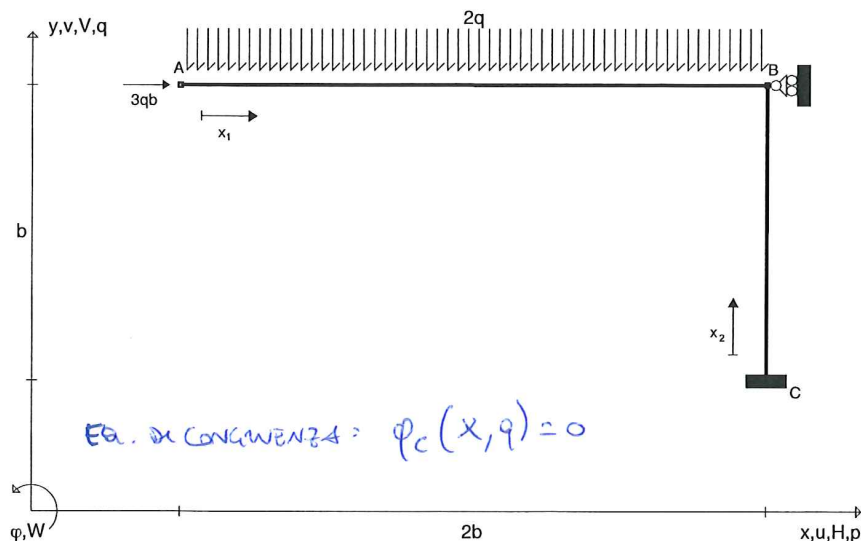
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

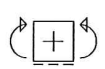
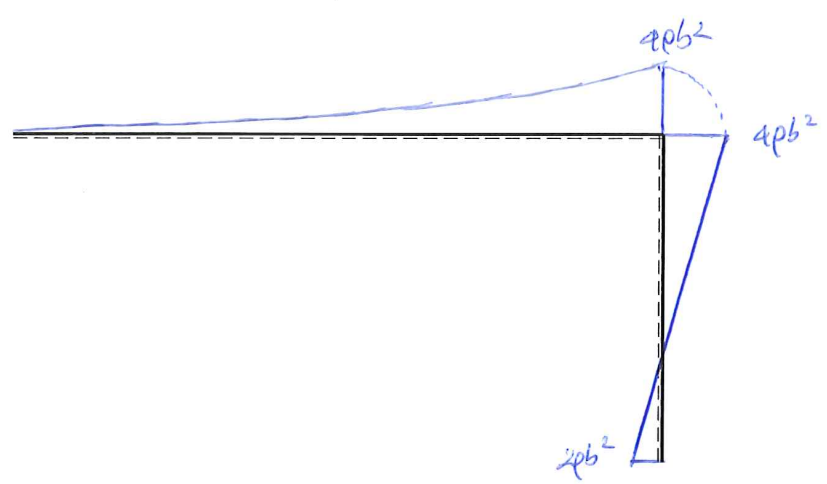
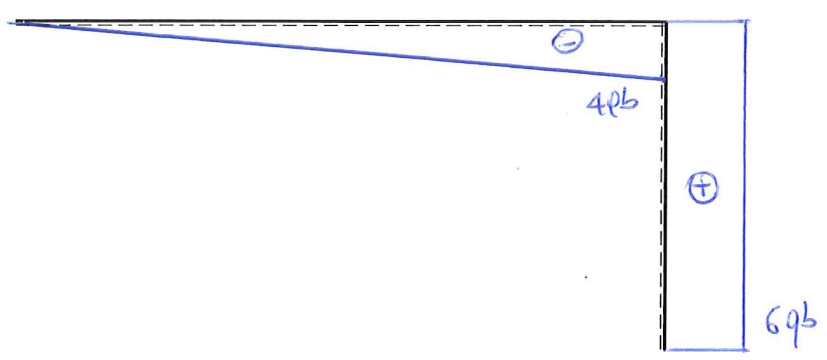
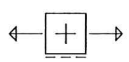
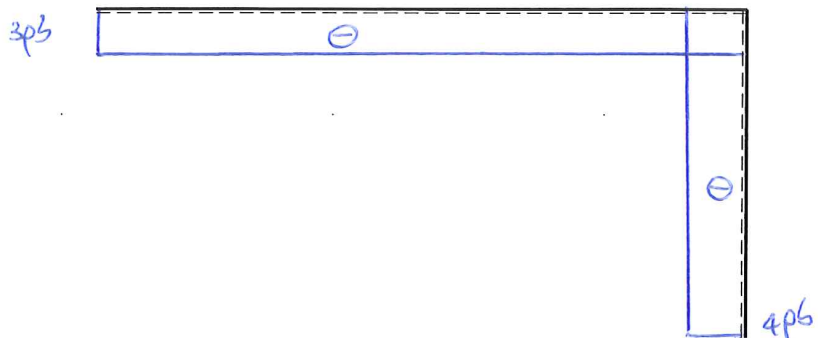
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo come incognita iperstatica il momento di incastro in C M_c . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciare nello spazio predisposto i corrispondenti grafici. *Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 25.03.21*001





$H_B (\Rightarrow) = 3pb$	$H_C (\Rightarrow) = -6pb$	$V_C (\hat{v}) = 4pb$	$M_C (\hat{\varphi}) = 2pb^2$
$N_{AB} = -3pb$	$T_{AB} = -2px_1$	$M_{AB} = -px_1^2$	
$N_{CB} = -4pb$	$T_{CB} = 6pb$	$M_{CB} = 2pb^2 - 6pbx_2$	

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 21.07.2020

Parte II - Testo 1

CdS Edilizia

CdS AdC

CdS SdA

Nota: Per chi dispone di una propria stampante, i risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; per chi non dispone di stampante occorrerà predisporre un primo foglio nel quale riportare i dati riportati nei riquadri insieme ai risultati; il primo foglio dovrà contenere anche le seguenti informazioni: la prova (I prova intermedia o II prova intermedia), la data dell'appello, il nome e cognome, la matricola, la mail, il corso di studi; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati a seguire. Al termine della prova ed entro il limite di tempo indicato dalla commissione si dovrà caricare il compito svolto sulla piattaforma TEAMS in forma di unico file PDF le immagini fotografiche del primo foglio e a seguire dello svolgimento. Il file va nominato: cognome_matricola_data dell'appello.

Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

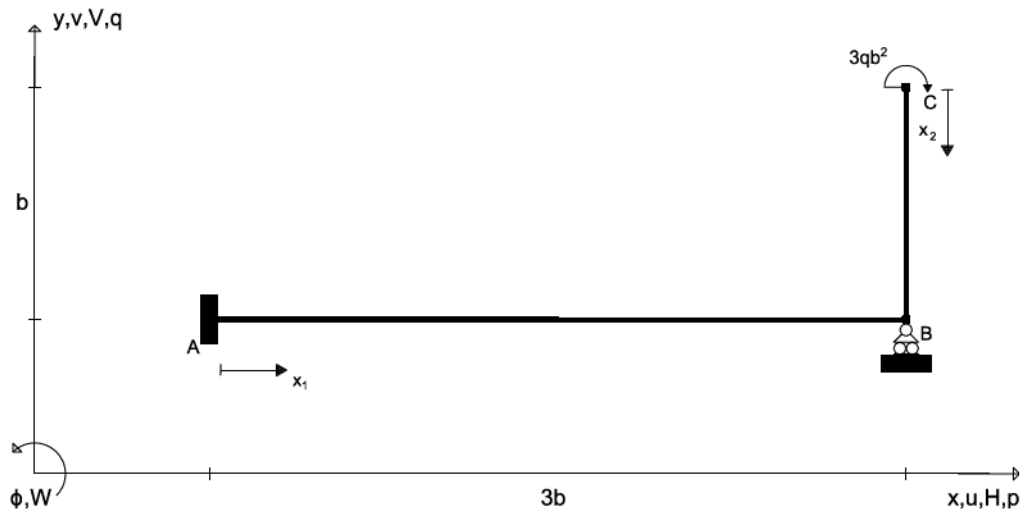
Esercizio n. 1 (17 punti)

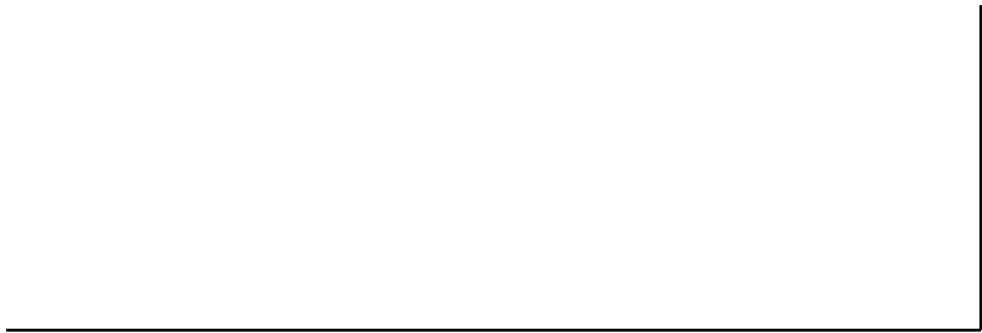
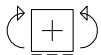
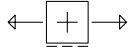
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo come incognita iperstatica la reazione dell'appoggio in B V_B . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciare nello spazio predisposto i corrispondenti grafici.

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

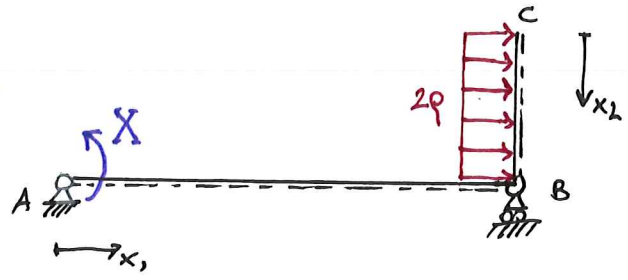
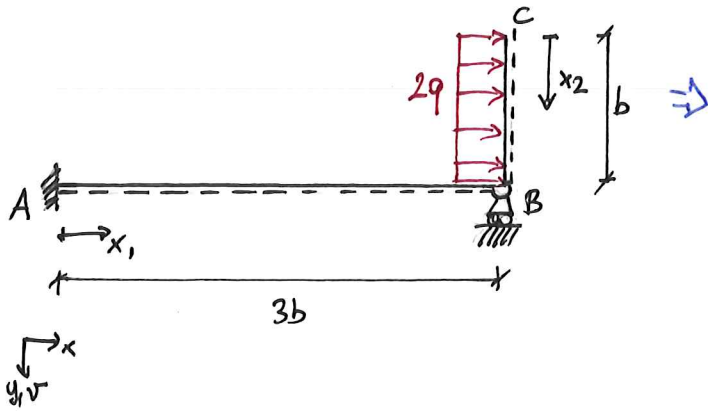
Universita' di Cagliari

SdC_SdA 21.07.20*001



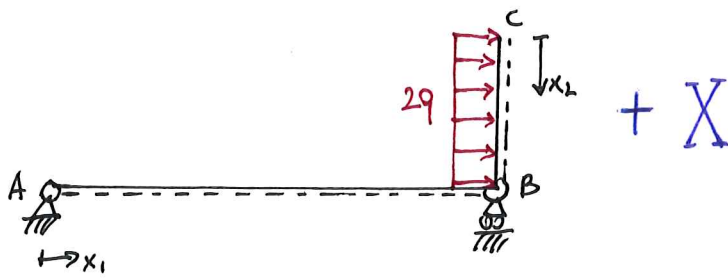


$H_A (\Rightarrow) = \dots\dots\dots; V_A (\hat{\uparrow}) = \dots\dots\dots; M_A (\curvearrowleft) = \dots\dots\dots; V_B (\hat{\uparrow}) = \dots\dots\dots;$
 $N_{AB} = \dots\dots\dots; T_{AB} = \dots\dots\dots; M_{AB} = \dots\dots\dots;$
 $N_{CB} = \dots\dots\dots; T_{CB} = \dots\dots\dots; M_{CB} = \dots\dots\dots;$

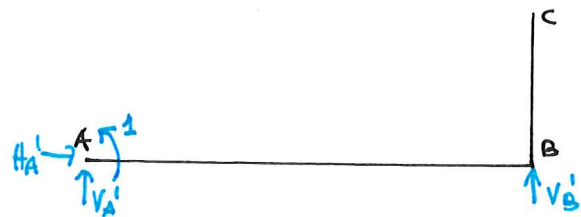
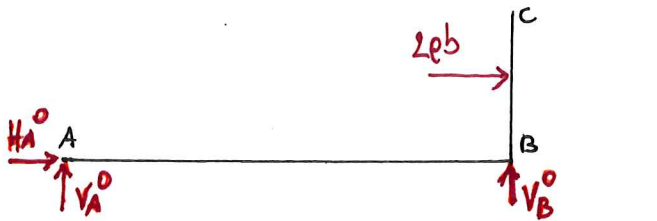
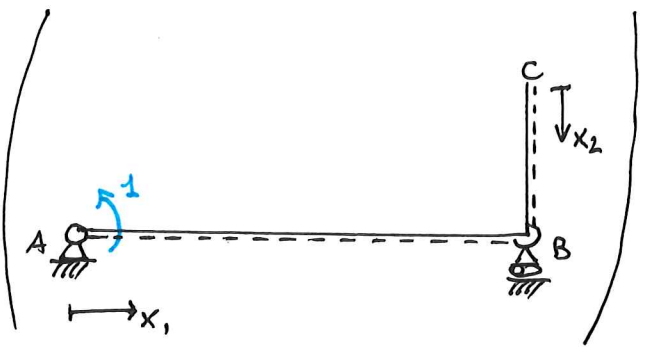


EQUAZIONE DI CONGENENZA: $\varphi_A(q, X) = 0$

SISTEMA PRINCIPALE SP0

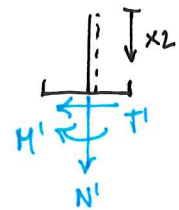
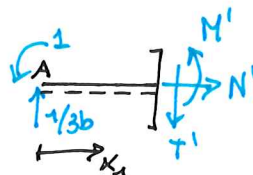
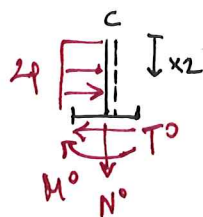
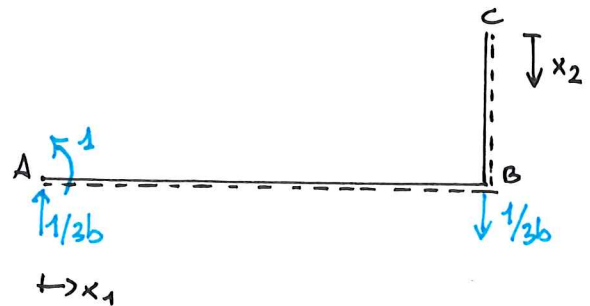
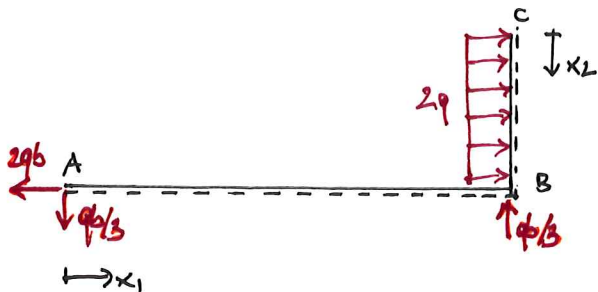


SISTEMA AUSILIARIO SA1



$\rightarrow R_x = 0 \quad H_A^0 + 2qb = 0 \quad (1) \quad H_A^0 = -2qb$
 $\uparrow R_y = 0 \quad V_A^0 + V_B^0 = 0 \quad (3) \quad V_A^0 = -qb/3$
 $\sum M_{(A)} = 0 \quad V_B^0 \cdot 3b - 2qb \cdot b/2 = 0 \quad (2) \quad V_B^0 = qb/3$

$\rightarrow R_x = 0 \quad H_A^1 = 0$
 $\uparrow R_y = 0 \quad V_A^1 + V_B^1 = 0 \quad (2) \quad V_A^1 = 1/3b$
 $\sum M_{(A)} = 0 \quad 1 + V_B^1 \cdot 3b = 0 \quad (1) \quad V_B^1 = -1/3b$

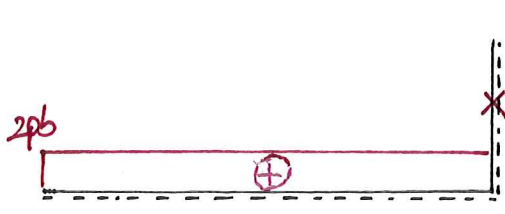


AB $0 \leq x_1 \leq 3b$

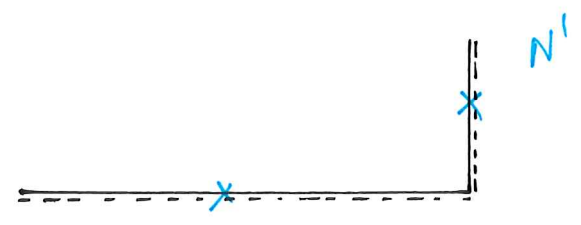
CB $0 \leq x_2 \leq b$

AB $0 \leq x_1 \leq 3b$

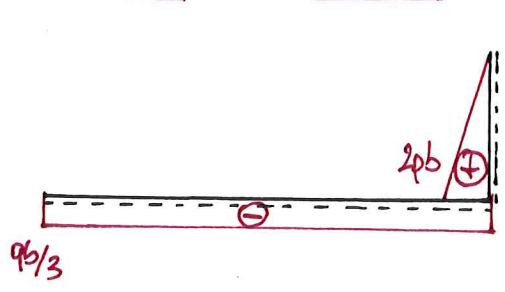
CB $0 \leq x_2 \leq b$



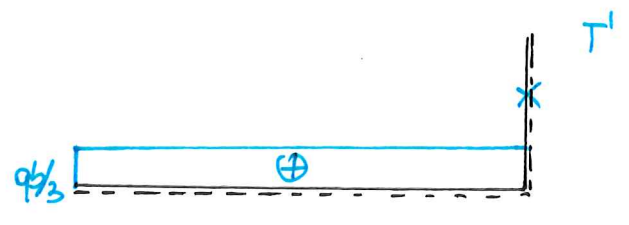
$N^0_{AB} = 2qb$ $N^0_{CB} = 0$



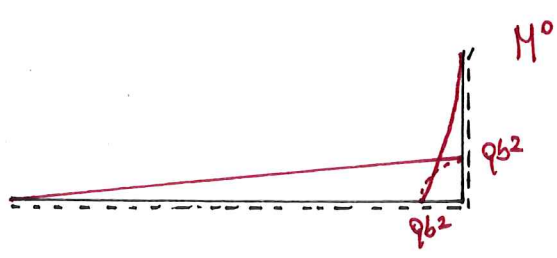
$N^1_{AB} = 0$ $N^1_{CB} = 0$



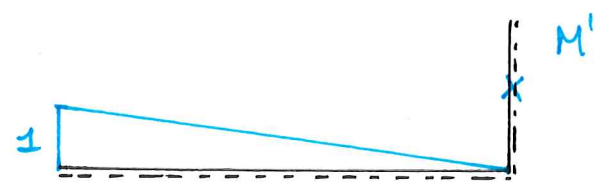
$T^0_{AB} = -qb/3$ $T^0_{CB} = 2qx_2$



$T^1_{AB} = qb/3$ $T^1_{CB} = 0$



$M^0_{AB} = -qb/3 x_1$ $M^0_{CB} = -qx^2_2$



$M^1_{AB} = -1 + 1/3 x_1$ $M^1_{CB} = 0$

$\delta L_e = \delta L_i$

$\delta L_e = 1 \cdot \varphi_A \Rightarrow \varphi_A = 0 \Rightarrow \delta L_e = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \delta L_e = 0 \Rightarrow \delta L_e = \delta L_i \Rightarrow \delta L_i = 0$

$\delta L_i = \int_{e_i} N'(x) \epsilon dx + \int_{e_i} T'(x) \chi dx + \int_{e_i} M'(x) \chi_x dx = 0 \Rightarrow \delta L_i = \int_{e_i} M'(x) \chi_x dx$

$\chi_x = \frac{M^0(x) + X M^1(x)}{EJ} \Rightarrow \delta L_i = \int_{e_i} M'(x) \frac{M^0(x) + X M^1(x)}{EJ} dx = \int_{e_i} \frac{M^0(x) M'(x)}{EJ} dx + X \int_{e_i} \frac{M^1(x) M'(x)}{EJ} dx$

$C_{10} + X C_{11} = 0 \Rightarrow X = -\frac{C_{10}}{C_{11}}$

ТМΠΟ	L	$M^0(x)$	$M^1(x)$	$M^0(x) M^1(x)$	$M^1(x)^2$
AB	3b	$-qb/3 x_1$	$-1 + 1/3 x_1$	$qb/3 x_1 - q/9 x_1^2$	$1 - 2/3 x_1 + 1/9 x_1^2$
CB	b	$-qx^2_2$	0	0	0

$$C_{10} = \int_0^{3b} \frac{(qb/3 x_1 - q/9 x_1^2)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{qb}{3} \left(\frac{x_1^2}{2} \right) - \frac{q}{9} \left(\frac{x_1^3}{3} \right) \right]_0^{3b} = \frac{1}{EI} \left[\frac{qb}{6} x_1^2 - \frac{q}{27} x_1^3 \right]_0^{3b} = \frac{1}{EI} \left[\frac{qb}{6} (3b)^2 - \frac{q}{27} (3b)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{qb}{6} (9b^2) - \frac{q}{27} (27b^3) \right] = \left[\frac{3qb^3}{2} - qb^3 \right] = \frac{qb^3}{2EI}$$

$C_{10} = \frac{qb^3}{2EI}$

$$C_{11} = \int_0^{3b} \frac{(1 - 2/3b x_1 + 1/9b^2 x_1^2)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[x_1 - \frac{2}{3b} \left(\frac{x_1^2}{2} \right) + \frac{1}{9b^2} \left(\frac{x_1^3}{3} \right) \right]_0^{3b} = \frac{1}{EI} \left[x_1 - \frac{1}{3b} x_1^2 + \frac{1}{27b^2} x_1^3 \right]_0^{3b}$$

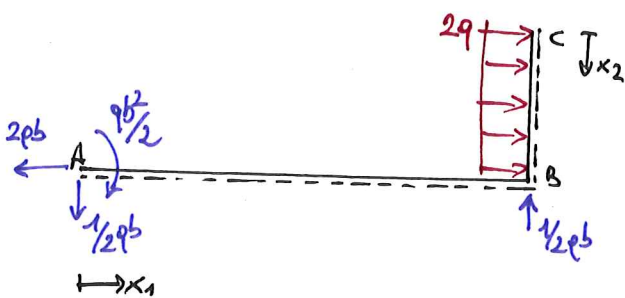
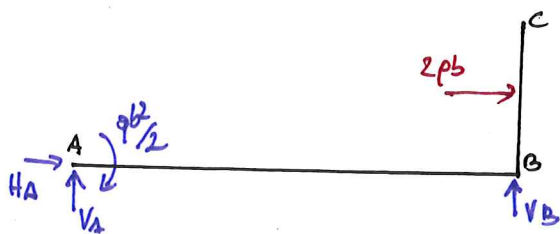
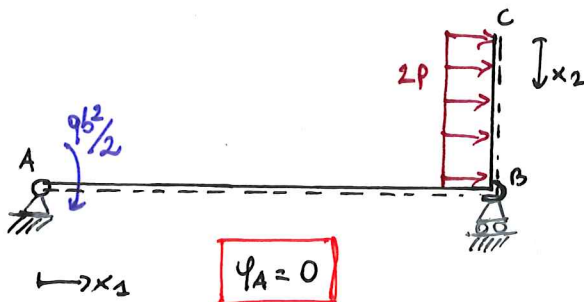
$$= \frac{1}{EI} \left[3b - \frac{1}{3b} (3b)^2 + \frac{1}{27b^2} (3b)^3 \right] = \frac{1}{EI} \left[3b - \frac{1}{3b} (9b^2) + \frac{1}{27b^2} (27b^3) \right] = \frac{1}{EI} \left[3b - 3b + b \right] = \frac{b}{EI}$$

$C_{11} = \frac{b}{EI}$

$$X = -\frac{C_{10}}{C_{11}}$$

$$X = -\left(\frac{qb^3}{2EI} \right) \left(\frac{EI}{b} \right)$$

$X = -\frac{qb^2}{2}$



$$\underline{H_A} = \underline{H_A^0} + X \underline{H_A^1} \Rightarrow -2pb + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) (0) = -2pb$$

$$\underline{V_A} = \underline{V_A^0} + X \underline{V_A^1} \Rightarrow -qb/3 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) \left(\frac{1}{3b} \right) = -1/2 qb$$

$$\underline{V_B} = \underline{V_B^0} + X \underline{V_B^1} \Rightarrow qb/3 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{2b} \right) = 1/2 qb$$

$$\underline{N_{AB}} = \underline{N_{AB}^0} + X \underline{N_{AB}^1} \Rightarrow 2pb + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) (0) = 2pb$$

$$\underline{N_{CB}} = \underline{N_{CB}^0} + X \underline{N_{CB}^1} \Rightarrow 0 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) (0) = 0$$

$$\underline{T_{AB}} = \underline{T_{AB}^0} + X \underline{T_{AB}^1} \Rightarrow -qb/3 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) \left(\frac{qb}{3} \right) = -qb/2$$

$$\underline{T_{CB}} = \underline{T_{CB}^0} + X \underline{T_{CB}^1} \Rightarrow 2qx_2 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) (0) = 2px_2$$

$$\underline{M_{AB}} = \underline{M_{AB}^0} + X \underline{M_{AB}^1} \Rightarrow -qb/3 x_1 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) \left(-1 + \frac{1}{3b} x_1 \right) =$$

$$= -\frac{qb}{3} x_1 + \frac{qb^2}{2} - \frac{qb}{6} x_1 = \frac{1}{2} qb^2 - \frac{1}{2} qb x_1$$

$$\underline{M_{CB}} = \underline{M_{CB}^0} + X \underline{M_{CB}^1} \Rightarrow -qx_2^2 + \left(-\frac{qb^2}{2} \right) (0) = -qx_2^2$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 21.07.2020

Parte II - Testo I

CdS Edilizia

CdS AdC

CdS SdA

Nota: Per chi dispone di una propria stampante, i risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; per chi non dispone di stampante occorrerà predisporre un primo foglio nel quale riportare i dati riportati nei riquadri insieme ai risultati; il primo foglio dovrà contenere anche le seguenti informazioni: la prova (I prova intermedia o II prova intermedia), la data dell'appello, il nome e cognome, la matricola, la mail, il corso di studi; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati a seguire. Al termine della prova ed entro il limite di tempo indicato dalla commissione si dovrà caricare il compito svolto sulla piattaforma TEAMS in forma di unico file PDF le immagini fotografiche del primo foglio e a seguire dello svolgimento. Il file va nominato: cognome_matricola_data dell'appello.

Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

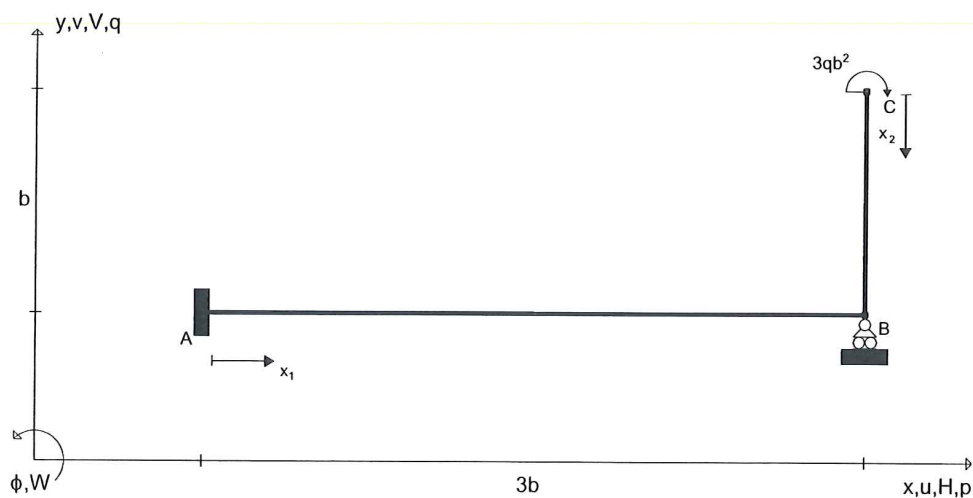
Esercizio n. 1 (17 punti)

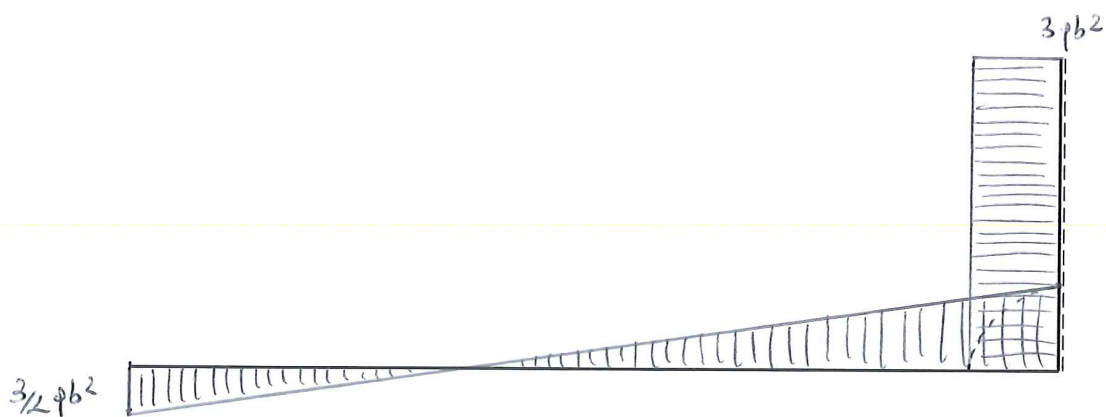
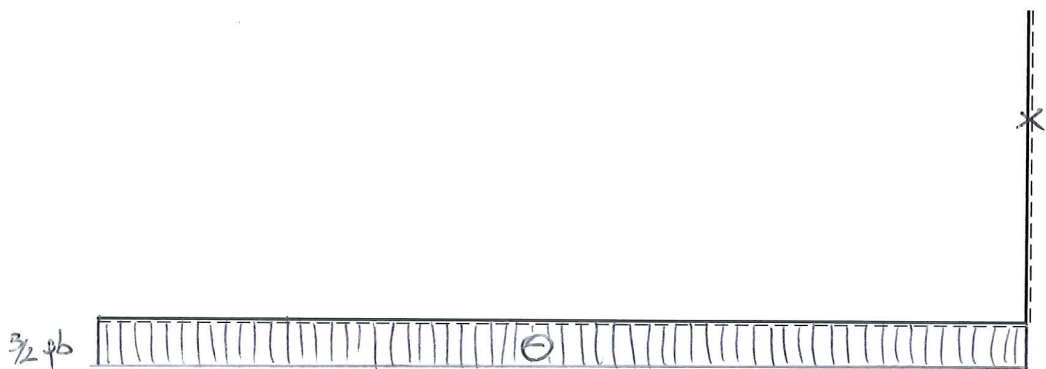
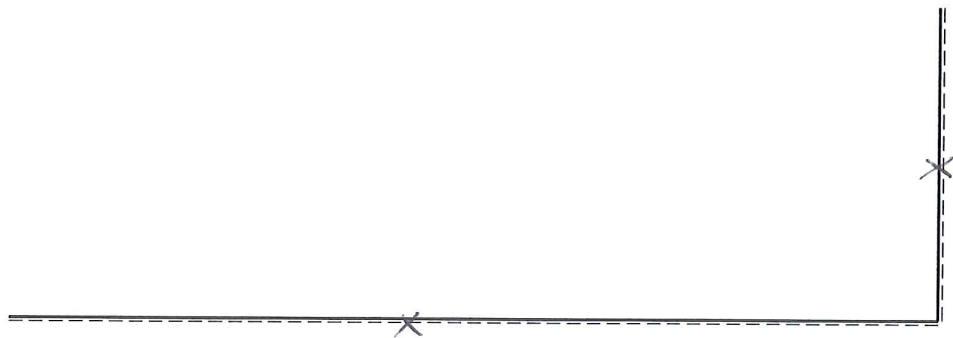
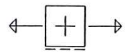
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo come incognita iperstatica la reazione dell'appoggio in B V_B . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciare nello spazio predisposto i corrispondenti grafici.

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 21.07.20*001





$H_A (\Rightarrow) = \dots 0 \dots$	$V_A (\uparrow) = \dots -\frac{3}{2} qb \dots$	$M_A (\curvearrowright) = \dots -\frac{3}{2} qb^2 \dots$	$V_B (\uparrow) = \dots \frac{3}{2} qb \dots$
$N_{AB} = \dots 0 \dots$	$T_{AB} = \dots -\frac{3}{2} qb \dots$	$M_{AB} = \dots \frac{3}{2} qb^2 - \frac{3}{2} qb \times l \dots$	
$N_{CB} = \dots 0 \dots$	$T_{CB} = \dots 0 \dots$	$M_{CB} = \dots -3 qb^2 \dots$	