Università degli Studi di Trento – Facoltà di Ingegneria

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2A

A.A. 2002-03

Secondo compito scritto in aula del 09.06.2003

Testo 1.

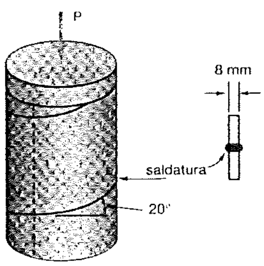
Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti. **Riportare sempre nei calcoli almeno 3 cifre decimali significative.**

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n.1 (6 punti)

Un tubo di 300 mm di diametro esterno è realizzato con un nastro di acciaio di 8 mm di spessore che viene saldato lungo una linea elicoidale che forma un angolo di 20° con un piano perpendicolare all'asse del tubo.

1. Sapendo che è applicata una forza assiale P = 240 kN, determinare lo sforzo normale, σ_n, e tangenziale, τ_n, nelle direzioni rispettivamente normale e tangenziale alla saldatura;
2. Supponendo che le tensioni ammissibili nelle direzioni normale e tangenziale alla saldatura sono rispettivamente σ_{amm} = 120 MPa e τ_{amm} = 80 MPa, determinare l'intensità dalla massima forza assiale, P_{max} che può essere applicata.

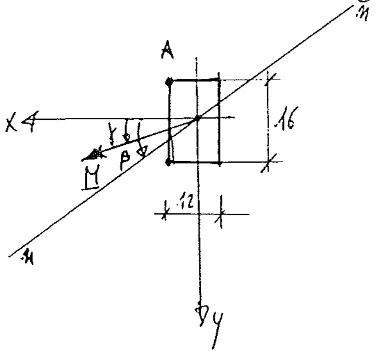


σ_n = ... MPa; τ_n = ... MPa; P_{max} = ... kN;

Esercizio n.2 (6 punti)

Si consideri una trave in legno (tensione ammissibile σ_{amm} = 10 MPa) con sezione trasversale caratterizzata dalle dimensioni seguenti: H = 12 cm, H = 16 cm.
La trave è sollecitata da un momento flettente di modulo M = 2.5 kN·m e il cui asse vettore forma un angolo γ=20° con l'asse x.
Si richiede di

1. calcolare la tensione normale σ_z nel punto A ed eseguire la verifica di resistenza;
2. calcolare il massimo momento flettente (in modulo) M_{max} sopportabile dalla trave (facendo riferimento alla tensione normale σ_z valutata nel punto A);
3. calcolare l'angolo β che l-asse neutro n-n forma con l'asse x;
4. determinare la larghezza B che la sezione dovrebbe avere, a parità di altezza H affinché l'asse neutro n-n formi con l'asse x un angolo β= 45°.



σ_z = ... MPa; *verifica soddisfatta*: .... sì/no; M_{max} = ...kN·m;

β = ...°; B = ... cm

Esercizio n.3 (6 punti)

Una trave di acciaio tipo IPE 100 (tensione ammissibile $\sigma_{amm,acciaio}$ = 160 MPa, modulo elastico $E_{acciaio}$ = 210000 MPa) è inflessa lungo l'asse x dal momento flettente M_x.
Si calcoli l'altezza H di una trave in legno (tensione ammissibile $\sigma_{amm,legno}$ = 10 MPa, modulo elastico E_{legno} = 10000 MPa) di assegnata larghezza B = 14 cm in modo tale che:

1. le due travi abbiano la stessa capacità resistente a flessione rispetto all'asse x.
2. le due travi abbiano la stessa rigidezza flessionale rispetto all'asse x.

Designazione profilo h mm	b mm	s_a mm	e mm	Sezione cm²	Peso kg/m	Valori statici relativi agli assi x-x y-y					
						J_x cm⁴	J_y cm⁴	W_x cm³	W_y cm³	i_x cm	i_y cm
IPE 80	46	3,8*	5,2	7,64	6,0	80,1	8,49	20,0	3,69	3,24	1,05
IPE 100	55	4,1	5,7	10,30	8,1	171,0	15,90	34,2	5,79	4,07	1,24
IPE 120	64	4,4	6,3	13,20	10,4	318,0	27,70	53,0	8,65	4,90	1,45
IPE 140	73	4,7	6,9	16,40	12,9	541,0	44,90	77,3	12,30	5,74	1,65

H_1 = ... cm; H_2 = ...cm

Esercizio n.4 (6 punti)

Tre tavole in legno sono collegate tra di loro mediante chiodatura a formare una trave la cui sezione trasversale è mostrata in Fig. A (*le misure sono espresse in mm*).
Il carico ammissibile a taglio per ciascun chiodo è pari a T_{amm}= 0.8kN e la spaziatura tra essi è pari a d= 100mm.
Si determini la massima azione tagliante V_A che la sezione può sopportare in virtù della chiodatura.
Se il collegamento tra le tavole fosse realizzato con l'utilizzo di colla (vedi Fig. B) si determini la tensione tangenziale τ_{colla} agente su di essa nel caso in cui la sezione fosse sollecitata da un'azione tagliante V_B = 2,5kN.

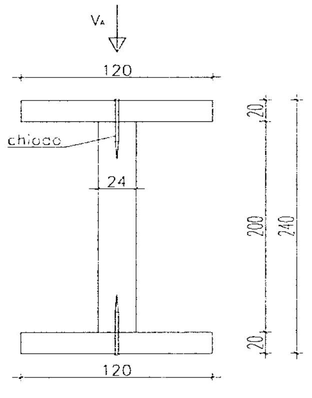


Fig.A

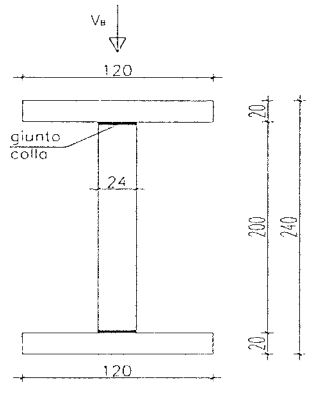
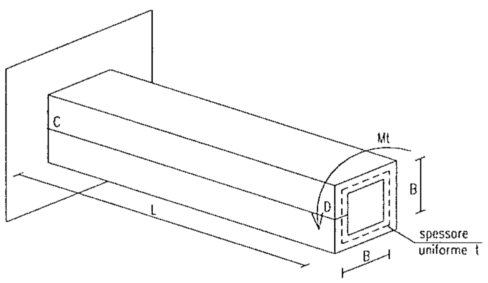


Fig.B

V_A = ... kN; τ_{colla} = ...MPa;

Esercizio n.5 (6 punti)

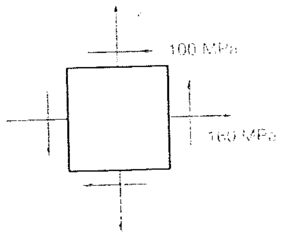
Si determini l'angolo di torsione $\theta_c = \Theta_c L$ e la tensione tangenziale massima $\tau_{max,c}$ causata da un momento torcente M_t pari a 7.0 kN·m applicato all'estremità di un'asta tubolare di rame (E = 104000 MPa e ν = 0.3) di lunghezza L = 100mm avente sezione quadrata in parete sottile di lato B = 70 mm e spessore t = 4 mm.
Si immagini poi di sezionare il profilo lungo la linea CD, senza asportare materiale, in modo da trasformare il profilo iniziale in un profilo aperto.
Per questa nuova configurazione e per un momento torcente M_t = 0.35 KN·m determinare l'angolo di torsione $\theta_a = \Theta_a L$ e la tensione tangenziale massima $\tau_{max,a}$ nella sezione.



θ_c = ...°; $\tau_{max,c}$ = ... MPa; θ_a = ...°; $\tau_{max,c}$ = ... MPa

Esercizio n.6 (bonus, 3 punti)

Lo stato di sforzo piano indicato in Figura si verifica in un elemento strutturale in acciaio con tensione di snervamento σ_o =250.MPa.
Determinare con il criterio di Tresca e con quello di von Mises quale è il valore massimo della tensione normale σ_y sopportabile in sicurezza dal materiale.

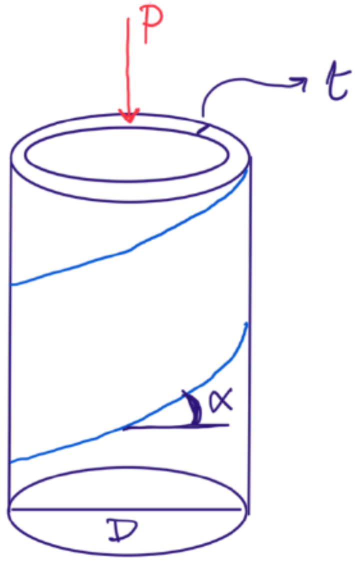


1. $\sigma_{y,\text{Tresca}}$ = ... MPa

2. $\sigma_{y,\text{von Mises}}$ = ... MPa

 /1

ESERCIZIO 1 (9/6/2003)



Consideriamo il tubo in figura, dove

$D = 300\,mm$

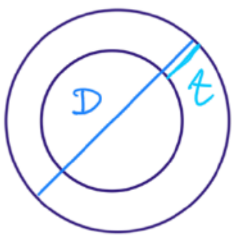
$t = 8\,mm$

$\alpha = 20°$

$P = 240\,kN$

1. Conoscendo il valore della forza assiale P, si richiede di determinare lo sforzo normale σ_n e tangenziale τ_n nelle direzioni normale e tangenziale alla saldatura.

Per fare ciò calcoliamo l'area della sezione trasversale



$$A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{D}{2} - t\right)^2$$

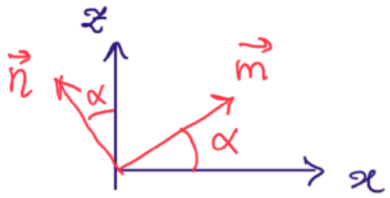
$$= \pi\left(\frac{D^2}{4} - \frac{D^2}{4} - t^2 + Dt\right)$$

$$= \pi\, t\,(D - t) = 7338.760\ mm^2$$

Quindi si ha che

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi\, t\,(D-t)} = 32.703\ MPa$$

A questo punto possiamo calcolare σ_n e τ_n utilizzando i coseni direttori rispetto alla direzione di saldatura



$$\alpha_z = \cos 20° = 0.940$$

$$\beta_z = \cos 70° = 0.342$$

Quindi

$$\sigma_n = \sigma_z \, \alpha_z^2 = 28.878 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = \sigma_z \, \alpha_z \, \beta_z = 10.511 \text{ MPa}$$

2. Se le tensioni ammissibili in direzione normale e tangenziale alla saldatura sono

$$\sigma_{amm} = 120 \text{ MPa} \quad e \quad \tau_{amm} = 80 \text{ MPa},$$

si richiede di determinare l'intensità della massima forza assiale P_{MAX}.

In condizioni limite risulta che

$$\sigma_n = \sigma_{amm} \qquad \qquad \frac{P_{MAX}}{A} \alpha_z^2 = \sigma_{amm}$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau_n = \tau_{amm} \qquad \qquad \frac{P_{MAX}}{A} \alpha_z \beta_z = \tau_{amm}$$

per cui si ha che

$$P_{MAX} = \min\left(\frac{A\,\sigma_{amm}}{\alpha_z^2}, \frac{A\,\tau_{amm}}{\alpha_z\,\beta_z} \right)$$

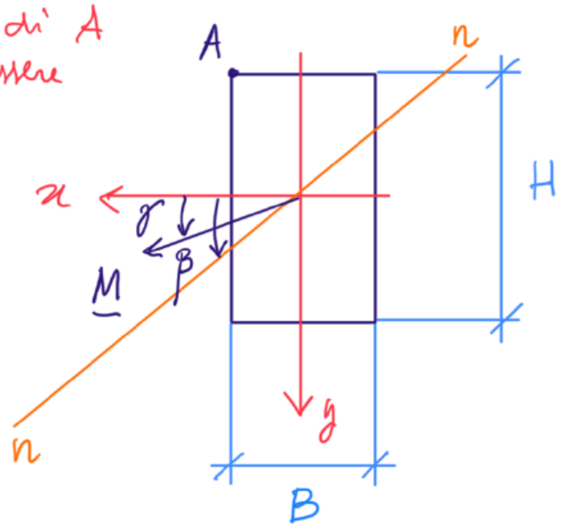
$$= \min\left(997.315\,kN\,,\ 1826.734\,kN\right)$$

$$= 997.315\,kN$$

ESERCIZIO 2 (9/6/2003)

Consideriamo una trave in legno con sezione trasversale mostrata in figura

Si noti che le coordinate di A risultano essere $\left(\frac{L}{2}\,;\,-\frac{H}{2}\right)$



$H = 16\ cm$

$B = 12\ cm$

$M = 2.5\ kN \cdot m$

$\gamma = 20°$

$\beta = 45°$

La tensione ammissibile è $\sigma_{amm} = 10\,MPa$.

1. Vogliamo calcolare la tensione normale σ_z nel punto A ed eseguire la verifica di resistenza. A tale scopo consideriamo che possiamo scrivere σ_z a partire dalle componenti del momento flettente e dal momento di inerzia

$$M_x = M\cos\gamma = 2,349 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_y = M\sin\gamma = 0,855 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$J_x = \frac{1}{12}BH^3 = \frac{1}{12}120\cdot 160^3 = 40,96\cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12}HB^3 = \frac{1}{12}160\cdot 120^3 = 23,04\cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Quindi

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x = M\left(\frac{y\cos\gamma}{J_x} - \frac{x\sin\gamma}{J_y}\right)$$

che può essere valutato nel punto A

$$A = \left(\frac{L}{2}; -\frac{H}{2}\right) = (60\text{mm}; -80\text{mm})$$

per cui

$$\sigma_z\Big|_A = M\left(\frac{-80\cos 20^\circ}{J_x} - \frac{60\sin 20^\circ}{J_y}\right) = -6.815 \text{ MPa}$$

Si noti che, essendo $\sigma_{amm} = 10$ MPa, allora

$$|\sigma_z|_A \leq \sigma_{amm}$$

2. Vogliamo ora calcolare il massimo momento flettente M_{MAX} sopportabile dalla trave. Usando all'inverso la relazione che abbiamo

sfruttato nel rispondere alla domanda precedente e tenendo conto che a M_{MAX} corrisponde una tensione normale σ_z tale che

$$|\sigma_z|_A = \sigma_{amm}$$

si ottiene che

$$M_{MAX} = \sigma_{amm} \cdot \left(\frac{80 \cos\gamma}{J_x} + \frac{60 \sin\gamma}{J_y} \right)^{-1}$$

$$= 3.668 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. Calcoliamo l'angolo β che l'asse neutro n-n forma con l'asse x. Si noti che

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg}\gamma$$

$$= \frac{\frac{1}{12} B H^3}{\frac{1}{12} B^3 H} \operatorname{tg}\gamma = \left(\frac{H}{B}\right)^2 \operatorname{tg}\gamma$$

per cui

$$\beta = \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{H}{B}\right)^2 \operatorname{tg}\gamma\right] = 32,9°$$

4. Infine, vogliamo determinare la larghezza B' che la sezione dovrebbe avere, a parità di altezza H, affinché l'asse neutro n-n formi con l'asse x un angolo $\beta' = 45°$.

Per fare ciò notiamo che

$$\operatorname{tg}\beta' = \operatorname{tg} 45° = 1$$

per cui $\left(\frac{H}{B}\right)^2 tg\gamma = 1$

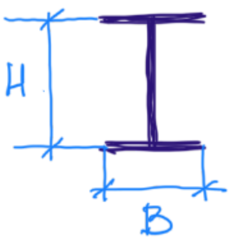
e quindi

$$B^2 = H^2 tg\gamma$$

$$B = H\sqrt{tg\gamma} = 9,65 \text{ cm}$$

ESERCIZIO 3 (9/6/2003)

Consideriamo una trave IPE 100 in acciaio



con $\sigma_{amm,acc} = 160$ MPa e $E_{acc} = 210\,000$ MPa. Questa trave è inflessa lungo l'asse x dal momento flettente M_x. Vogliamo calcolare l'altezza H di una trave in legno di larghezza $B = 14$ cm. Si consideri che

$$\sigma_{amm,legno} = 10 \text{ MPa} \quad e \quad E_{legno} = 10000 \text{ MPa}$$

1. Calcoliamo H se le due travi hanno la stessa capacità resistente a flessione rispetto all'asse x.

Per la trave in acciaio si ha che

$$M_{x\,MAX} = \sigma_{amm,acc} \cdot W_{x\,acc}$$

Inoltre, per la trave in legno si ha che

$$\sigma_{z,legno} = \frac{M_{x\,MAX}}{W_{x,legno}} \leq \sigma_{amm,legno}$$

Quindi
$$W_{x,legno} = \frac{M_{xMAX}}{\sigma_{amm,legno}}$$
ma si ha anche che
$$W_{x,legno} = \frac{BH^2}{6} = 34.2\ cm^3$$
per cui, in condizioni limite, si ottiene
$$\frac{BH^2_{min}}{6} = \frac{M_{xMAX}}{\sigma_{amm,legno}} \Rightarrow H^2_{min} = \frac{6M_{xMAX}}{B\,\sigma_{amm,legno}}$$
Quindi
$$H_1 = H_{min} = \sqrt{6\,\frac{\sigma_{amm\,acc}}{\sigma_{amm,legno}} \cdot \frac{W_{x,acc}}{B}} = 15.31\ cm$$

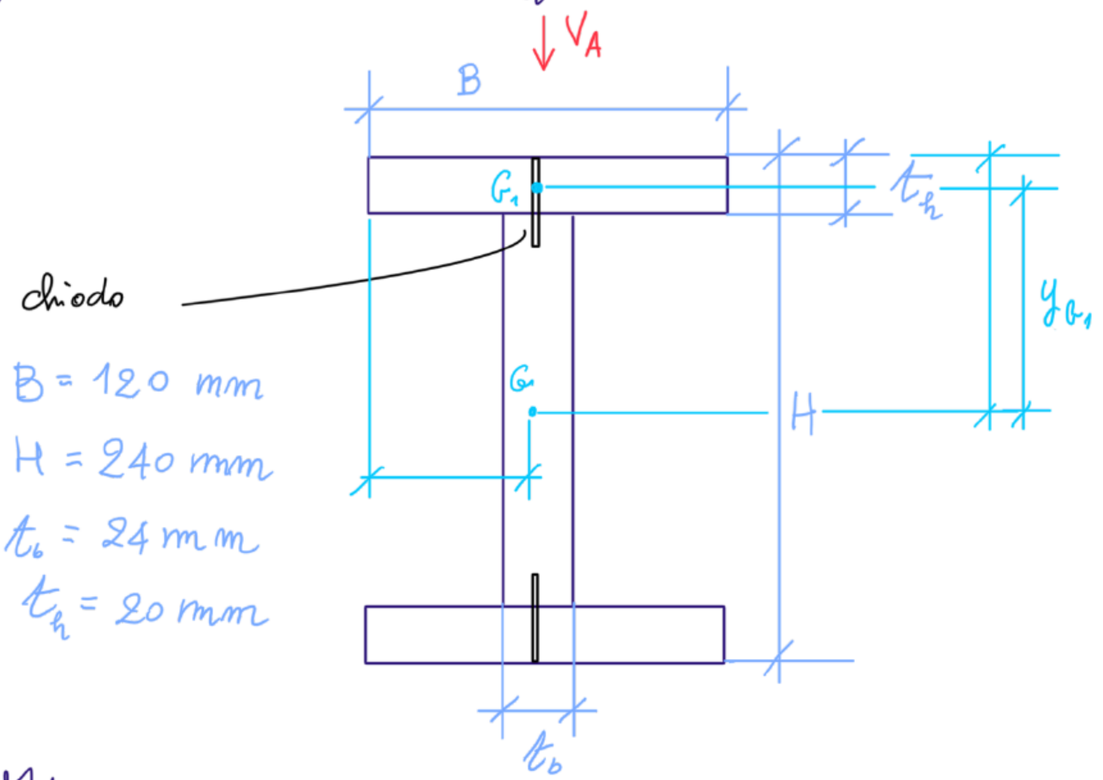
2. Calcolare H se le due travi hanno la stessa rigidezza flessionale rispetto all'asse x.

Per la trave in acciaio si ha che
$$EJ_x = E_{acc} \cdot J_{x,acc}$$
mentre per quella in legno
$$EJ_x = E_{legno} \cdot \frac{1}{12} B H^3_{legno}$$
Se la rigidezza flessionale deve essere la stessa, allora si ha che
$$E_{acc} J_{x,acc} = E_{legno} \cdot \frac{BH^3_{legno}}{12}$$
per cui

$$H_2 = H_{legno} = \sqrt[3]{12 \, \frac{E_{acc}}{E_{legno}} \cdot \frac{J_{x,acc}}{B}} = 14.55 \text{ cm}$$

ESERCIZIO 4 (9/6/2003)

Consideriamo la trave in legno costituita da tre tavole collegate con chiodature, la cui sezione trasversale è data da



$B = 120$ mm

$H = 240$ mm

$t_b = 24$ mm

$t_h = 20$ mm

Il carico ammissibile a taglio per ciascun chiodo è $T_{amm} = 0.8$ kN e la spaziatura tra essi è $d = 100$ mm.

Vogliamo determinare la massima azione tagliante V_A che la sezione può sopportare in virtù delle chiodature.

A tale scopo determiniamo il momento

d'inerzia della sezione attorno all'asse orizzontale baricentrico

$$I = \frac{B \cdot t_h^3}{12} \cdot 2 + B \cdot t_h \cdot y_{G1}^2 \cdot 2 + \frac{t_b (H - 2t_h)^3}{12}$$

$$= \frac{120 \cdot 20^3}{12} \cdot 2 + 120 \cdot 20 \cdot 110^2 \cdot 2 + \frac{24 \cdot 200^3}{12}$$

$$= (160000 + 58080000 + 16000000)\ mm^4$$

$$= 74240000\ mm^4$$

Invece, il momento statico di un'ala rispetto al baricentro è dato da

$$S = t_h \cdot B \cdot y_{G1} = 264000\ mm^3$$

Infine, determiniamo V_A

$$\frac{T_{amm}}{d} = \frac{0{,}8 \cdot 10^3\ N}{100\ mm} = \frac{V_A S}{I} = V_A \frac{264\,000\ mm}{74240000\ mm}$$

per cui

$$V_A = \frac{7424\cancel{0000}}{26400\cancel{0}} \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^3\ N}{\cancel{100}} = 2{,}25\ kN$$

Adesso consideriamo il caso in cui la stessa sezione sia ottenuta non per chiodatura ma con l'utilizzo di colla.

Vogliamo determinare la tensione tangenziale

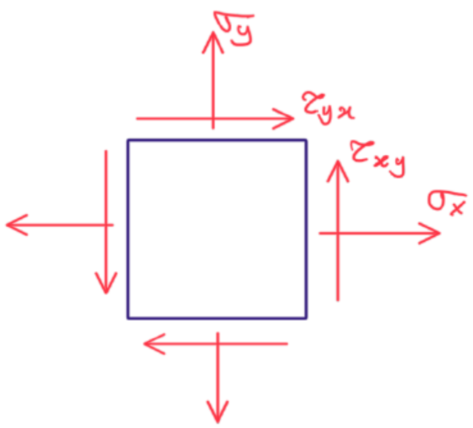
τ_{colla} nel caso in cui la sezione è sollecitata da un'azione tagliante $V_B = 2.5\ kN$.

Allora, mediante un ragionamento analogo a quello di prima, si ottiene che

$$\tau_{colla} = \frac{V_B S}{t_B I} = \frac{2,5 \cdot 10^3 N \cdot 264000\ mm^3}{24 \cdot 74240000\ mm^4}$$

$$= 0,370\ MPa$$

ESERCIZIO 6 (9/6/2003)



Consideriamo lo stato di sforzo piano in figura dove

$\sigma_x = 160\ MPa$

$\tau_{xy} = 100\ MPa$

Vogliamo determinare con il criterio di Tresca e con quello di Von Mises qual è il valore massimo della tensione normale σ_y sopportabile in sicurezza dal materiale, sapendo che la tensione di snervamento è

$$\sigma_0 = 250\ MPa.$$

1. Criterio di Tresca

Si deve avere, al limite, che

$$\tau_{MAX} = \max\left\{\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right|\right\} = \frac{\sigma_0}{2}$$

Se $\sigma_y > 0$ si ha che

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

Quando $\sigma_3 < 0$, cioè se

$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\frac{\cancel{\sigma_x^2} + 2\sigma_x\sigma_y + \cancel{\sigma_y^2}}{4} < \frac{\cancel{\sigma_x^2} - 2\sigma_x\sigma_y + \cancel{\sigma_y^2}}{4} + \tau_{xy}^2$$

$$\frac{2\sigma_x\sigma_y}{4} + \frac{2\sigma_x\sigma_y}{4} < \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_x\sigma_y < \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_y < \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_x} = \frac{100^2}{160} = 62.5\ MPa$$

oppure se $\sigma_2 > 0$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

che fornisce $\sigma_y > 62.5$ MPa

Consideriamo, quindi, i due casi.

Nel primo caso $\sigma_y < 62.5$ MPa

$$\tau_{MAX} = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

da cui

$$\frac{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}{4} + \tau_{xy}^2 = \frac{\sigma_0^2}{4}$$

$$\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2 - \sigma_0^2 = 0$$

$$\sigma_y = \sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 - (\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2 - \sigma_0^2)}$$

$$= \sigma_x \pm \sqrt{\sigma_0^2 - 4\tau_{xy}^2} = \begin{cases} \sigma_y^* \\ \sigma_y^{**} \end{cases}$$

$$= 160 \pm \sqrt{250^2 - 4 \cdot 100^2}$$

$$= 160 \pm \sqrt{62500 - 40000}$$

$$= 160 \pm 150 = \begin{cases} 310 \text{ MPa} \\ 10 \text{ MPa} \end{cases}$$

Il valore accettabile è $\sigma_y^{**} < 62.5$ MPa.

Nel secondo caso, cioè se $\sigma_y > 62.5$ MPa si ha che

$$\tau_{MAX} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right] = \frac{\sigma_0}{2}$$

Quindi

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_0 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\sigma_0 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{\sigma_x^2}{4}} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{2} + \cancel{\frac{\sigma_y^2}{4}} + \tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 + \cancel{\frac{\sigma_x^2}{4}} + \cancel{\frac{\sigma_y^2}{4}} - \sigma_0(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$+ \frac{\sigma_x \sigma_y}{2}$$

$$\sigma_0^2 - \sigma_0 \sigma_x - \sigma_0 \sigma_y + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma_y(\sigma_x - \sigma_0) = \tau_{xy}^2 + \sigma_0(\sigma_x - \sigma_0)$$

Quindi

$$\sigma_y^{***} = \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_x - \sigma_0} + \sigma_0$$

$$= \frac{100^2}{160-250} + 250 = 138{,}89 \text{ MPa}$$

Poiché $\sigma_y^{***} > 62.5 \text{ MPa}$, allora è accettabile.

2. Criterio di Von Mises

In condizioni limite risulta che

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_0$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

$$\sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + \left(\sigma_x^2 - \sigma_0^2 + 3\tau_{xy}^2\right) = 0$$

per cui

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 - \sigma_x^2 + \sigma_0^2 - 3\tau_{xy}^2} = \begin{cases} \sigma_y' \\ \sigma_y'' \end{cases}$$

$$= \frac{160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{160}{2}\right)^2 - 160^2 + 250^2 - 3\cdot 100^2}$$

$$= 80 \pm \sqrt{6400 - 25600 + 62500 - 30000}$$

$$= 80 \pm \sqrt{13300} = \begin{cases} 195{,}33 \text{ MPa} \\ -35{,}33 \text{ MPa} \end{cases}$$

Quindi

$$\sigma_{y,\text{VON MISES}} = 195{,}33 \text{ MPa}.$$