Università degli Studi di Trento – Facoltà di Ingegneria

CORSO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2A

A.A. 2002-03

Primo compito scritto in aula del 23.05.2003

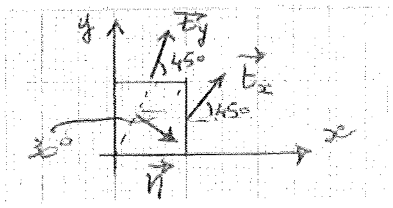
Testo 1.

Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n.1 (6 punti)

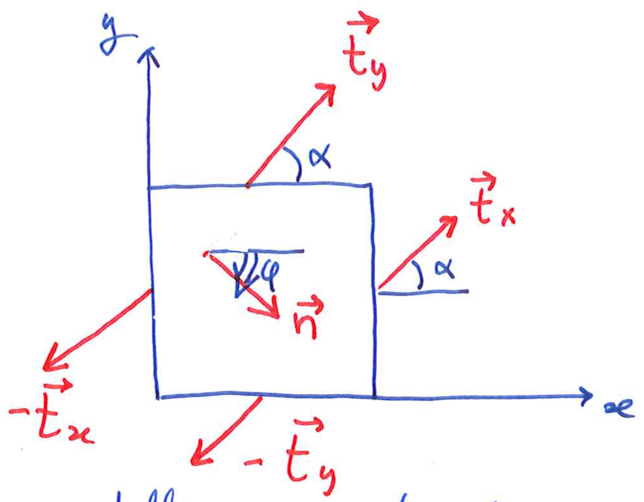
Un elemento di materiale è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente, con $|t_x| = |t_y| =$ 12 MPa ed entrambi inclinati di un angolo di 45° rispetto all'asse x come indicato.
Si chiede di costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}, nonché le componenti di sforzo σ_n, τ_n agenti su un piano la cui normale n forma un angolo $\varphi = -30°$ (cioè pari a 30° *in senso orario*) con l'asse x



σ_1 = ...; σ_2 = ...; τ_{max} = ...
σ_n = ...; τ_n = ...;

cerchio di Mohr:

ESERCIZIO 1 (23/05/03): CERCHIO DI MOHR



Nel caso considerato si ha che

$|\vec{t}_x| = |\vec{t}_y| = 12$ MPa

$\alpha = 45°$ e $\varphi = 30°$

Si richiede di calcolare il valore degli sforzi principali σ_1 e σ_2, delle massime tensioni tangenziale τ_{MAX} e delle componenti dello sforzo σ_n e τ_n su un piano di normale $\vec{n}$.

Innanzitutto possiamo dedurre i valori di σ_x, σ_y e τ_{xy}

$$\sigma_x = |\vec{t}_x| \cos\alpha = 12 \text{ MPa} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ MPa}$$

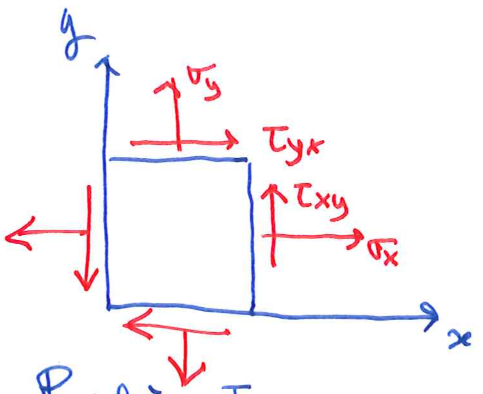
$$\sigma_y = |\vec{t}_y| \sin\alpha = 6\sqrt{2} \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = |\vec{t}_x| \sin\alpha = 6\sqrt{2} \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} = |\vec{t}_y| \cos\alpha = 6\sqrt{2} \text{ MPa}$$

Quindi il tensore degli sforzi è

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Gli invarianti sono

$$I_1 = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y = 36 \cdot 2 - 36 \cdot 2 = 0$$

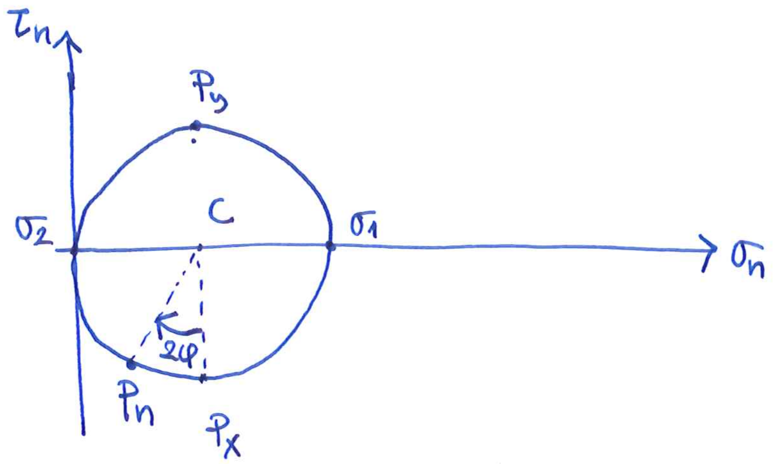
$$I_3 = 36 \cdot 2 - 36 \cdot 2 = 0$$

Poiché $I_2 = 0$ e $I_3 = 0$ allora lo stato di sforzo è monoassiale.

Per disegnare il cerchio di Mohr, indichiamo sul piano σ_n, τ_n i punti P_x e P_y

$$P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy}) = (6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad P_y = (\sigma_y, \tau_{yx}) = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$$

Si ha che



Dove è immediato vedere che il centro del cerchio di Mohr è

$$C = (6\sqrt{2}, 0)$$

e il suo raggio è $R = 6\sqrt{2}$ quindi anche

$$C = (R, 0)$$

Per cui si ottiene che

$$\sigma_1 = R + R = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = R - R = 0 \text{ MPa}$$

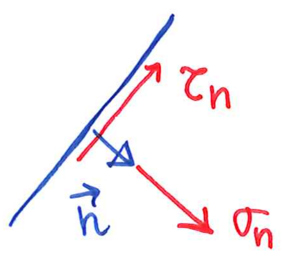
$$\tau_{max} = R = 6\sqrt{2} \text{ MPa}$$

Su una faccia la cui normale $\vec{n}$ forma un angolo $\varphi = -30°$ con l'asse x lo stato di sforzo è dato da

$$\sigma_n = \sigma_x - R \sin 2\varphi = \sigma_x - R \sin 60°$$

$$= 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ MPa}$$

$$\tau_n = -R \cos 2\varphi = -6\sqrt{2} \cos 60° = \frac{-6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2} \text{ MPa}$$



Esercizio n.2 (8 punti)

In un punto P lo stato di sforzo è definito dalle componenti (tutte espresse in Mpa):
$\sigma_x = .25$, $\sigma_y = +20$, $\sigma_z = -10$, $\tau_{xy} = +5$, $\tau_{xz} = -10$, $\tau_{yz} = -15$.
Si richiede di determinare:

1. le componenti t_{nx}, t_{ny}, t_{nz} del vettore tensione agente su una superficie di normale $\boldsymbol{n}$ individuata dai coseni direttori $\alpha_x = +1/2$, $\alpha_y = +1/\sqrt{2}$, $\alpha_z =$ positivo;
2. Il modulo, $|\boldsymbol{t}_n|$ del vettore $\boldsymbol{t}_n$ e il valore della sua componente normale σ_n e della componente tangenziale *totale* τ_n;
3. Il coseno δ dell'angolo che il vettore $\boldsymbol{t}_n$ forma con la normale $\boldsymbol{n}$;
4. I coseni direttori β_x, β_y, β_z degli angoli che il vettore $\boldsymbol{t}_n$ forma con gli assi coordinati

t_{nx} = ...; t_{ny} = ...; t_{nz} = ...

$|\boldsymbol{t}_n|$ = ...; σ_n = ...; τ_n = ...;

δ = ...; β_x = ...; β_y = ...; β_z = ...

Esercizio n.3 (6 punti)

Il campo di spostamento al quale è soggetto un corpo deformabile è definito da queste componenti:
$u = k(.4.x + y^2)$; $v = k(x^2 - 3.y^2)$; $w = 0$; $k = 10^{-4}$.
Determinare:

1. la lunghezza a deformazione avvenuta l_x, l_y dei lati di un elementino infinitesimo spiccato dal punto P di coordinate(2,1,0) inizialmente orientati secondo gli assi x e y e di lunghezza iniziale rispettivamente pari a L_x, L_y, nonché il *coseno* dell'angolo δ che essi formano a deformazione avvenuta;
2. determinare la nuova posizione del punto P, P';
3. determinare la componente ω_z della rotazione rigida rispetto al punto P.

l_x = ...; l_y = ...; cos δ = ...

P' = (.................,.................................,.................); ω_z = ...

ESERCIZIO 3 (23/05/03) : DEFORMAZIONE

Il campo di spostamento a cui è soggetto un corpo deformabile è definito da

$$u = k(4x + y^2) \; ; \; v = k(x^2 - 3y^2) \; ; \; w = 0 \; ; \; k = 10^{-4}$$

i. determinare le lunghezze dopo la deformazione l_x e l_y dei lati di un elementino infinitesimo spiccato dal punto $P(2,1,0)$ e il coseno dell'angolo δ a deformazione avvenuta.

Per prima cosa calcoliamo i tensori $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\omega}}$, ricordando che

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T) \qquad e \qquad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4k \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ky \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2kx \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -6ky \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

quindi

$$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 4k & 2ky & 0 \\ 2kx & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \underline{\underline{e}}^T = \begin{pmatrix} 4k & 2kx & 0 \\ 2ky & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4k & 2ky & 0 \\ 2kx & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4k & 2kx & 0 \\ 2ky & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4k & k(x+y) & 0 \\ k(x+y) & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4k & 2ky & 0 \\ 2kx & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4k & 2kx & 0 \\ 2ky & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -k(x-y) & 0 \\ k(x-y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel punto $P(2,1,0)$ le componenti di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\omega}}$ valgono

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_P = k\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\omega}}_P = k\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per cui si ottiene che

$$l_x = L_x(1+\varepsilon_x) = L_x(1+4k)$$

$$l_y = L_y(1+\varepsilon_y) = L_y(1-6k)$$

$$\cos\delta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{xy}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6k\right) = \sin 6k$$

poiché $\quad 6k \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin 6k \simeq 6k \quad \Rightarrow \quad \cos\delta \simeq 6k$

ii. determinare le nuove posizioni di P, P'.

Le componenti di spostamento di P sono

$$u_P = k(4\cdot 2+1) = 9k$$

$$v_P = k(2^2 - 3\cdot 1) = k$$

$$w_P = 0$$

per cui

$$P' = (2+u_P,\ 1+v_P,\ 0+w_P) = (2+9k,\ 1+k,\ 0)$$

iii. determinare la componente ω_z della rotazione rigida intorno a P

Si ricava facilmente che

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

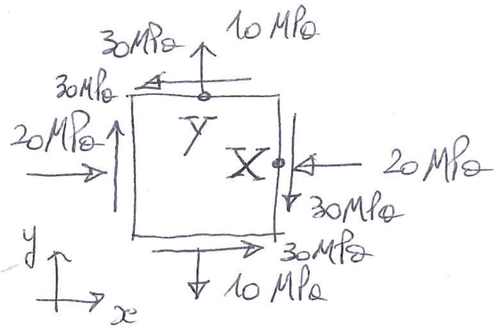
$$= \frac{1}{2} \cdot 2k(x-y) = k(x-y)$$

$$\omega_{zP} = k(2-1) = k$$

Esercizio n. 3 (4 punti)

Determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, la massima tensione tangenziale, τ_{max}, e l'angolo φ formato dall'asse x con la prima direzione principale (cioè quella secondo la quale agisce lo sforzo principale massimo), nonché il cerchio di Mohr per lo stato di sforzo piano avente componenti speciali di tensione di valori rispettivamente pari a σ_x = -20 MPa, σ_y = +10 MPa, τ_{xy} = -30 MPa.

Componenti di tensione applicati all'elementino infinitesimo:



Tensore degli sforzi:

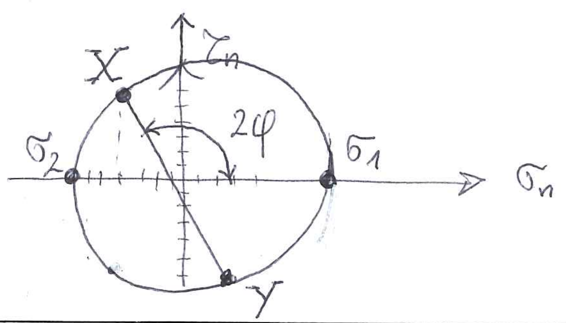
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -20 & -30 & 0 \\ -30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coordinate dei punti X e Y nel piano di Mohr sono rispettivamente: $X = (-20, +30)$; $Y = (+10, -30)$

σ_1 = $\begin{cases} -5+15\sqrt{5} \\ 28.541 \end{cases}$ MPa; σ_2 = $\begin{cases} -5-15\sqrt{5} \\ -38.541 \end{cases}$ MPa; τ_{max} = $\begin{cases} 15\sqrt{5} \\ 33.541 \end{cases}$ MPa.

φ = 58.283 °;

cerchio di Mohr:

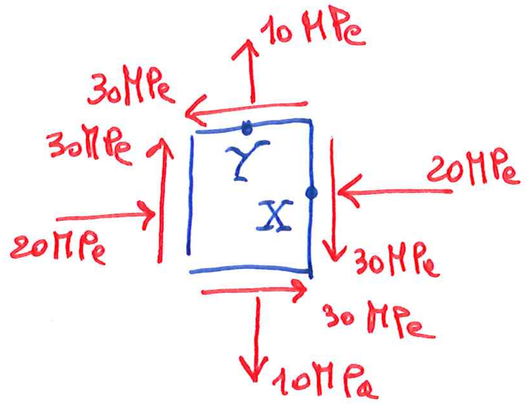


ESERCIZIO 3 (22/02/11) : CERCHIO DI MOHR

Consideriamo lo stato di sforzo piano definito da

$$\sigma_x = -20\,MPa \,, \quad \sigma_y = 10\,MPa \,, \quad \tau_{xy} = -30\,MPa$$

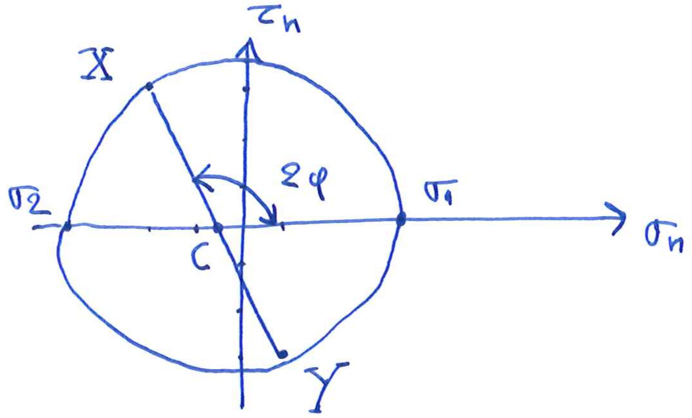
Esso può essere rappresentato graficamente su un elementino, mentre il tensore degli sforzi risulta essere



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -20 & -30 & 0 \\ -30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (-20 ; 30) \quad ; \quad Y = (10 ; -30)$$

I punti X e Y possono essere disegnati sul piano σ_n, τ_n per disegnare il cerchio di Mohr



Dove il centro è dato da

$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \,, 0 \right) = \left(\frac{-20+10}{2} \,, 0 \right) = (-5 \,, 0)$$

Mentre il raggio è dato da

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20-10}{2}\right)^2 + 30^2} = \sqrt{15^2 + 30^2}$$

$$= \sqrt{15^2(1+4)} = 15\sqrt{5}$$

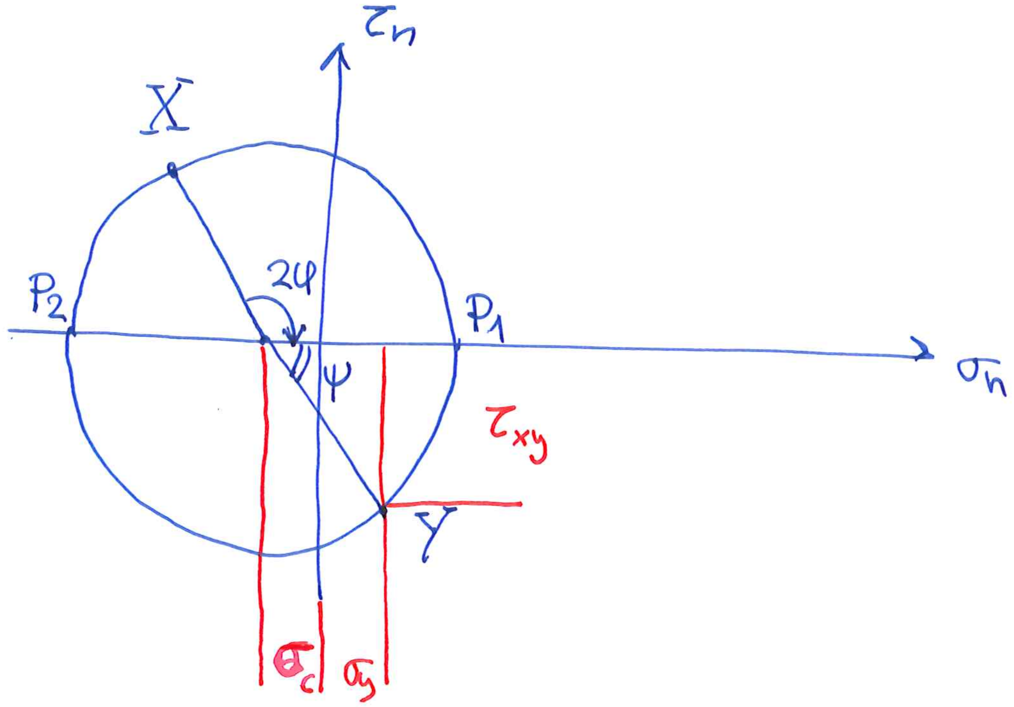
Le tensioni principali σ_1 e σ_2 sono date da

$$\sigma_1 = \sigma_c + R = -5 + 15\sqrt{5} \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - R = -5 - 15\sqrt{5} \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = R = 15\sqrt{5} \text{ MPa}$$

Per ottenere l'angolo φ ricorriamo a considerazioni di carattere geometrico



Consideriamo che

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \tau_{xy} = -30 \\ \cos\psi &= \sigma_y - \sigma_c = 10 + 5 = 15 \end{aligned}\right\} \operatorname{tg}\psi = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_c} = -\frac{30}{15} = -2$$

Quindi $\psi = \operatorname{tg}^{-1}(-2) = -63{,}43°$

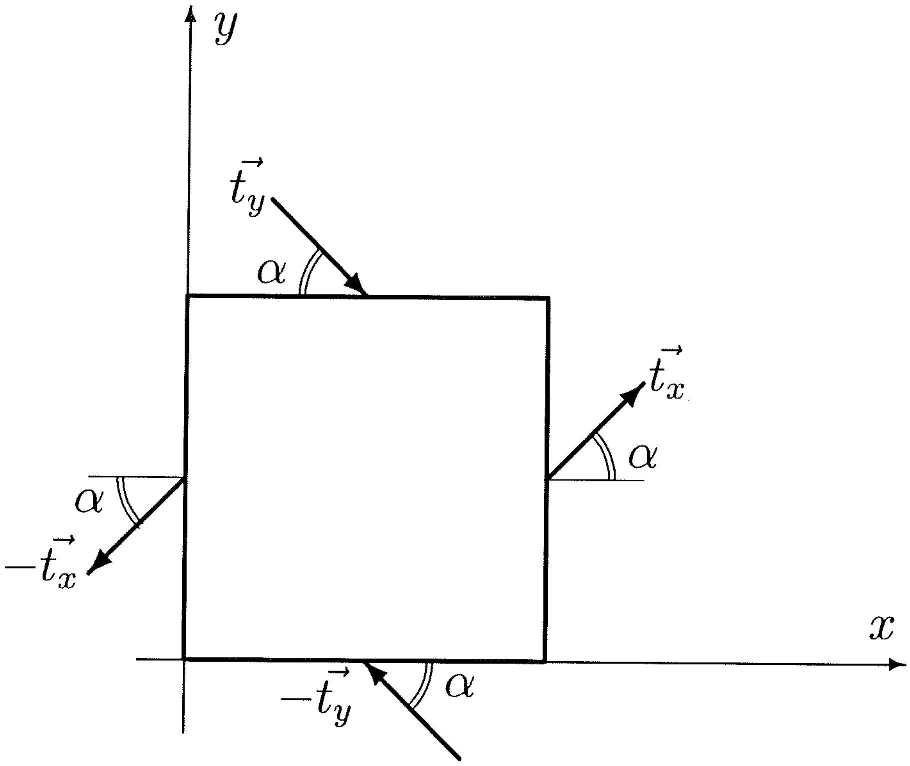
Dunque, è chiaro dal disegno che

$$2\varphi = 180° - |\psi| = 180° - 63{,}43° = 116{,}57°$$

e $\varphi = 58{,}29°$ ↻

Esercizio n. 3 (9 punti)

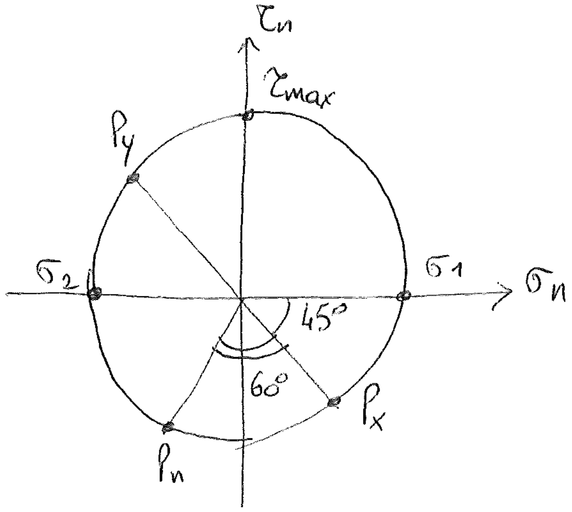
Un elemento di materiale è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente, con $|\boldsymbol{t}_x| = |\boldsymbol{t}_y| = 48\sqrt{2}$ MPa ed entrambi inclinati, come indicato in Figura, di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto all'orizzontale.
Si chiede di costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}, nonché le componenti di sforzo σ_n, τ_n agenti su un piano la cui normale $\boldsymbol{n}$ forma un angolo $\varphi = -30°$ (cioè pari a 30° *in senso orario*) con l'asse x.



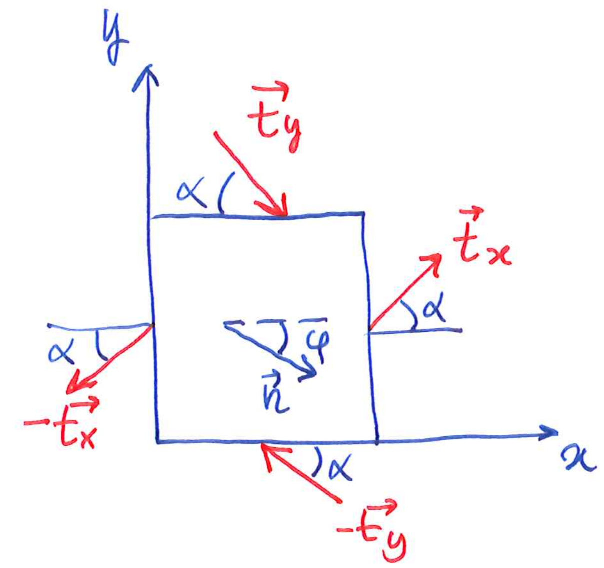
σ_1 = ...67.882...... (MPa); σ_2 = ...-67.882...... (MPa); τ_{max} = ...67.882...... (MPa);

σ_n = ...-17.569..... (MPa); $|\tau_n|$ = ...65.569........ (MPa);

cerchio di Mohr:



ESERCIZIO 3 (12/02/13) : CERCHIO DI MOHR



Nel caso considerato si ha che

$$|\vec{t}_x| = |\vec{t}_y| = 48\sqrt{2}\ \text{MPa}$$

$$\alpha = 45^\circ \qquad \varphi = -30^\circ$$

Si richiede di calcolare il valore degli sforzi principali σ_1 e σ_2, della massima tensione tangenziale τ_{MAX} e delle componenti di sforzo σ_n e τ_n su un piano di normale $\vec{n}$.

E' immediato verificare che

$$\sigma_x = \cancel{48}\ |\vec{t}_x| \cos\alpha = 48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48\ \text{MPa}$$

$$\sigma_y = -|\vec{t}_y| \sin\alpha = -48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -48\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = |\vec{t}_x| \sin\alpha = 48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48\ \text{MPa}$$

$$\tau_{yx} = |\vec{t}_y| \cos\alpha = 48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48\ \text{MPa}$$

Quindi

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 0 \\ 48 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli invarianti sono

$$I_1 = 48 - 48 = 0$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y = 48^2 + 48^2 = 4608$$

$$I_3 = -48^2 - 48^2 = -4608$$

$$P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy}) = (48, -48)$$

$$P_y = (\sigma_y, \tau_{yx}) = (-48, 48)$$

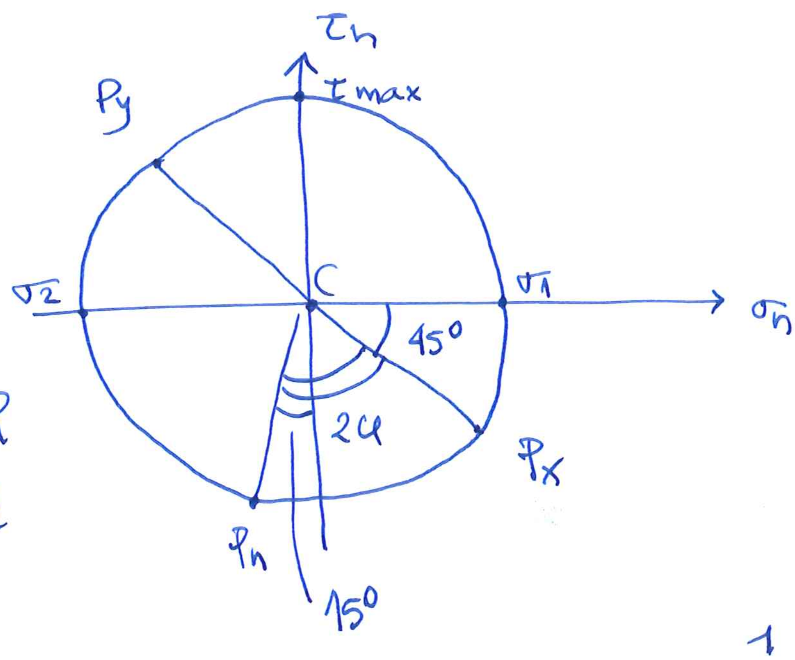
$$C = (0, 0)$$

$$R = \sqrt{48^2 + 48^2} = 67{,}882$$

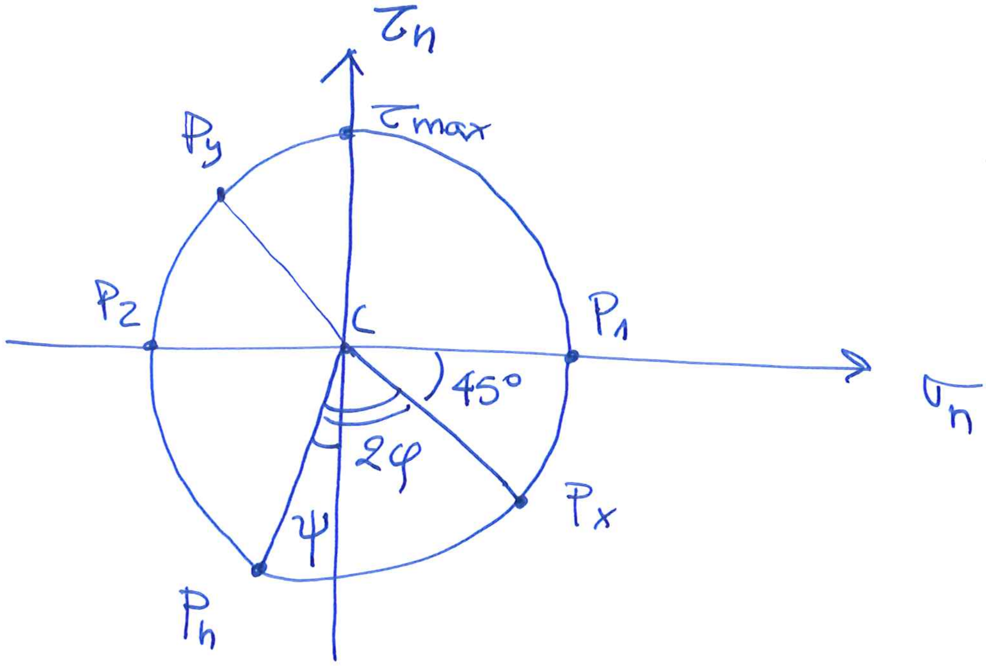
$$\sigma_1 = +R \qquad \sigma_2 = -R \qquad \tau_{max} = R$$

$$\sigma_n = -R \sin 15^\circ = -17.569\ \text{MPa}$$

$$\tau_n = -R \cos 15^\circ = -65.569\ \text{MPa}$$



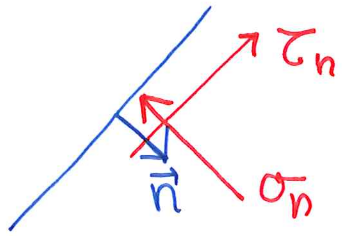
NOTA: Si noti che per calcolare le componenti di sforzo σ_n e τ_n su un piano di normale $\vec{n}$ risulta semplice riferirsi alle direzioni in cui la tensione tangenziale è massima. Quindi:



del momento che $2\varphi = 60°$ allora

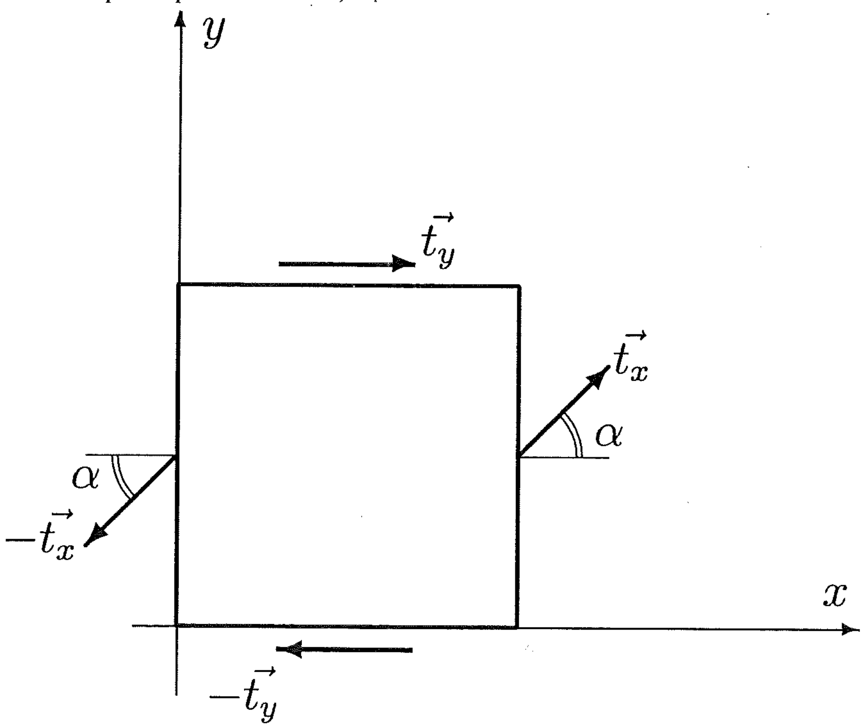
$$\psi = 2\varphi + 45° - 90°$$
$$= 60° + 45° - 90° = 15°$$

Infine, possiamo visualizzare σ_n e τ_n sull'elemento inclinato a normale $\vec{n}$



Esercizio n. 3 (9 punti)

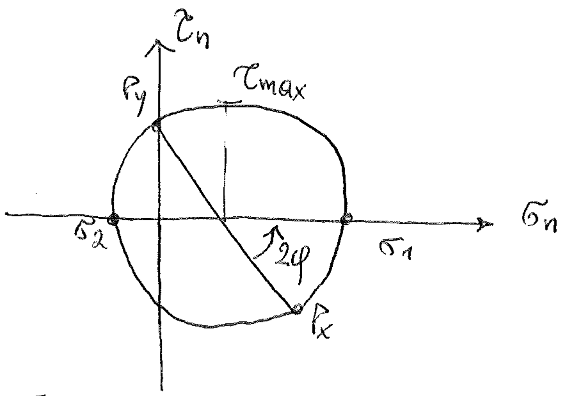
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente; di questi $\boldsymbol{t}_x$ è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 45°$ e ha modulo di valore $|\boldsymbol{t}_x| = 75\sqrt{2}$ MPa. L'altro vettore sforzo, $\boldsymbol{t}_y$, è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.



σ_x = 75.0000 (MPa); σ_y = 0.0000 (MPa); τ_{xy} = 75.0000 (MPa);

σ_1 = 121.3525 (MPa); σ_2 = -46.3525 (MPa); τ_{max} = 83.8525 (MPa);

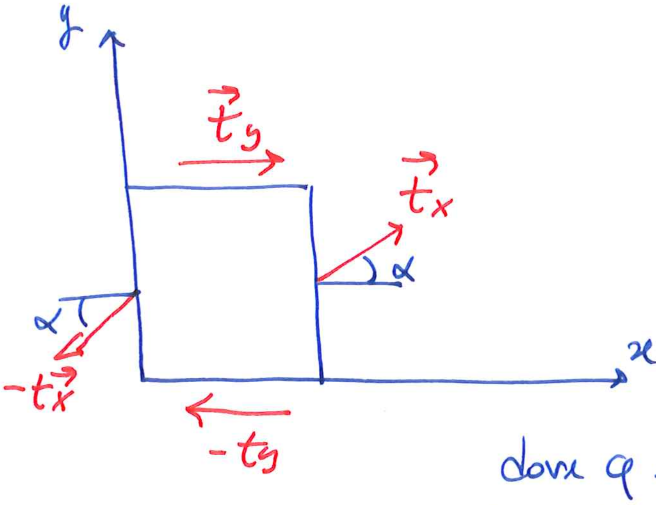
cerchio di Mohr:



$P_x = (75.0000, -75.0000)$
$P_y = (0.0000, +75.0000)$

φ = 31°.7175 (°);

ESERCIZIO 3 (9/01/18) : CERCHIO DI MOHR



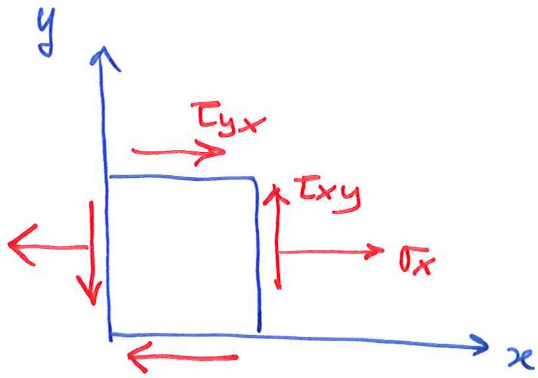
Nel caso considerato si ha
$$|\vec{t}_x| = 75\sqrt{2}\ \text{MPa}$$
e $\alpha = 45°$

Si richiede di determinare i valori di
σ_x, σ_y, τ_{xy}, σ_1, σ_2, τ_{MAX} e φ.

dove φ è l'angolo formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia su cui agisce σ_1.

È facile vedere che

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= |\vec{t}_x| \cos\alpha = 75\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 75\ \text{MPa} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= |\vec{t}_x| \sin\alpha = 75\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 75\ \text{MPa} \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} = 75\ \text{MPa} \end{aligned}\right\}\quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 75 & 75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy}) = (75, -75)$$

$$P_y = (0, \tau_{yx}) = (0, 75)$$

$$C = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right) = (37{,}5, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \sqrt{37{,}5^2+75^2} = 83{,}85$$

$$\sigma_1 = \sigma_c + R = 37{,}5 + 83{,}85 = 121{,}35\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - R = 37{,}5 - 83{,}85 = -46{,}35\ \text{MPa}$$

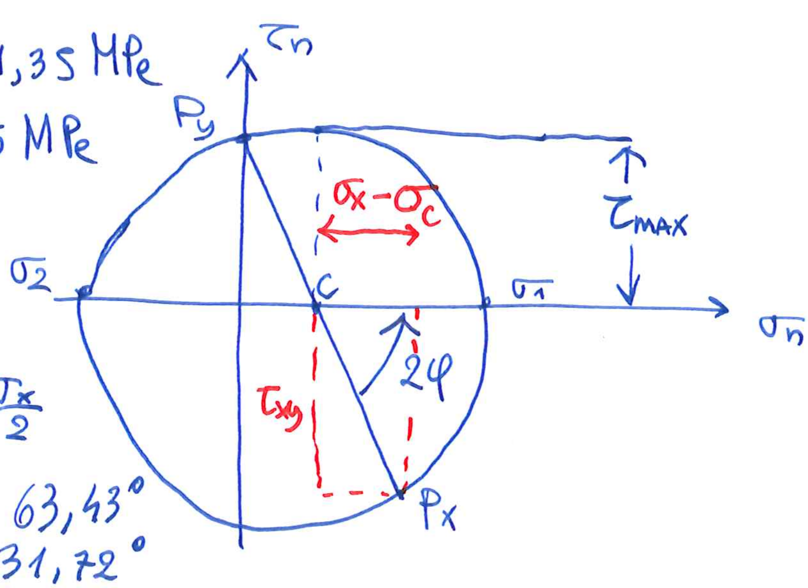
$$\tau_{MAX} = R$$

$$\sin 2\varphi = \tau_{xy}$$

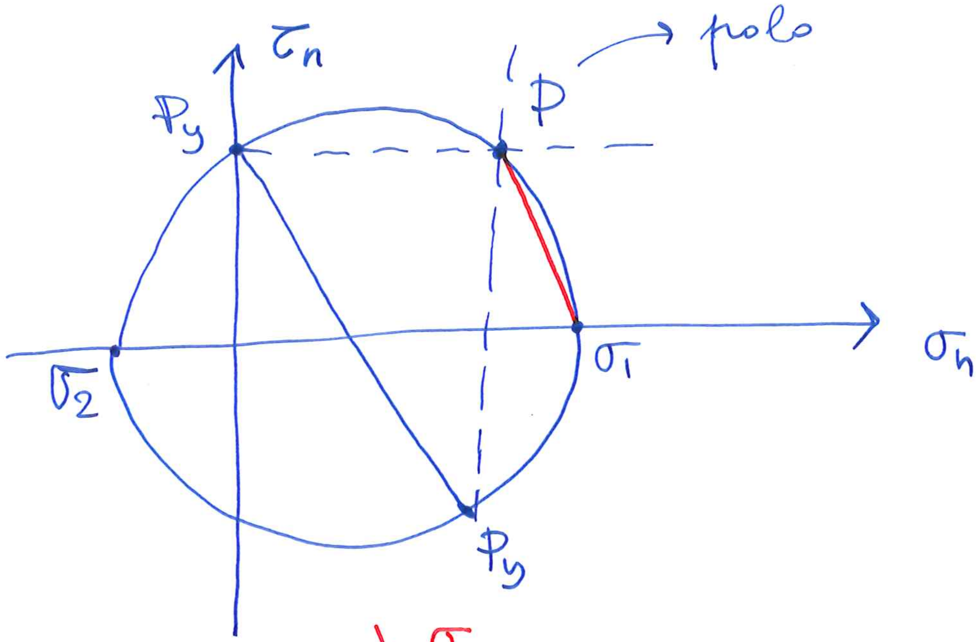
$$\cos 2\varphi = \sigma_x - \sigma_c = \sigma_x - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2}$$

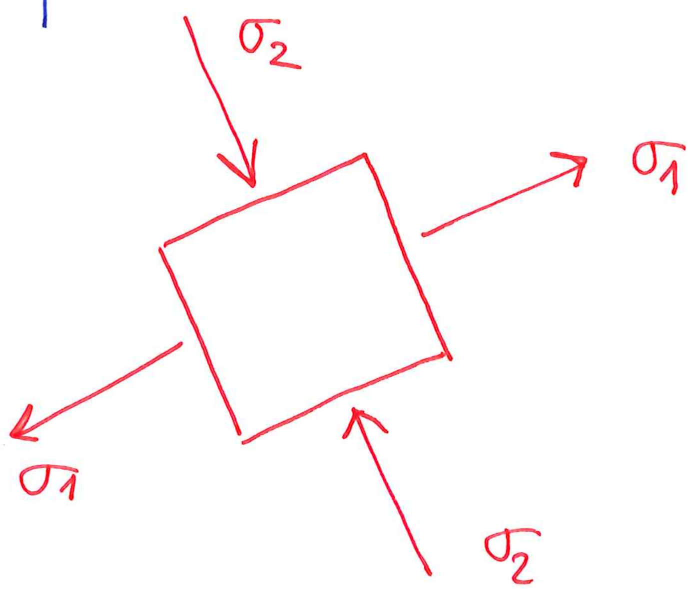
$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = 2 \Rightarrow 2\varphi = 63{,}43°$$

$$\varphi = 31{,}72°$$



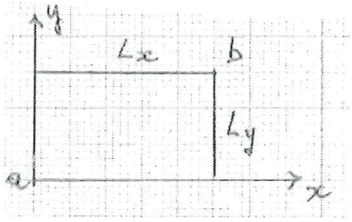
Disegnando il polo del cerchio di Mohr possiamo ricavare le direzione delle normale alle superficie su cui agisce σ_1:





Esercizio n.4 (4 punti)

Una piastrina rettangolare di dimensioni L_x = .5. cm, L_y = ..6..cm risulta soggetta a deformazioni uniformi di componenti:
$\varepsilon_x = 0.0025$; $\varepsilon_y = 0.0050$; $\varepsilon_z = 0$, $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = 0.0009375$; $\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0$.
Determinare la variazione di lunghezza della diagonale ab, ΔL_{ab}.



ΔL_{ab} = ...

Esercizio n.5 (6 punti)

Determinare la pendenza, m, della curva σ_x - ε_x in ambito elastico lineare per un materiale che viene sottoposto a prova nelle seguenti condizioni di sollecitazione:
σ_x = ..-2. σ_y = ...3.σ_z; $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.
Determinare poi, se è noto che $\nu = 1/3$ per quale coefficiente k occorre moltiplicare la pendenza per ottenere il valore del modulo di Young, E.

m = ...;

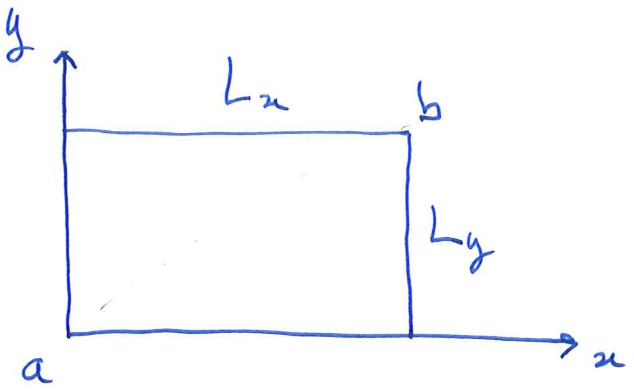
k = ...

Esercizio n.6 (bonus, 3 punti)

Un cubo di spigolo pari a 100 mm costituito di un materiale caratterizzato dalle costanti elastiche E = 30000 MPa, G = ..15000.MPa è soggetto a uno stato di sforzo idrostatico completamente individuato dalla componente p = -10 MPa.
Valutare la variazione di volume (rapportata al volume iniziale) che il cubo subisce per effetto della deformazione.

$(V'-V)/V$ = ...

ESERCIZIO 4 : DEFORMAZIONE



Consideriamo la piastrina rettangolare in figura, le cui dimensioni valgono

$$L_x = 5\,cm \quad e \quad L_y = 6\,cm$$

Tale piastrina è soggetta a deformazioni uniformi di componenti

$$\varepsilon_x = 0.0025\,, \quad \varepsilon_y = 0.0050\,, \quad \varepsilon_z = 0\,, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = 0.0009375$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0$$

Si richiede di determinare la variazione della lunghezza della diagonale ab, ΔL_{ab}.

Per prima cosa si consideri che

$$\Delta L_{ab} = L_{ab} \cdot \varepsilon_a$$

dove ε_a è la deformazione nella direzione ab (quindi è una dilatazione). Dobbiamo, dunque, determinare ε_a.

Si ricordi che possiamo esprimere ε_a in termini delle componenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ mediante i coseni direttori degli angoli che la direzione ab forma con gli assi x, y, z. Quindi

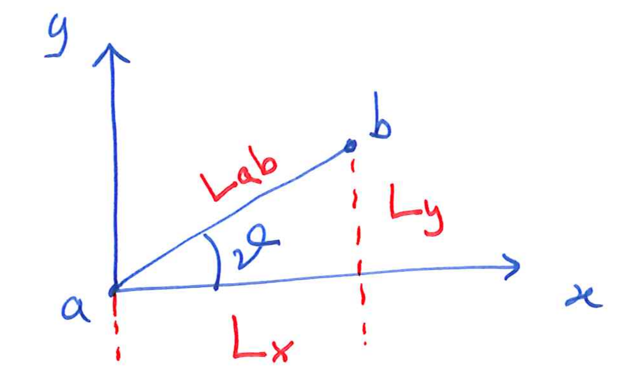
$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \varepsilon_z \alpha_z^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{xz}\alpha_x\alpha_z + \gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z$$

che, considerando i dati del problema, si semplifica in

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y$$

Per ottenere ε_a, quindi, è necessario conoscere α_x e α_y.

Ricaviamo α_x e α_y con considerazioni di carattere geometrico



$$L_{ab} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{25\,cm^2 + 36\,cm^2} = 7.81\,cm$$

$$\alpha_x = \cos\vartheta = \frac{L_x}{L_{ab}} = \frac{L_x}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}$$

$$\alpha_y = \sin\vartheta = \frac{L_y}{L_{ab}} = \frac{L_y}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}$$

Quindi

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \left(\frac{L_x}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}\right)^2 + \varepsilon_y \left(\frac{L_y}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right) \frac{L_x L_y}{\left(\sqrt{L_x^2 + L_y^2}\right)^2}$$

Per cui

$$\Delta L_{ab} = L_{ab} \cdot \varepsilon_a$$

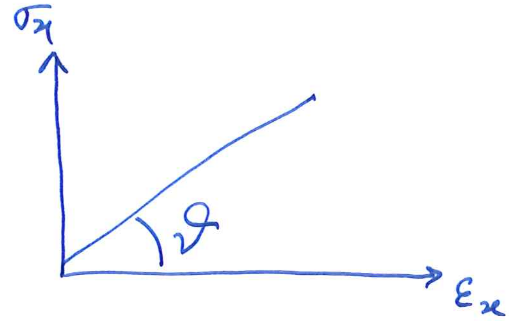
$$= \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot \left[\varepsilon_x \left(\frac{L_x}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}\right)^2 + \varepsilon_y \left(\frac{L_y}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right) \frac{L_x L_y}{\left(\sqrt{L_x^2 + L_y^2}\right)^2}\right]$$

$$= \left[\varepsilon_x L_x^2 + \varepsilon_y L_y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right) L_x L_y\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}$$

$$= \frac{0.0025 \cdot 25\,cm^2 + 0.0050 \cdot 36\,cm^2 + 2 \cdot 0.0009375 \cdot 30\,cm^2}{7.810\,cm}$$

$$= 0.03825\,cm$$

ESERCIZIO 5: COMPORTAMENTO DEI MATERIALI



Si consideri la curva $\sigma_x - \varepsilon_x$ in figura: se ne vuole determinare la pendenza m sapendo che il materiale in questione è sottoposto alla sollecitazione: $\sigma_x = -2\sigma_y = 3\sigma_z$; $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$.

Quindi, si ha che

$$\sigma_x = -2\sigma_y \qquad e \qquad \sigma_x = 3\sigma_z$$

per cui

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_x}{2} \qquad e \qquad \sigma_z = \frac{\sigma_x}{3}$$

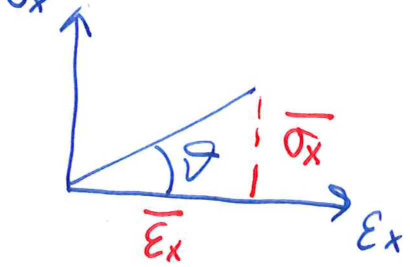
Quindi

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_x\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma_x}{E}\left(1 + \frac{\nu}{6}\right) \implies \sigma_x = \frac{E\varepsilon_x}{1 + \frac{\nu}{6}}$$

Ora si consideri che la pendenza $m = tg\,\vartheta$ è data da



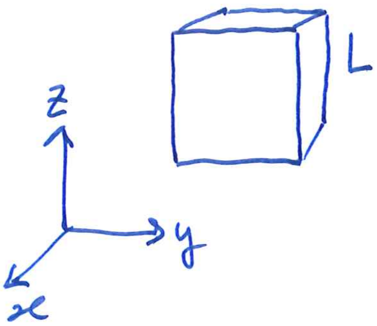
$$m = \frac{\overline{\sigma_x}}{\overline{\varepsilon_x}} = \frac{E}{1 + \frac{\nu}{6}}$$

Quindi $E = mk \implies k = \frac{E}{m}$

$$k = 1 + \frac{\nu}{6} \qquad se \ \nu = \frac{1}{3} \qquad allora$$

$$k = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{18} = \frac{19}{18}$$

ESERCIZIO 6: VARIAZIONE DI VOLUME



Si consideri un cubo di spigolo $L = 100\ mm$ costituito da un ~~pe~~ materiale caratterizzato da

$$E = 30000\ MPa \quad e \quad G = 15000\ MPa$$

Il cubo è soggetto a uno sforzo idrostatico individuato dalla componente $p = -10\ MPa$

Vogliamo valutare la variazione di volume relativa.

Il tensore degli sforzi si scrive

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

Quindi

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[p - \nu(2p)\right] = \frac{p}{E}(1-2\nu)$$

$$\varepsilon_y = \frac{p}{E}(1-2\nu)$$

$$\varepsilon_z = \frac{p}{E}(1-2\nu)$$

Il volume in seguito alla deformazione sarà

$$V' = L^3\left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\right]$$

$$= L^3\left[1 + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z)\right]$$

trascuriamo i termini di ordine superiore (seconda parentesi) e otteniamo

$$V' = L^3(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$V' - V = L^3(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - L^3 = L^3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Quindi

$$\frac{V'-V}{V} = \frac{L^3(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)}{L^3} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$= 3\frac{P}{E}(1-2\nu)$$

Si noti che $\frac{\Delta V}{V}$ non dipende da L!

Poiché tra i dati del problema non abbiamo ν ma E e G, allora conviene sfruttare la definizione del modulo di taglio

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow 1+\nu = \frac{E}{2G} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1$$

per i valori di E e G:

$$\nu = \frac{30000\ \text{MPa}}{2\cdot 15000\ \text{MPa}} - 1 = 0$$

Quindi

$$\frac{V'-V}{V} = \frac{3P}{E} = \frac{3\cdot(-10\ \text{MPa})}{30000\ \text{MPa}} = \frac{-1}{1000} = -0.001$$