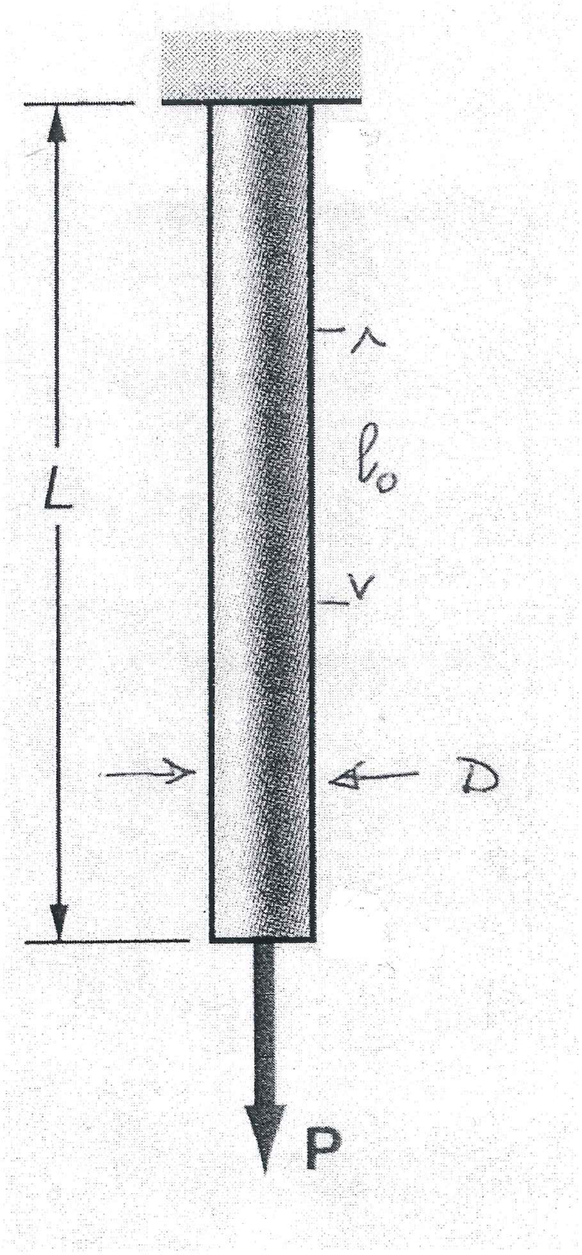
**Esercizio n. 3** (6 punti)

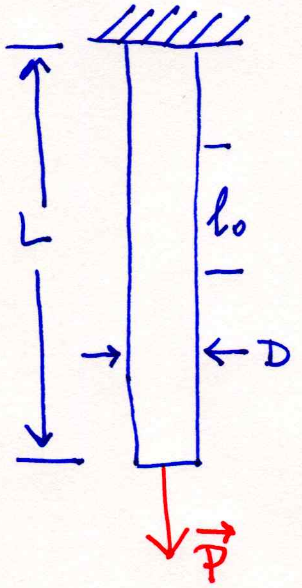
In una prova di trazione si sottopone un'asta di materiale plastico avente diametro $D$ pari a 30 mm a una forza di trazione di valore $P = 7$ kN.

Sapendo che su una base di misura $l_o = 150$ mm si rileva una variazione di lunghezza $\Delta l = 19$ mm e una riduzione di diametro $\Delta D = 0.85$ mm, si richiede di determinare il modulo di elasticità longitudinale (o modulo di Young), $E$, il coefficiente di contrazione trasversale (o coefficiente di Poisson), ν, e la rigidezza assiale, $EA$ (dove $A$ rappresenta l'area della sezione trasversale). Si richiede infine di valutare quali sarebbero la variazione di lunghezza, $\Delta L$, e di raggio, $\Delta R$, prodotte dalla stessa forza di trazione se la base di misura avesse lunghezza $L_o = 500$ mm.




| | |
|---|---|
| $E$ = 0,078181 GPa; $\nu$ = 0,224; $EA$ = 55,263 kN; | |
| $\Delta L$ = 63,333 mm; $\Delta R$ = 0,425 mm | |

# ESERCIZIO 1 (31/01/2012) : LEGAME COSTITUTIVO




Consideriamo la prova a trazione dell'asta in figura. Dalla variazione di lunghezza $\Delta l$ su una base di misura $l_0$ e conoscendo il valore della forza di trazione $P$, è possibile ricavare il modulo di Young $E$. Infatti, si ha che

$$\Delta l = \frac{P l_0}{EA} \qquad (1)$$

dove $A$ è l'area della sezione trasversale. Sappiamo che l'asta ha una forma cilindrica e che il diametro della sezione trasversale vale $D = 30$ mm, per cui

$$A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi \; 15^2 \; mm^2 = 706{,}86 \; mm^2 \qquad (2)$$

Per cui, dalla (1) e dalla (2) otteniamo che

$$E = \frac{P l_0}{A \Delta L} = \frac{7 \cdot 10^3 \; N \cdot 150 \; mm}{706{,}86 \; mm^2 \cdot 19 \; mm} = 0{,}078181 \; GPa \qquad (3)$$

Conoscendo, invece, la variazione del diametro è possibile ricavare il valore del coefficiente di Poisson. Infatti

$$\Delta R = -\frac{\nu}{E} \frac{P}{A} R \qquad (4)$$

dove $R$ e $\Delta R$ rappresentano il raggio e la sua variazione rispettivamente.

Considerando che $\Delta R = \frac{\Delta D}{2}$ e che tale variazione è una riduzione (quindi una variazione negativa) possiamo scrivere usando la (4) e tenendo conto del risultato ottenuto in (3)

$$(5) \qquad \nu = \frac{\Delta R}{R} \frac{EA}{P} = \frac{0.425 \; mm}{15 \; mm} \cdot \frac{78{,}181 \; MPa \cdot 706{,}86 \; mm^2}{7 \cdot 10^3 \; N} = 0{,}2237$$

Adesso vogliamo valutare la variazione di lunghezza, $\Delta L$, e di raggio, $\Delta R$, prodotte dalle stesse forze di trazione se la base di ~~lunghezza~~ misura ha lunghezza $L_0 = 500$ mm.

Basta applicare le relazioni (1) e (4) tenendo conto dei valori di E e di $\nu$ ottenuti rispettivamente in (3) e (5):

$$\Delta L = \frac{P L_0}{E A} = \frac{7 \cdot 10^3 \, N \cdot 500 \, mm}{706{,}86 \, mm^2 \cdot 78{,}181 \, MPa} = 63{,}3 \, mm$$

$$\Delta R = \frac{\nu P R}{E A} = \frac{0.2237 \cdot 7 \cdot 10^3 \, N \cdot 15 \, mm}{78{,}181 \, MPa \cdot 706{,}86 \, mm^2} = 0{,}425 \, mm$$

**Esercizio n. 3** (9 punti)

Un solido di forma cubica, di spigolo $L$ = 200 mm con le facce parallele agli assi del sistema di riferimento è costituito di un materiale caratterizzato dalle costanti elastiche seguenti: $E$ = 390 GPa, $G$ = 130 GPa. È soggetto a uno stato di sforzo piano, completamente individuato da queste componenti: $\sigma_x$ = +60 MPa; $\sigma_y$ = -60 MPa; $\sigma_z$ = 0 MPa.
Si richiede di:

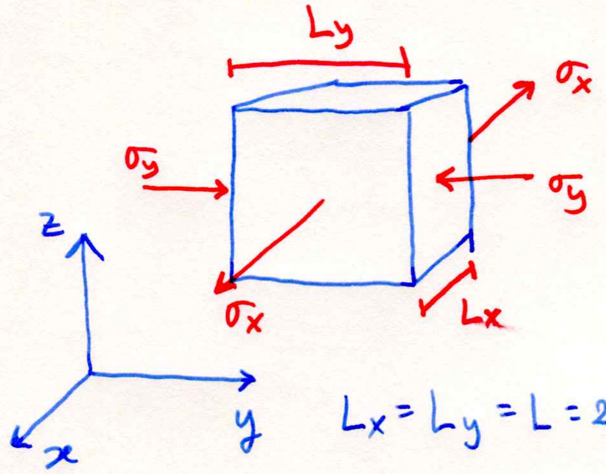
1. Determinare la lunghezza a deformazione avvenuta dello spigolo originariamente parallelo alla direzione dell'asse $x$, $L_x'$;
2. Determinare la lunghezza a deformazione avvenuta dello spigolo originariamente parallelo alla direzione dell'asse $y$, $L_y'$;
3. Determinare il valore della componente di dilatazione secondo la direzione dell'asse $z$, $\varepsilon_z$;
4. Determinare quale sarebbe, in base al criterio di sicurezza di Galilei-Rankine, il massimo sforzo piano $\sigma_x = +\sigma^{(1)}$; $\sigma_y = -\sigma^{(1)}$ (valori espressi in MPa) sopportabile dal materiale, nel caso in cui la tensione ammissibile in regime monoassiale valga $k$ = 100 MPa;
5. Determinare quale sarebbe, in base al criterio di sicurezza di Tresca, il massimo sforzo piano $\sigma_x = +\sigma^{(2)}$; $\sigma_y = -\sigma^{(2)}$ (valori espressi in MPa) sopportabile dal materiale, nel caso in cui la tensione ammissibile in regime monoassiale valga $k$ = 100 MPa;
6. Determinare quale sarebbe, in base al criterio di sicurezza di von Mises, il massimo sforzo piano $\sigma_x = +\sigma^{(3)}$; $\sigma_y = -\sigma^{(3)}$ (valori sempre espressi in MPa) sopportabile dal materiale, nel caso in cui la tensione ammissibile in regime monoassiale valga $k$ = 100 MPa.

$L_x'$ = 200.0462 mm; $L_y'$ = 199.9538 mm;

$\varepsilon_z$ = 0.0000000; $\sigma^{(1)}$ = 100.0000 MPa;

$\sigma^{(2)}$ = 50.0000 MPa; $\sigma^{(3)}$ = 57.7350 MPa;

# ESERCIZIO 3 (13/03/2016): CRITERI DI SICUREZZA




$L_x = L_y = L = 200\,mm$

Consideriamo il solido di forma cubica in figura. Esso è soggetto al seguente stato di sforzo piano

$$\sigma_x = 60\,MPa \quad e \quad \sigma_y = -60\,MPa$$

per cui

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preliminarmente possiamo ricavare il coefficiente di Poisson $\nu$ conoscendo i valori del modulo di Young E e del modulo di taglio G e sapendo che

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{390\,GPa}{2 \cdot 130\,GPa} - 1 = 1.5 - 1 = 0.5$$

Si richiede la determinazione delle lunghezze $L'_x$ e $L'_y$ deformazione avvenuta e delle componenti di dilatazione lungo z, $\varepsilon_z$. A tale scopo, ricordiamo che

$$L'_x = L_x(1+\varepsilon_x) \quad , \quad L'_y = L_y(1+\varepsilon_y)$$

quindi è necessario ricavare preliminarmente i valori delle componenti di dilatazione:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

Utilizzando i valori $\sigma_x = 60\,MPa$, $\sigma_y = -60\,MPa$ e $\sigma_z = 0$, si ottiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) =$$

$$= \frac{1}{390\,GPa}\left(60\,MPa + 0.5 \cdot 60\,MPa\right) = 0.231 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$

$$= \frac{1}{390\,GPa}\left(-60\,MPa - 0.5 \cdot 60\,MPa\right) = -0.231 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[-\nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{390\,GPa}\left[-0.5\left(60\,MPa - 60\,MPa\right)\right] = 0$$

Quindi $\varepsilon_z = 0$. Per quanto riguarda $L'_x$ e $L'_y$

$$L'_x = L_x(1+\varepsilon_x) = 200\,mm\,(1 + 0.231 \cdot 10^{-3}) = 200.0462\,mm$$

$$L'_y = L_y(1+\varepsilon_y) = 200\,mm\,(1 - 0.231 \cdot 10^{-3}) = 199{,}9538\,mm$$

Adesso vogliamo analizzare il problema dal punto di vista dei criteri di sicurezza.

CRITERIO DI GALILEI - RANKINE

Secondo questo criterio dobbiamo avere che

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} \leq k$$

Poiché abbiamo che $\sigma_x = +\sigma^{(1)}$ e $\sigma_y = -\sigma^{(1)}$ allora otteniamo facilmente che

$$\sigma^{(1)} \leq k$$

Quindi il massimo valore dello sforzo $\sigma^{(1)}$ sopportabile dal materiale sarà

$$\sigma^{(1)} = k = 100\,MPa$$

CRITERIO DI TRESCA

Adesso abbiamo $\sigma_x = \sigma^{(2)}$ , $\sigma_y = -\sigma^{(2)}$ e $k = 100$ MPa

Il criterio di Tresca riguarda il massimo sforzo tangenziale

$$\tau_{MAX} = MAX\left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \leq \frac{k}{2}$$

che per uno stato di sforzo piano come quello che stiamo considerando si esprime come

$$MAX\left\{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right\} \leq k$$

Quindi

$$MAX\left\{ \sigma^{(2)}, \sigma^{(2)}, 2\sigma^{(2)} \right\} \leq k$$

che implica
$$2\sigma^{(2)} \leq k \Rightarrow \sigma^{(2)} = \frac{k}{2} = 50 \text{ MPa}$$

CRITERIO DI VON MISES

Questo criterio è espresso da

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq k$$

Nel caso in esame

$$\sigma_x = +\sigma^{(3)}, \quad \sigma_y = -\sigma^{(3)} \quad \text{e } k = 100 \text{ MPa}$$

per cui

$$\sqrt{\sigma^{(3)2} + \sigma^{(3)2} + \sigma^{(3)2}} \leq k$$

$$\sigma^{(3)}\sqrt{3} \leq k \Rightarrow \sigma^{(3)} = \frac{k}{\sqrt{3}} = 57,735 \text{ MPa}$$

*Università degli Studi di Trento – Facoltà di Ingegneria*

# CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI PER INGEGNERIA EDILE - ARCHITETTURA (II mod.)

A.A. 2003-04

Appello scritto del 24.06.2004

Parte I - Testo ...

*Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.* **Riportare sempre nei calcoli almeno 3 cifre decimali significative.**

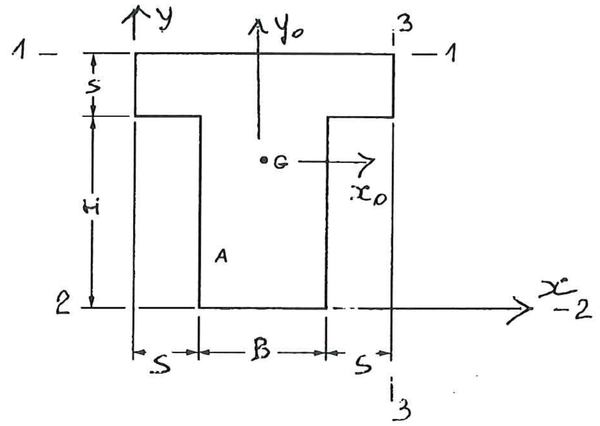
| Allievo:...................................................... Matricola:....... |
|---|

**Esercizio n.1**

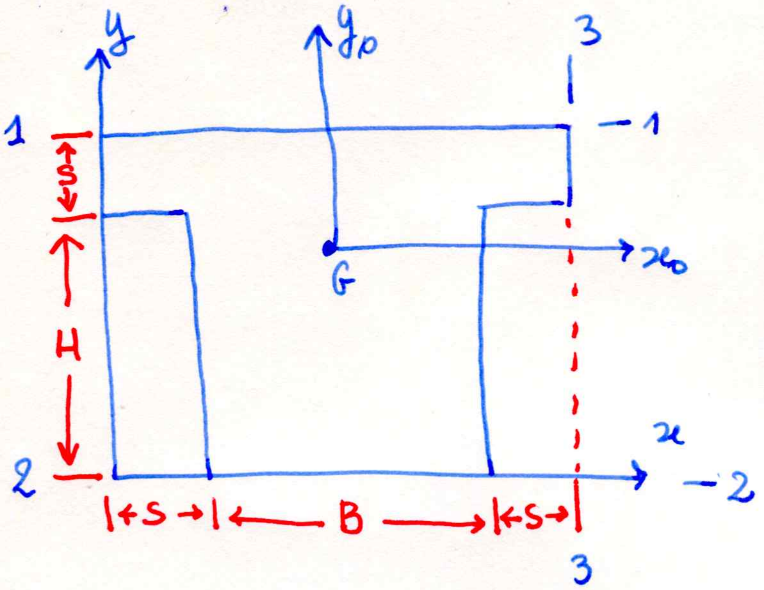
Si consideri la sezione a T simmetrica indicata in Figura, con $B$ = 40 mm; $H$ = 60 mm; $s$ = 10 mm.

Si richiede di determinare:

1. I momenti di inerzia, $I_x$ e $I_y$, e il momento centrifugo, $I_{xy}$ rispetto agli assi $x$ e $y$ indicati in Figura;
2. le coordinate del baricentro, $x_G$ e $y_G$ rispetto agli assi $x$ e $y$;
3. I momenti principali di inerzia, $I_{x_o}$ e $I_{y_o}$ rispetto agli assi baricentrici $x_o$ e $y_o$
4. I massimi momenti $M_x^+$ (positivo) e $M_x^-$ (negativo) sopportabili dalla sezione nel caso che il materiale abbia tensioni ammissibili diverse a trazione $\sigma_0^+$ = 230 MPa e $\sigma_0^-$ = 415 MPa, e i corrispondenti valori della tensione normale $\sigma_z$ al lembo superiore ($\sigma_{z,sup}^+$ e $\sigma_{z,sup}^-$ rispettivamente) e inferiore ($\sigma_{z,inf}^+$ e $\sigma_{z,inf}^-$ rispettivamente) della sezione.
5. Le coordinate dei centri di pressione $P_1$, $P_2$ e $P_3$ corrispondenti agli assi neutri 1-1, 2-2, 3-3, espresse nel sistema di riferimento baricentrico.



# ESERCIZIO 1 (24/06/2004): SEZIONI TRASVERSALI



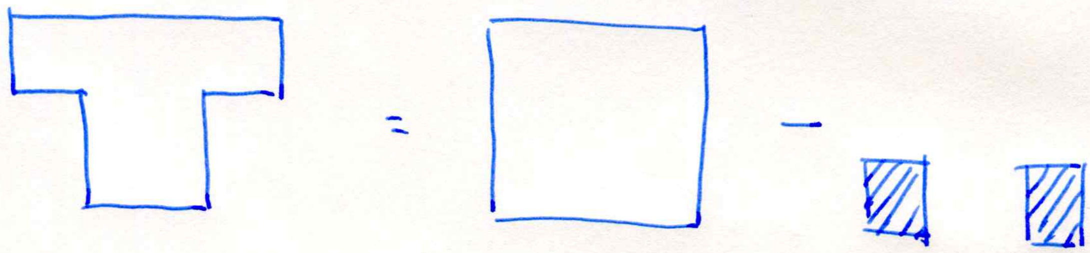

Consideriamo la sezione a T in figura. Abbiamo che

$B = 40$ mm

$H = 60$ mm

$s = 10$ mm

Vogliamo ricavare i momenti di inerzia $J_x$ e $J_y$ e il momento centrifugo $J_{xy}$. A tale scopo consideriamo la seguente decomposizione della sezione



Si ha che

$$J_x = \frac{1}{3}(s+H)^3(2s+B) - \frac{2}{3} s H^3$$

$$= \frac{1}{3}(10\,\text{mm} + 60\,\text{mm})^3 (20\,\text{mm} + 40\,\text{mm}) - \frac{2}{3} 10 \cdot 60^3\,\text{mm}^4$$

$$= 542\,\text{cm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{3}(s+H)(2s+B)^3 - \frac{1}{3} s^3 H - \left[\frac{1}{12} s^3 H + sH\left(\frac{3}{2}s + B\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3} 70\,\text{mm} \cdot 60^3\,\text{mm}^3 - \frac{1}{3} 10^3 \cdot 60\,\text{mm}^4 +$$

$$-\left[\frac{1}{12} 10^3 \cdot 60\,\text{mm}^4 + 600\,\text{mm}^2 \left(\frac{3}{2}\cdot 10 + 40\right)^2 \text{mm}^2\right] = 320\,\text{cm}^4$$

$$\mathcal{J}_{xy} = \frac{1}{4}(2S+B)^2(S+H)^2 - \frac{1}{4}S^2H^2 - SH\left(\frac{H}{2}\right)\left(\frac{3}{2}S+B\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,60^2\,mm^2 \cdot 70^2\,mm^2 - \frac{1}{4}\,100 \cdot 60^2\,mm^4 - 600\,mm^2 \cdot 30\,mm \cdot 55\,mm$$

$$= 333\,cm^4$$

Per ricavare le coordinate del baricentro $x_G$ e $y_G$ rispetto agli assi $x$ e $y$, calcoliamo prima l'area della sezione

$$A = (S+H)(2S+B) - 2SH$$

$$= 70\,mm \cdot 60\,mm - 2 \cdot 10\,mm \cdot 60\,mm = 30\,cm^2$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S+H)^2(2S+B) - 2S\frac{H^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,70^2\,mm^2 \cdot 60\,mm - 2 \cdot 10\,mm\,\frac{60^2}{2}\,mm^2 = 111\,cm^3$$

$$S_y = \frac{1}{2}(S+H)(2S+B)^2 - \frac{S^2}{2}H - SH\left(\frac{3}{2}S+B\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,70\,mm \cdot 60^2\,mm^2 - \frac{100\,mm^2}{2} \cdot 60\,mm - 10\,mm \cdot 60\,mm \cdot 55\,mm$$

$$= 90\,cm^3$$

A questo punto possiamo ricavare le coordinate del baricentro

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{90\,cm^3}{30\,cm^2} = 3\,cm$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{111\,cm^3}{30\,cm^2} = 3.7\,cm$$

I momenti principali d'inerzia rispetto agli assi baricentrici $x_G$ e $y_G$ sono invece

$$\mathcal{J}_{x_0} = \frac{1}{12}(2S+B)(S+H)^3 + (S+H)(2S+B)\left(y_G - \frac{H+S}{2}\right)^2 +$$

$$- \frac{2}{12}SH^3 - 2SH\left(y_G - \frac{H}{2}\right)^2 = 131.3\,cm^4$$

$$I_{y_0} = \frac{1}{12}(2S+B)^3(S+H) + (S+H)(2S+B)\cdot\left(x_G - \frac{B+2S}{2}\right)^2 +$$
$$- \frac{2}{12} S^3 H - 2SH\left(x_G - \frac{S}{2}\right)^2 = 50\ \text{cm}^4$$

Vogliamo determinare ora i massimi momenti $M_x^+$ e $M_x^-$ sopportabili dalla sezione nel caso in cui il materiale abbia tensioni ammissibili a trazione $\sigma_0^+ = 230$ MPa e $\sigma_0^- = 415$ MPa. A tale scopo:

$$W_x^+ = \frac{I_{x_0}}{(H+S-y_G)} = 39.7878\ \text{cm}^3$$

Si noti che

$$W_x^+ > W_x^-$$

$$W_x^- = \frac{I_{x_0}}{y_G} = 35.4865\ \text{cm}^3$$

Dunque

$$M_x^+ = \min\left\{\sigma_0^+ W_x^+ , \sigma_0^- W_x^-\right\} = 9.1512\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_x^- = \min\left\{\sigma_0^+ W_x^- , \sigma_0^- W_x^+\right\} = 8.1619\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Inoltre, i corrispondenti valori della tensione normale $\sigma_z$ al lembo superiore e inferiore risultano essere:

$$\sigma_{z,sup}^+ = +\frac{M_x^+}{W_x^+} = 230\ \text{MPa} \quad ; \quad \sigma_{z,inf}^+ = -\frac{M_x^+}{W_x^-} = -257.8788\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{z,sup}^- = -\frac{M_x^-}{W_x^+} = -205.1351\ \text{MPa} \ ; \quad \sigma_{z,inf}^- = \frac{M_x^-}{W_x^-} = 230\ \text{MPa}$$

Infine, vogliamo determinare le coordinate dei centri di pressione $P_1$, $P_2$ e $P_3$ corrispondenti agli assi neutri 1-1, 2-2, 3-3

$$\sigma_{z,1} = +\frac{N}{A} + \frac{N y_1 (S+H-y_G)}{I_{x_0}} = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = -\frac{\cancel{N}}{A}\frac{I_{x_0}}{\cancel{N}}\cdot\frac{1}{(S+H-y_G)} = \frac{I_{x_0}}{A(y_G-S-H)} = -1.326\ \text{cm}$$

$$\sigma_{z,2} = \frac{N}{A} + \frac{N y_2 (-y_G)}{I_{x0}} = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = -\frac{\cancel{N}}{A} \cdot \frac{I_{x0}}{\cancel{N}(-y_G)} = \frac{I_{x0}}{A y_G} = 1.183 \text{ cm}$$

$$\sigma_{z,3} = \frac{N}{A} + \frac{N x_3 (2S + B - x_G)}{I_{y0}} = 0$$

$$x_3 = -\frac{\cancel{N}}{A} \cdot \frac{I_{y0}}{\cancel{N}(2S + B - x_G)} = \frac{I_{y0}}{A(x_G - 2S - B)} = -0.556 \text{ cm}$$

$$y_3 = 0$$

*Università degli Studi di Trento – Facoltà di Ingegneria*

# CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI PER INGEGNERIA EDILE - ARCHITETTURA (II mod.)

A.A. 2003-04

Appello scritto del 19.07.2004

Parte I - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.* **Riportare sempre nei calcoli almeno 3 cifre decimali significative**.

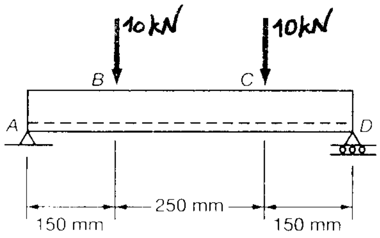
| Allievo:................................................... Matricola:....... |
|---|

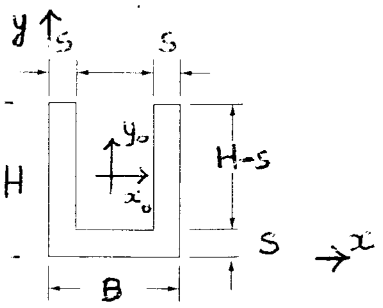
**Esercizio n.1**

Si consideri la trave di acciaio ($E$= 210 GPa) avente la sezione a U simmetrica indicata in Figura, con $B$ = ...40... mm; $H$ = .....60... mm; $s$ = .....8..... mm.

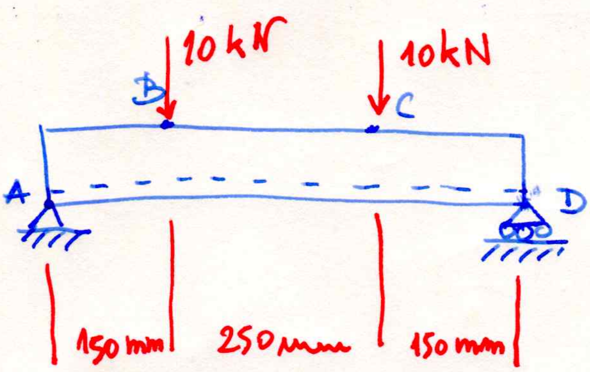
Si richiede di determinare:

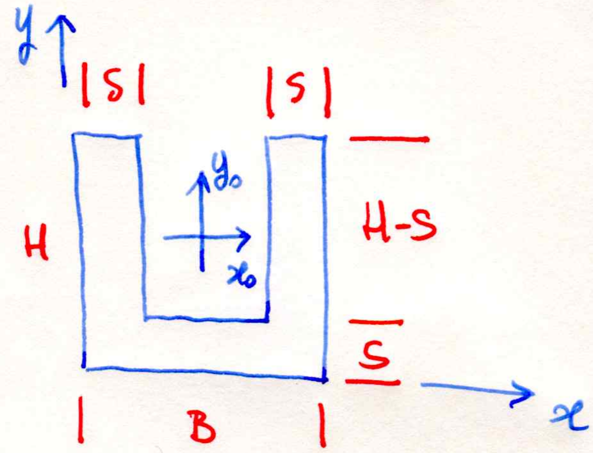
1. I momenti di inerzia, $I_x$ e $I_y$, e il momento centrifugo, $I_{xy}$ rispetto agli assi $x$ e $y$ indicati in Figura;
2. le coordinate del baricentro, $x_G$ e $y_G$ rispetto agli assi $x$ e $y$;
3. I momenti principali di inerzia, $I_{x_o}$ e $I_{y_o}$ rispetto agli assi baricentrici $x_o$ e $y_o$
4. Il momento flettente $M_x$ nonché il massimo sforzo di trazione, $\sigma_{z,max}$, e di compressione, $\sigma_{z,min}$ che si sviluppano nella porzione centrale (BC) della trave.



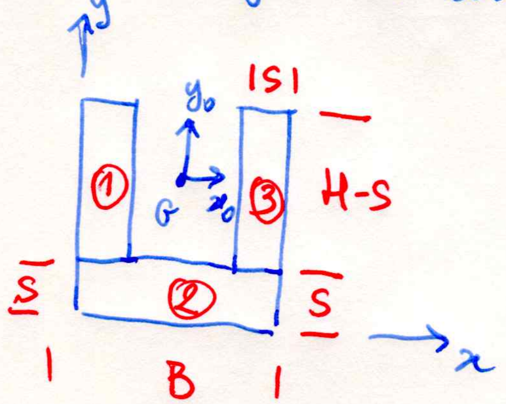
# ESERCIZIO 1 (19/07/2004): TRAVE CON SEZIONE A U




dove $B = 40$ mm, $H = 60$ mm, $S = 8$ mm e $E = 210$ GPa

Le caratteristiche inerziali possono essere calcolate per la somma dei rettangoli che compongono la sezione




$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{12}(H-S)^3 S + 2(H-S)\cdot S \cdot \left(\frac{H-S}{2} + S\right)^2 + \frac{1}{3} B S^3$$

$$= 115.6096 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{3}(H-S)S^3 + \frac{1}{3} S \cdot B^3 + \frac{1}{12}(H-S)\cdot S^3 + (H-S)S\left(B - \frac{S}{2}\right)^2 = 72.0896 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = (H-S)S \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{H+S}{2} + B \cdot S \cdot \frac{B}{2} \cdot \frac{S}{2} + (H-S)S\left(B - \frac{S}{2}\right)\frac{H+S}{2} = 59.1360 \text{ cm}^4$$

$$A_1 = (H-S)\cdot S = 416 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = B \cdot S = 320 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = (H-S)\cdot S = 416 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 11.52 \text{ cm}^2$$

$$S_x = 2(H-S)\cdot S \cdot \frac{H+S}{2} + B \cdot S \cdot \frac{S}{2} = 29.5680 \text{ cm}^3$$

$$S_y = (H-S)\cdot S \cdot \frac{S}{2} + BS \cdot \frac{B}{2} + (H-S)S\left(B - \frac{S}{2}\right) = 23.04 \text{ cm}^3$$

Quindi:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{23.04\ cm^3}{11.52\ cm^2} = 2\ cm$$

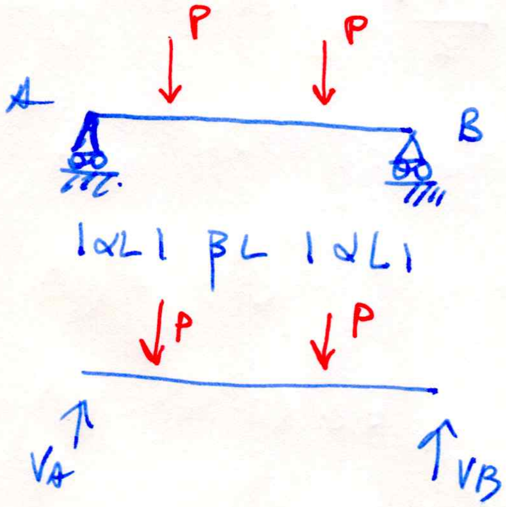
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{29.5680\ cm^3}{11.52\ cm^2} = 2.5667\ cm$$

I momenti principali di inerzia sono dati da

$$I_{x_0} = 2\left[\frac{1}{12}(H-S)^3 \cdot S + (H-S)\cdot S\left(y_G - \frac{H+S}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}BS^3 + BS\left(y_G - \frac{S}{2}\right)^2$$
$$= 39.7184\ cm^4$$

$$I_{y_0} = \frac{1}{12}(H-S)S^3 + (H-S)S\left(\frac{B}{2} - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(H-S)S^3 +$$
$$+ (H-S)S\left(\frac{B}{2} - B + \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}B^3S = 26.0096\ cm^4$$

Vogliamo, infine, calcolare il momento flettente $M_x$ e il massimo sforzo di trazione $\sigma_{z\,max}$ e di compressione $\sigma_{z\,min}$ nella sezione centrale BC della trave.




$V_A = P$ , $V_B = P$ , $P = 10\,kN$

$$M_x\big|_{BC} = -P\alpha L = -10\,kN \cdot 150\,mm$$
$$= -1500\ N\cdot m$$

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_{x_0}} \quad \text{per cui}$$

$$\sigma_{z,MAX} = \frac{M_x}{I_{x_0}}(-y_G) = 96.9324\ MPa$$

$$\sigma_{z,MIN} = \frac{M_x}{I_{x_0}}(H - y_G) = -129.6628\ MPa$$

*Università degli Studi di Trento – Facoltà di Ingegneria*

# CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI PER INGEGNERIA EDILE - ARCHITETTURA (II mod.)

A.A. 2003-04

Appello scritto del 19.07.2004

Parte II - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.* ***Riportare sempre nei calcoli almeno 3 cifre decimali significative***.

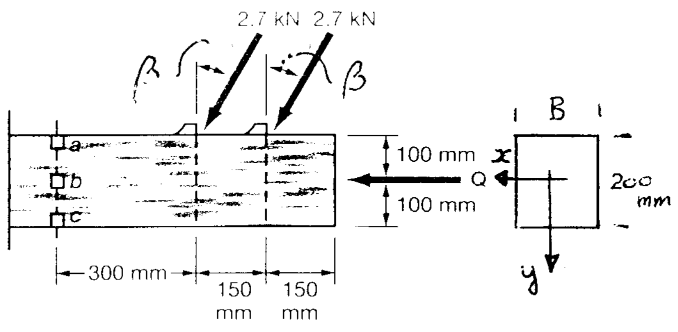
| Allievo:...................................................... Matricola:....... |
|---|

**Esercizio n.2**

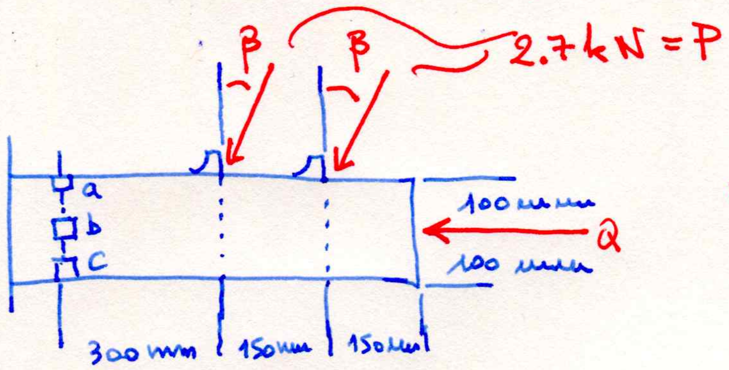
Si consideri la trave a mensola di sezione rettangolare indicata in Figura. È noto che la larghezza della sezione vale $B$ = .100..mm, che il modulo della forza assiale è pari a $Q$ = ..30 kN e che le due forze oblique agiscono con un'inclinazione $\beta$ = .45.° rispetto alla verticale.

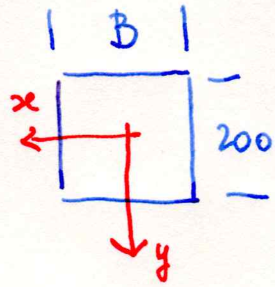
Si richiede di determinare:

1. Le componenti del tensore degli sforzi nei punti $a$ ($\sigma_z^a$, $\tau_{zx}^a$ e $\tau_{zy}^a$), $b$ ($\sigma_z^b$, $\tau_{zx}^b$ e $\tau_{zy}^b$) e nel punto $c$ ($\sigma_z^c$, $\tau_{zx}^c$ e $\tau_{zy}^c$);
2. Gli sforzi principali nel punto $a$ ($\sigma_1^a$ e $\sigma_2^a$) e nel punto $b$ ($\sigma_1^b$ e $\sigma_2^b$);
3. Il massimo sforzo tangenziale nei punti $a$ e $b$, $\tau_{max}^a$ e $\tau_{max}^b$.



ESERCIZIO 2 (19/07/2004)



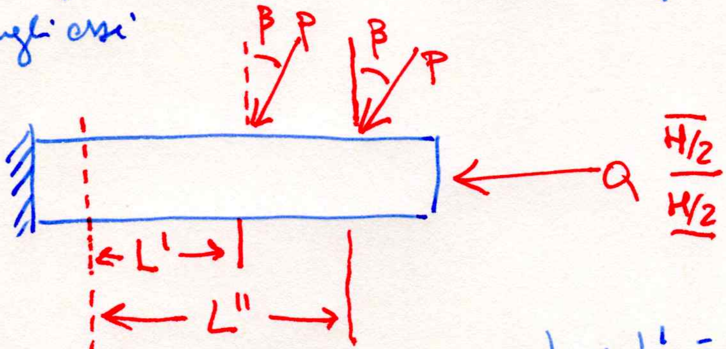



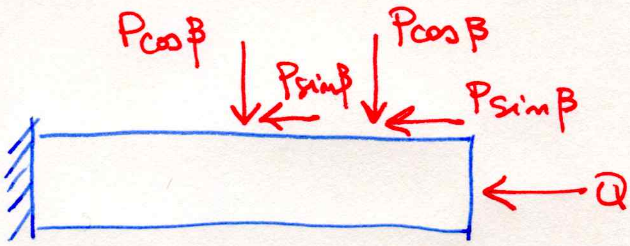

$B = 100\,\text{mm}$

$Q = 30\,\text{kN}$

$\beta = 45°$

Consideriamo la trave a mensola di sezione rettangolare in figura. Vogliamo determinare le componenti del tensore degli sforzi nei punti a, b e c. A tale scopo possiamo proiettare le forze sugli assi




dove $L' = 300\,\text{mm}$

$L'' = 300\,\text{mm} + 150\,\text{mm} = 450\,\text{mm}$

$\Downarrow$

$L' + L'' = 750\,\text{mm}$

Allora

$$N = -Q - 2P\sin\beta = -33\,818.377\,\text{N}$$

$$T_y = 2P\cos\beta = 3\,818.377\,\text{N}$$

$$M_x = -P\cos\beta\, L' - P\cos\beta\, L'' + 2P\sin\beta \cdot \frac{H}{2}$$

$$= -P\cos\beta\,(L' + L'') + P\sin\beta\, H = -1\,050\,053.570\,\text{N}\cdot\text{mm}$$

Quindi possiamo dedurre il valore di $\sigma_z$, $\tau_{zx}$ e $\tau_{zy}$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}\,y$$

dove $A = B \cdot H = 20000\,\text{mm}^2$

e $I_x = \frac{1}{12} B H^3 = 66666666.667\,\text{mm}^4$

$$\tau_{zx} = 0$$

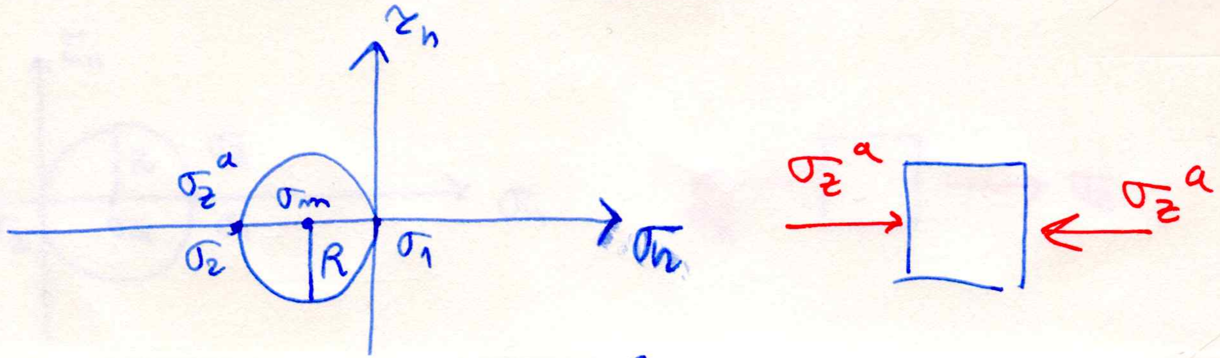
$$\tau_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{B I_x}$$

Poiché $\sigma_z$ dipende da $y$ e $\tau_{zy}$ dal valore di $S_x^*$, troviamo ora i valori che assumono nei punti a, b e c.

"a" : $y = -\frac{H}{2}$ ; $S_x^* = 0$

Quindi
$$\begin{cases} \sigma_z^a = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x}\frac{H}{2} = \frac{N}{BH} - \frac{6 M_x}{BH^2} = -0.116 \text{ MPa} \\ \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$

che possiamo rappresentare sul piano $\sigma_n, \tau_n$



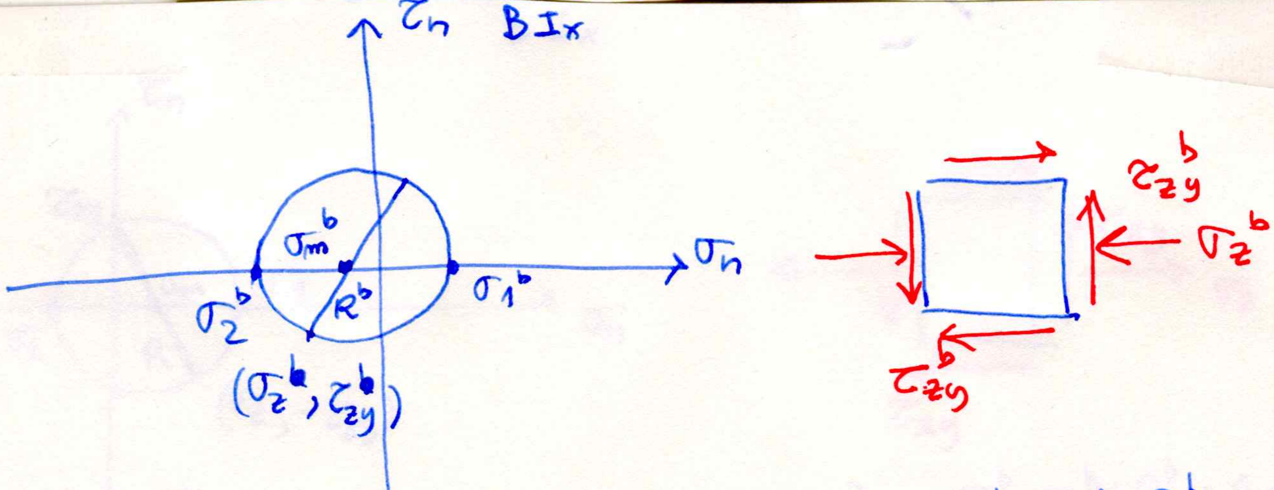

$\sigma_m^a = \frac{1}{2}\sigma_z^a = -0.058 \text{ MPa}$ ; $R^a = \tau_{max}^a = \left|\frac{\sigma_z^a}{2}\right| = 0.058 \text{ MPa}$

$\sigma_1^a = 0$ , $\sigma_2^a = -0.116 \text{ MPa}$

$\sigma_1^a = \sigma_m^a + R$ $\quad \sigma_2^a = \sigma_m^a - R$

"b" : $y = 0$ ; $S_x^* = \frac{BH^2}{8} = 500\,000 \text{ mm}^3$

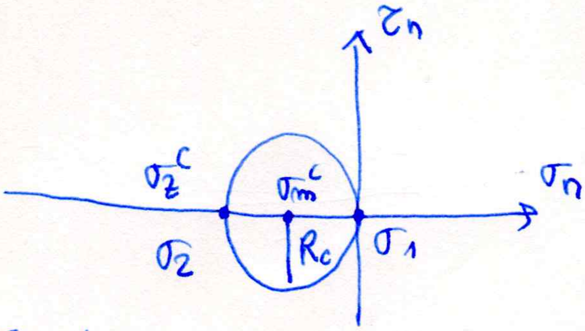
quindi
$$\begin{cases} \sigma_z^b = \frac{N}{A} = -1.691 \text{ MPa} \\ \tau_{zx}^b = 0 \\ \tau_{zy}^b = \frac{T_y S_x^*}{B I_x} = 0.286 \text{ MPa} \end{cases}$$

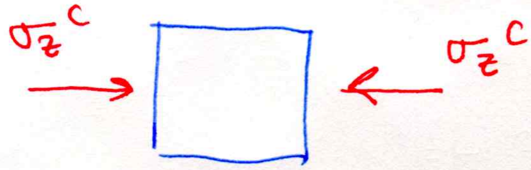



$$\left.\begin{aligned} \sigma_m^b &= \frac{1}{2}\sigma_z^b = -0.845 \text{ MPa} \\ R^b &= \tau_{max}^b = \sqrt{(\sigma_z^b - \sigma_m^b)^2 + \tau_{zy}^{b\,2}} = 0.893 \text{ MPa} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_1^b &= \sigma_m^b + R^b = 0.047 \text{ MPa} \\ \sigma_2^b &= \sigma_m^b - R^b = -1.738 \text{ MPa} \end{aligned}$$

"C" : $y = +\frac{H}{2}$ ; $S_x^* = 0$

$$\begin{cases} \sigma_z^C = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}\left(\frac{H}{2}\right) = -1.706 \text{ MPa} \\ \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$




$\sigma_m^C = \frac{1}{2}\sigma_z^C = -0.853 \text{ MPa}$

$R^C = \tau^C_{max} = \left|\frac{\sigma_z^C}{2}\right| = 0.853 \text{ MPa}$

$\sigma_1^C = \sigma_m^C + R^C = 0$

$\sigma_2^C = \sigma_m^C - R^C = -1.706 \text{ MPa}$