M_A ( ) = $+2qb^2$; C_1 = (0, 0); C_2 = ($2b$, 0); C_{12} = (∞, 0);

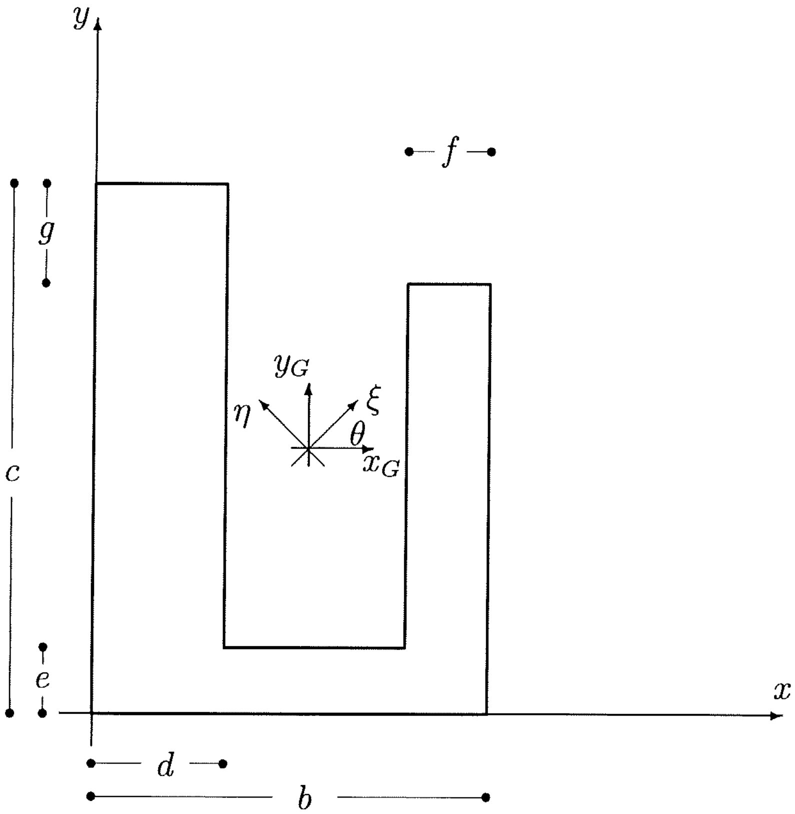
v_D = $2b\delta\varphi_1$ = $2b\delta\varphi_2$; v_B^1 = $b\delta\varphi_1$;

M_C ( ) = $-4qb^2$; v_D = $2b\delta\varphi_3$; v_B^2 = 0;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (*Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 10a$; $c = 14a$; $d = 6a$; $f = g = 4a$; si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



S_x = $788a^3$; S_y = $572a^3$;

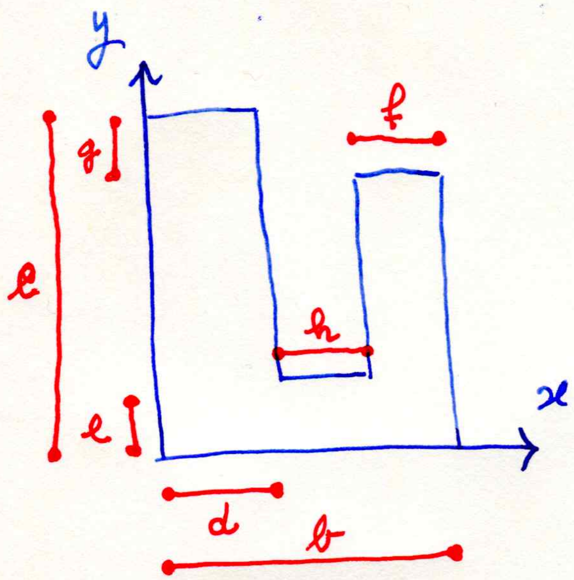
x_G = $\frac{143}{31}a = 4.61290\,a$; y_G = $\frac{197}{31}a = 6.35484\,a$;

J_{xG} = $\frac{168676}{93}a^4 = 1813.720430\,a^4$; J_{yG} = $\frac{91396}{93}a^4 = 982.752688\,a^4$;

J_{xGyG} = $-\frac{8400}{31}a^4 = -270.967742\,a^4$; tan 2θ = $\frac{15}{23} = 0.652174$ $(\theta = 16.5557^\circ)$;

$J_\xi = J_{\max}$ = $1894.271199\,a^4$; $J_\eta = J_{\min}$ = $902.201919\,a^4$;

ESERCIZIO 3 (31/01/12)



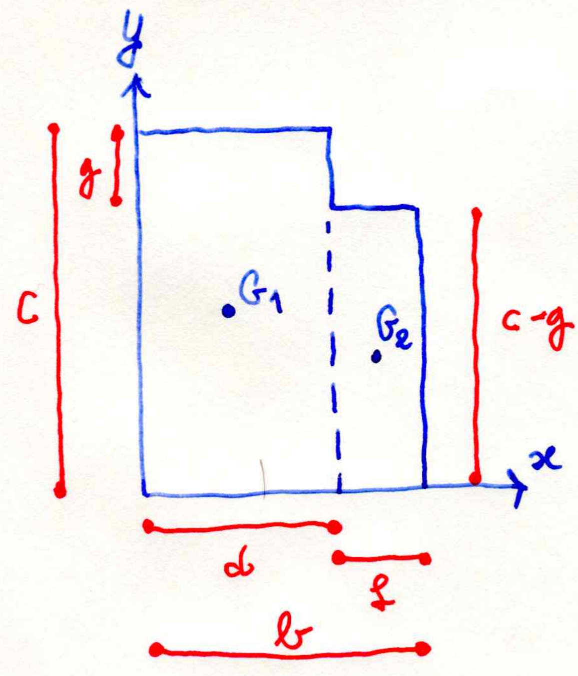
Notiamo subito che se introduciamo le dimensioni in termini del parametro a

$b = 10a$; $c = 14a$; $d = 6a$; $f = g = 4a$

si ottiene immediatamente che

$$h = b - (d+f) = 10a - (6a+4a) = 0$$

Quindi possiamo ridisegnare la lamina come segue.



Possiamo studiare la lamina come composta da due lamine di area A_1 e A_2, per cui si avrà che

$$A = A_1 + A_2$$

Le aree si calcolano facilmente

$$A_1 = c \cdot d = 14a \cdot 6a = 84a^2$$

$$A_2 = (c-g) \cdot f = 10a \cdot 4a = 40a^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 84a^2 + 40a^2 = 124a^2$$

Inoltre, le coordinate dei baricentri G_1 e G_2 si ottengono facilmente con ragionamenti di carattere geometrico:

$$G_1 = \left(\frac{d}{2} ; \frac{c}{2}\right) = (3a ; 7a) \quad e \quad G_2 = \left(d + \frac{f}{2} ; \frac{c-g}{2}\right) = (8a ; 5a)$$

Seguono tutte le altre quantità (momenti statici, momenti d'inerzia, coordinate del baricentro, momenti centrali d'inerzia ...)

$$\left.\begin{aligned} S_{x_1} &= A_1 y_{G_1} = 84a^2 \cdot 7a = 588a^3 \\ S_{x_2} &= A_2 y_{G_2} = 40a^2 \cdot 5a = 200a^3 \end{aligned}\right\} S_x = S_{x_1} + S_{x_2} = 588a^3 + 200a^3 = 788a^3$$

$$S_{y_1} = A_1 \cdot x_{G_1} = 84a^2 \cdot 3a = 252a^3$$
$$S_{y_2} = A_2 \cdot x_{G_2} = 40a^2 \cdot 8a = 320a^3$$
$$S_y = S_{y_1} + S_{y_2} = 252a^3 + 320a^3 = 572a^3$$

Usando i valori dei momenti statici ricaviamo le coordinate del baricentro

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{572a^3}{124a^2} = 4{,}61a \quad ; \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{788a^3}{124a^2} = 6{,}35a$$

Momenti di inerzia:

$$J_{x_1} = \frac{1}{3} d c^3 = \frac{1}{3} 6a \cdot (14a)^3 = 5488a^4$$

$$J_{x_2} = \frac{1}{3} f \cdot (c-g)^3 = \frac{1}{3} 4a \cdot (10a)^3 = 1333{,}33a^4$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{3} d^3 c = \frac{1}{3} (6a)^3 \cdot 14a = 1008a^4$$

$$J_{y_2} = \frac{1}{12} f^3 \cdot (c-g) + A_2 \cdot x_{G_2}^2 = \frac{1}{12} (4a)^3 \cdot 10a + 40a^2 \cdot (8a)^2 = 2613{,}3a^4$$

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} = 6821{,}33a^4 \quad ; \quad J_y = J_{y_1} + J_{y_2} = 3621{,}33a^4$$

$$J_{xy,1} = A_1 x_{G_1} y_{G_1} = 84a^2 \cdot 3a \cdot 7a = 1764a^4$$

$$J_{xy,2} = A_2 x_{G_2} y_{G_2} = 40a^2 \cdot 8a \cdot 5a = 1600a^4$$

$$J_{xy} = J_{xy,1} + J_{xy,2} = 1764a^4 + 1600a^4 = 3364a^4$$

Infine:

$$J_{x_G} = J_x - A y_G^2 = 6.821{,}33a^4 - 124a^2 \cdot (6{,}35a)^2 = 1813{,}72a^4$$

$$J_{y_G} = J_y - A x_G^2 = 3621{,}33a^4 - 124a^2 \cdot (4{,}61a)^2 = 982{,}76a^4$$

$$J_{x_G y_G} = J_{xy} - A x_G y_G = 3364a^4 - 124a^2 \cdot 4{,}61a \cdot 6{,}35a = -270{,}97a^4$$

Infine calcoliamo la tangente trigonometrica, $tg\,2\vartheta$, del doppio dell'angolo ϑ formato dagli assi x_G e ξ:

$$tg\,2\vartheta = -\frac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G}-J_{y_G}} \Rightarrow \begin{cases} 2\vartheta = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G}-J_{y_G}}\right) & \text{se } J_{x_G} > J_{y_G} \\ 2\vartheta = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G}-J_{y_G}}\right)+\pi & \text{se } J_{x_G} < J_{y_G} \end{cases}$$

$$tg\,2\vartheta = -\frac{-2\cdot 270{,}97a^4}{1813{,}72a^4 - 982{,}76a^4} = 0{,}65$$

Invece i momenti centrali d'inerzia $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ sono dati da

$$J_\xi = J_{max} = \frac{J_{x_G}+J_{y_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_G}-J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2} = 1894{,}27a^4$$

$$J_\eta = J_{min} = \frac{J_{x_G}+J_{y_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_G}-J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2} = 902{,}20\,a^4$$

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

Prova in differita del 08.05.2003
(da riconsegnare al docente entro le 19.00 del 13.05.2003)

Si prega di riportare i risultati in forma ordinata su fogli in formato A4

Esercizio 1

Per ciascuno degli stati di sforzi sotto indicati, si richiede di tracciare i 3 cerchi di Mohr corrispondenti e di determinare i valori delle tensioni principali. Si noti che sono assegnate solo le componenti non nulle del tensore degli sforzi.

- (tensione monoassiale) $\sigma_x = 20$ MPa;
- (stato di sforzo biassiale) $\sigma_x = -30$ MPa, $\sigma_y = -15$ MPa;
- (stato di sforzo idrostatico) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 80$ MPa ;
- (stato di sforzo piano) $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30$ MPa;
- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 30$ MPa, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 30$ MPa.

Esercizio 2

Per lo stato di sforzo piano caratterizzato delle componenti $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 60$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20$ MPa, determinare i tre invarianti I_1, I_2, I_3 dello sforzo ed i tre invarianti I'_1, I'_2, I'_3 dello sforzo deviatorico.
Determinare quanto valgono le componenti normale e tangenziale del vettore sforzo su un piano la cui normale è inclinata di 30^o (in senso antiorario) rispetto all'asse x.
Quanto vale invece la componente tangenziale su un piano la cui normale è inclinata di -30^o (cioè di 30^o in senso orario) rispetto all'asse x?
Determinare i valori degli sforzi principali e le direzioni principali ed evidenziare l'elementino di materiale sul quale agiscono gli sforzi principali.

Esercizio 3

Sono assegnate nella seguente tabella:

$$10^{-5}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

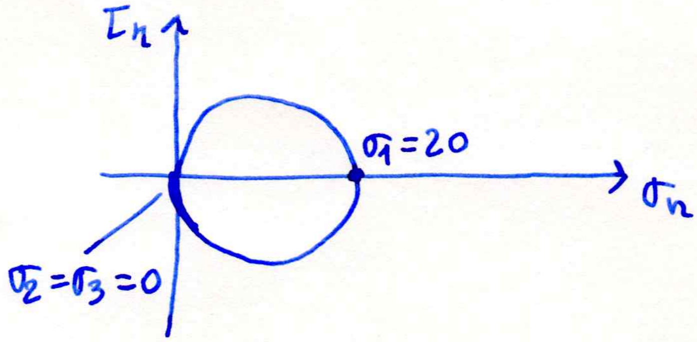
le componenti del *gradiente di spostamento* e nel punto P.
Determinare le componenti del tensore di rotazione infinitesima, ω, e del tensore di deformazione infinitesima, ε.
Valutare poi gli invarianti del *deviatore* del tensore di deformazione, J'_1, J'_2, J'_3, le dilatazioni principali e le direzioni principali.

ESERCIZIO 1 (08/05/03): CERCHI DI MOHR

Disegniamo i 3 cerchi di Mohr corrispondenti agli stati di sforzo indicati nell'esercizio.

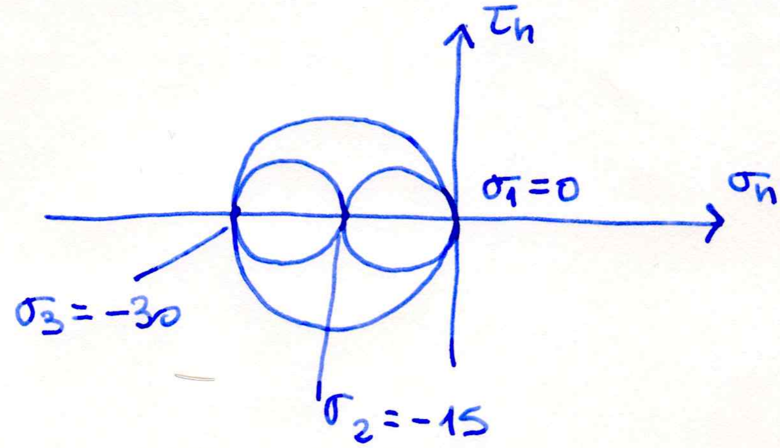
① Tensione monoassiale: $\sigma_x = 20$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



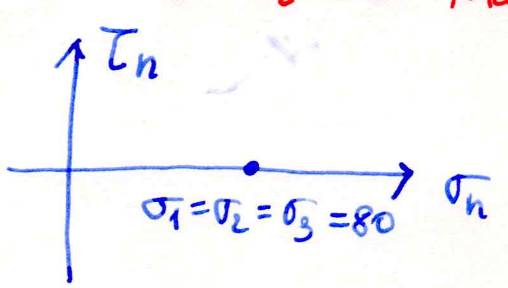
② Stato di sforzo biassiale: $\sigma_x = -30$ MPa, $\sigma_y = -15$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



③ Stato di sforzo idrostatico: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 80$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$



④ Stato di sforzo piano: $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa calcoliamo gli invarianti I_1, I_2, I_3.

$I_1 = Tr(\underline{\underline{\sigma}}) = 50$

$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) = 30^2 - 10 \cdot 40 = 500$

$I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$

Usiamo gli invarianti per calcolare gli sforzi principali:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - 50\sigma^2 - 500\sigma = 0$$

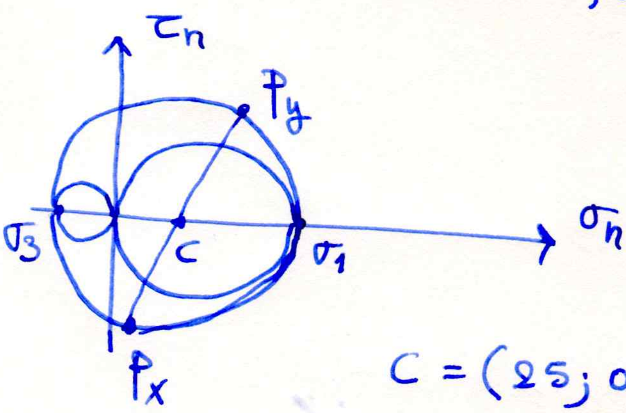
$$\sigma(\sigma^2 - 50\sigma - 500) = 0 \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ \sigma^2 - 50\sigma - 500 = 0 \end{cases}$$

$\sigma_{A,B} = 25 \mp \sqrt{625+500} = 25 \mp 33,54$

Riordinando i tre valori: $\sigma_1 = 58,54$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -8,54$

Quindi:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 58,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8,54 \end{pmatrix}$$



$C = (25; 0)$

(5) $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$ MPa ; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 30$ MPa ; $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 30$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 10 & 0 & 30 \\ 30 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli invarianti sono

$I_1 = 0$

$I_2 = 100 + 900 + 900 = 1900$

$I_3 = 9000 + 9000 = 18000$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

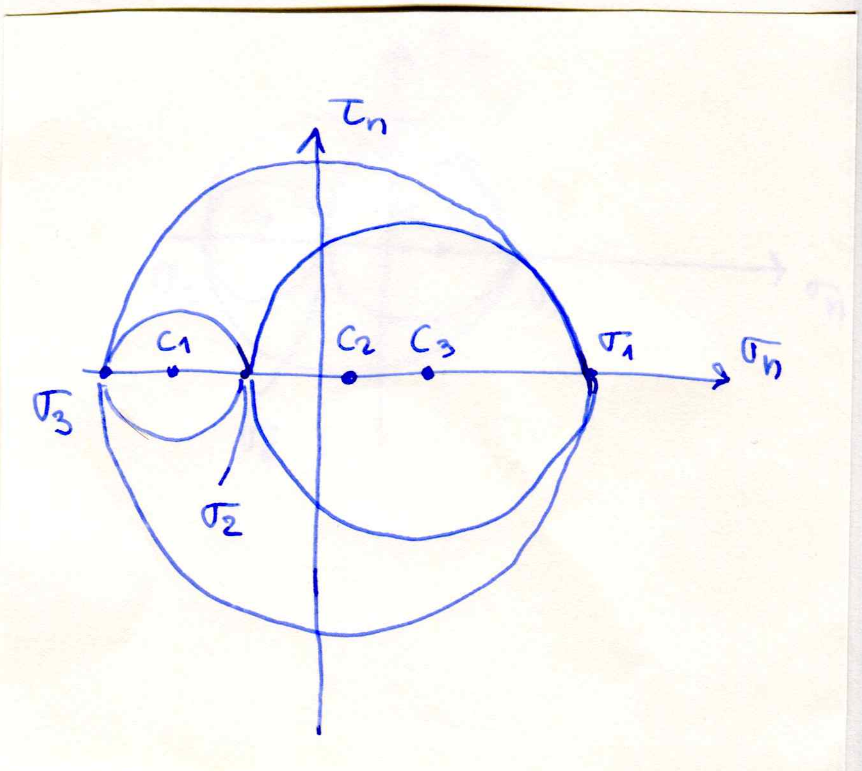
$$\sigma^3 - 1900\,\sigma^2 - 18000 = 0$$

Le cui soluzioni sono

$\sigma_1 = 47.72$, $\sigma_2 = -10$, $\sigma_3 = -37.72$

Quindi

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 47.72 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -37.72 \end{pmatrix}$$



$C_1 = (-28.86 ; 0)$

$R_1 = 13.86$

$C_2 = (5 ; 0)$

$R_2 = 42.72$

$C_3 = (18.86 ; 0)$

$R_3 = 28.86$

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

Prova in differita del 08.05.2003
(da riconsegnare al docente entro le 19.00 del 13.05.2003)

Si prega di riportare i risultati in forma ordinata su fogli in formato A4

Esercizio 1

Per ciascuno degli stati di sforzi sotto indicati, si richiede di tracciare i 3 cerchi di Mohr corrispondenti e di determinare i valori delle tensioni principali. Si noti che sono assegnate solo le componenti non nulle del tensore degli sforzi.

- (tensione monoassiale) $\sigma_x = 20$ MPa;
- (stato di sforzo biassiale) $\sigma_x = -30$ MPa, $\sigma_y = -15$ MPa;
- (stato di sforzo idrostatico) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 80$ MPa ;
- (stato di sforzo piano) $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30$ MPa;
- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 30$ MPa, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 30$ MPa.

Esercizio 2

Per lo stato di sforzo piano caratterizzato delle componenti $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 60$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20$ MPa, determinare i tre invarianti I_1, I_2, I_3 dello sforzo ed i tre invarianti I'_1, I'_2, I'_3 dello sforzo deviatorico.
Determinare quanto valgono le componenti normale e tangenziale del vettore sforzo su un piano la cui normale è inclinata di 30^o (in senso antiorario) rispetto all'asse x.
Quanto vale invece la componente tangenziale su un piano la cui normale è inclinata di -30^o (cioè di 30^o in senso orario) rispetto all'asse x?
Determinare i valori degli sforzi principali e le direzioni principali ed evidenziare l'elementino di materiale sul quale agiscono gli sforzi principali.

Esercizio 3

Sono assegnate nella seguente tabella:

$$10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

le componenti del *gradiente di spostamento* e nel punto P.
Determinare le componenti del tensore di rotazione infinitesima, ω, e del tensore di deformazione infinitesima, ε.
Valutare poi gli invarianti del *deviatore* del tensore di deformazione, J'_1, J'_2, J'_3, le dilatazioni principali e le direzioni principali.

ESERCIZIO 2 (08/05/03): STATO DI SFORZO PIANO

Si consideri il seguente stato di sforzo piano:

$\sigma_x = -20$ MPa , $\sigma_y = 60$ MPa , $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20$ MPa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare immediatamente gli invarianti.

$$I_1 = -20 + 60 = 40$$
$$I_2 = 20^2 + 20^2 - (-20 \cdot 60) = 1600$$
$$I_3 = 0$$

Lo sforzo deviatorico è dato da

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - p\,\mathbb{1} \qquad \text{dove } p = \frac{I_1}{3} = \frac{40}{3}$$

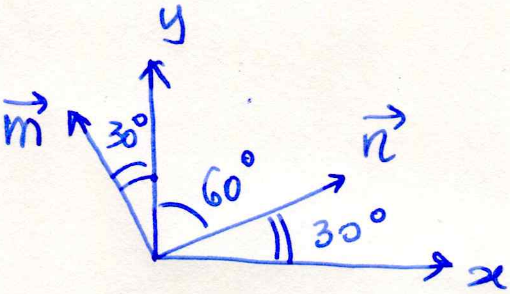
$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 40/3 & 0 & 0 \\ 0 & 40/3 & 0 \\ 0 & 0 & 40/3 \end{pmatrix}}_{p\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} & 20 & 0 \\ 20 & \frac{140}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{40}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -33.33 & 20 & 0 \\ 20 & 46.66 & 0 \\ 0 & 0 & -13.33 \end{pmatrix}$$

i cui invarianti sono dati da

$$I_1' = -33.33 + 46.66 - 13.33 = 0$$
$$I_2' = 400 - (-33.33 \cdot 46.66 + 33.33 \cdot 13.33 + \\ - 46.66 \cdot 13.33) = 2132.87$$
$$I_3' = -33.33 \cdot 46.66 \cdot (-13.33) - 20 \cdot 20 \cdot (-13.33)$$
$$= 26062.52$$

Adesso vogliamo calcolare le componenti normale e tangenziale del vettore sforzo su un piano la cui normale è inclinata di 30° (antiorario) rispetto all'asse x.



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \qquad \vec{m} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix}$$

$$\alpha_x = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \beta_x = \cos 120° = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_y = \cos 60° = 1/2 \qquad \beta_y = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_z = \cos 90° = 0 \qquad \beta_z = \cos 90° = 0$$

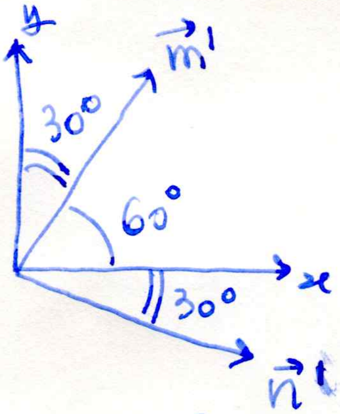
$$\sigma_n = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x \alpha_y$$

$$= -20 \cdot \frac{3}{4} + 60 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 17.32 \text{ MPa}$$

$$\tau_{nm} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \tau_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x)$$

$$= -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 44,64 \text{ MPa}$$

Quando, invece, la componente tangenziale è valutata su un piano la cui normale è inclinata di $-30°$ si ha che



$$\alpha_{x'} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \beta_{x'} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{y'} = \cos 120° = -\frac{1}{2} \qquad \beta_{y'} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_{z'} = \cos 90° = 0 \qquad \beta_{z'} = \cos 90° = 0$$

$$\sigma_{n'} = \sigma_x \alpha_{x'}^2 + \sigma_y \alpha_{y'}^2 + 2\tau_{xy}\alpha_{x'}\alpha_{y'} = -20 \cdot \frac{3}{4} + 60 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 20 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= -17.32 \text{ MPa}$$

$$\tau_{n'm'} = \sigma_x \alpha_{x'}\beta_{x'} + \sigma_y \alpha_{y'}\beta_{y'} + \tau_{xy}(\alpha_{x'}\beta_{y'} + \alpha_{y'}\beta_{x'})$$

$$= -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 60 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 20 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = -24.64 \text{ MPa}$$

· Sforzi principali e direzioni principali

Per ricavare gli sforzi principali risolviamo l'equazione

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \qquad I_1 = 40$$

$$\sigma^3 - 40\sigma^2 - 1600\sigma = 0 \qquad I_2 = 1600$$

$$I_3 = 0$$

$$\sigma(\sigma^2 - 40\sigma - 1600) = 0$$

per cui $\quad \sigma = 0 \quad \cup \quad \sigma^2 - 40\sigma - 1600 = 0$

$$\sigma_{A,B} = 20 \mp \sqrt{400 + 1600} = 20 \mp \sqrt{2000} = 20 \mp 20\sqrt{5} \quad \begin{cases} -24.72 \\ 64.72 \end{cases}$$

Riordinando i valori ottenuti, individuiamo

$$\sigma_1 = 64.72, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -24.72$$

Per ottenere le direzioni principali utilizziamo l'equazione agli autovalori

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \mathbb{1})\vec{n}_1 = \vec{0} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1 \end{cases} \quad \text{per } \vec{n}_1$$

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_2 \mathbb{1})\vec{n}_2 = \vec{0} \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2 = 1 \end{cases} \quad \text{per } \vec{n}_2$$

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_3 \mathbb{1})\vec{n}_3 = \vec{0} \\ n_{3x}^2 + n_{3y}^2 + n_{3z}^2 = 1 \end{cases} \quad \text{per } \vec{n}_3$$

Facciamo il conto per $\vec{n}_1$

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \mathbb{1})\,\vec{n}_1 = \vec{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 64.72 & 0 & 0 \\ 0 & 64.72 & 0 \\ 0 & 0 & 64.72 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -84.72 & 20 & 0 \\ 20 & -4.72 & 0 \\ 0 & 0 & -64.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -84.72\, n_{1x} + 20\, n_{1y} = 0 \\ 20\, n_{1x} - 4.72\, n_{1y} = 0 \\ -64.72\, n_{1z} = 0 \\ \boxed{n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1} \end{cases}$$

$\vec{n}_1$ vettore unitario

da cui otteniamo

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0.230 \\ 0.973 \\ 0 \end{pmatrix}$$

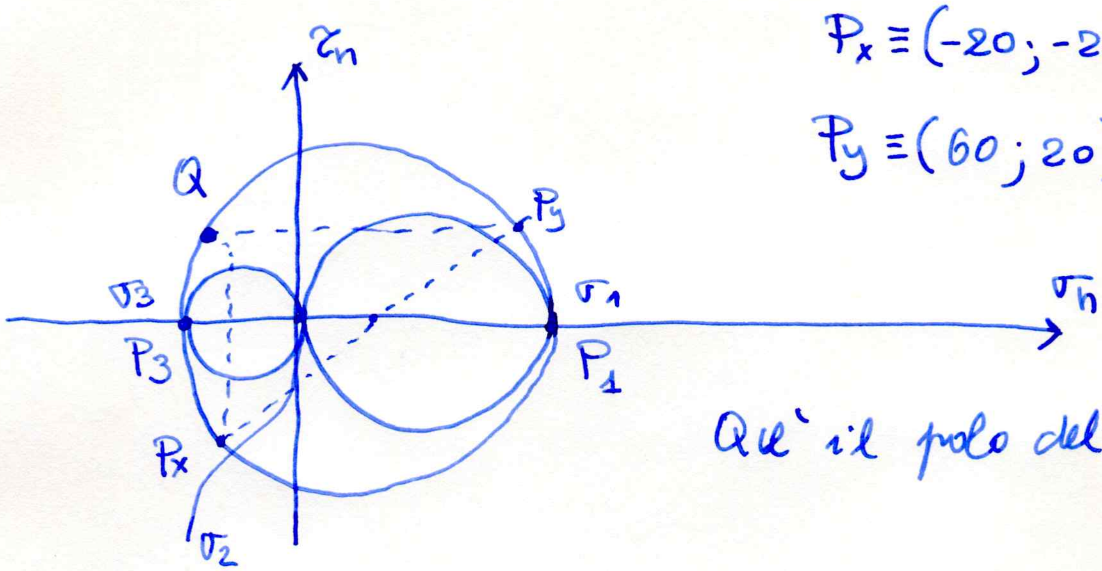
e allo stesso modo per $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0.973 \\ -0.230 \\ 0 \end{pmatrix}$$

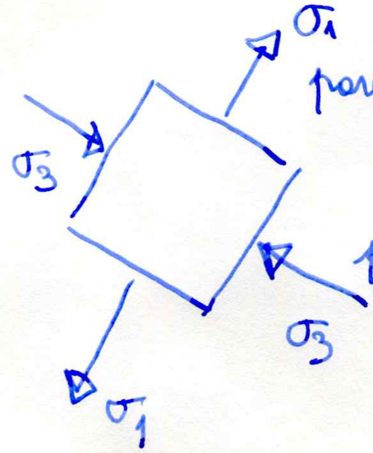
Sul cerchio di Mohr si rappresenta

$P_x \equiv (-20; -20)$

$P_y \equiv (60; 20)$



Q è il polo del cerchio di Mohr



parallela a $\overline{Q-P_1}$

parallela a $\overline{Q-P_3}$

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

Prova in differita del 08.05.2003
(da riconsegnare al docente entro le 19.00 del 13.05.2003)

Si prega di riportare i risultati in forma ordinata su fogli in formato A4

Esercizio 1

Per ciascuno degli stati di sforzi sotto indicati, si richiede di tracciare i 3 cerchi di Mohr corrispondenti e di determinare i valori delle tensioni principali. Si noti che sono assegnate solo le componenti non nulle del tensore degli sforzi.

- (tensione monoassiale) $\sigma_x = 20$ MPa;
- (stato di sforzo biassiale) $\sigma_x = -30$ MPa, $\sigma_y = -15$ MPa;
- (stato di sforzo idrostatico) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 80$ MPa ;
- (stato di sforzo piano) $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30$ MPa;
- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$ MPa, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 30$ MPa, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 30$ MPa.

Esercizio 2

Per lo stato di sforzo piano caratterizzato delle componenti $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 60$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20$ MPa, determinare i tre invarianti I_1, I_2, I_3 dello sforzo ed i tre invarianti I_1', I_2', I_3' dello sforzo deviatorico.
Determinare quanto valgono le componenti normale e tangenziale del vettore sforzo su un piano la cui normale è inclinata di 30^o (in senso antiorario) rispetto all'asse x.
Quanto vale invece la componente tangenziale su un piano la cui normale è inclinata di -30^o (cioè di 30^o in senso orario) rispetto all'asse x?
Determinare i valori degli sforzi principali e le direzioni principali ed evidenziare l'elementino di materiale sul quale agiscono gli sforzi principali.

Esercizio 3

Sono assegnate nella seguente tabella:

$$10^{-5}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

le componenti del *gradiente di spostamento* e nel punto P.
Determinare le componenti del tensore di rotazione infinitesima, ω, e del tensore di deformazione infinitesima, ε.
Valutare poi gli invarianti del *deviatore* del tensore di deformazione, J_1', J_2', J_3', le dilatazioni principali e le direzioni principali.

ESERCIZIO 3 (08/05/03) : DEFORMAZIONE

E' assegnato il seguente gradiente di spostamento $\underline{\underline{e}}$ nel punto P

$$\underline{\underline{e}} = 10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che il tensore di rotazione infinitesima $\underline{\underline{\omega}}$ e quello di deformazione infinitesima $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sono legati a $\underline{\underline{e}}$ come segue:

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T\right) \quad \text{e} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right)$$

Per prima cosa, quindi, definiamo $\underline{\underline{e}}^T$

$$\underline{\underline{e}}^T = 10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per cui si ha che

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T\right) = \frac{1}{2}\left[10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= 10^{-5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= 10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli invarianti di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sono

$$J_1 = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 10^{-5}(1+2+3) = 6 \cdot 10^{-5}$$

$$J_2 = \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right) - \left(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z\right)$$

$$= (-5 \cdot 10^{-5})^2 + (-1 \cdot 10^{-5})^2 - \left(1 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-5}\right)$$

$$= \left[25 + 1 - (2 + 6 + 3)\right] \cdot 10^{-10}$$

$$= 15 \cdot 10^{-10}$$

$$J_3 = \det(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-5} - \left(-5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot (-5) \cdot 10^{-5} + (-1)\,10^{-5} \cdot (-1)\,10^{-5} \cdot 10^{-5}\right)$$

$$= 6 \cdot 10^{-15} - 51 \cdot 10^{-15} = -45 \cdot 10^{-15}$$

La componente deviatorica del tensore di deformazione infinitesima è data da

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{\varepsilon}} - p\,\mathbb{1} \qquad \text{dove} \quad p = \frac{J_1}{3} = 2 \cdot 10^{-5}$$

$$= 10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 10^{-5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 10^{-5}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_1' = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}') = 0$$

$$J_2' = (-5 \cdot 10^{-5})^2 + (-1 \cdot 10^{-5})^2 - (-1 \cdot 10^{-5}) \cdot 1 \cdot 10^{-5}$$

$$= 25 \cdot 10^{-10} + 1 \cdot 10^{-10} + 1 \cdot 10^{-10}$$

$$= 27 \cdot 10^{-10}$$

$$J_3' = \det(\underline{\underline{\varepsilon}}') = 1 \cdot 10^{-15}$$

Per ottenere le dilatazioni e le direzioni principali risolviamo le seguente equazione

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0$$

$J_1 = 6 \cdot 10^{-5}$; $J_2 = 15 \cdot 10^{-10}$; $J_3 = -45 \cdot 10^{-15}$

$$\varepsilon^3 - 6 \cdot 10^{-5} \varepsilon^2 - 15 \cdot 10^{-10} \varepsilon + 45 \cdot 10^{-15} = 0$$

da cui le tre soluzioni

$\varepsilon_1 = -3.18 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 1.96 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_3 = 7.21 \cdot 10^{-5}$

Per ottenere le direzioni principali risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_1 \mathbb{1}) \vec{n}_1 = \vec{0} \\ |\vec{n}_1|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{per } \vec{n}_1$$

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_2 \mathbb{1}) \vec{n}_2 = \vec{0} \\ |\vec{n}_2|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{per } \vec{n}_2$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_3 \mathbb{1}) \vec{n}_3 = \vec{0} \\ |\vec{n}_3|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{per } \vec{n}_3$$

Facciamo i conti esplicitamente per $\vec{n}_1$:

$$(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_1 \mathbb{1})\vec{n}_1 = \vec{0} \qquad \varepsilon_1 = -3.18 \cdot 10^{-5}$$

$$10^{-5}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.18 & 0 & 0 \\ 0 & 3.18 & 0 \\ 0 & 0 & 3.18 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \alpha_{x1} \\ \alpha_{y1} \\ \alpha_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\begin{cases} 4.18\,\alpha_{x1} - 5\,\alpha_{z1} = 0 \\ 5.18\,\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0 \\ -5\,\alpha_{x1} - \alpha_{y1} + 6.18\,\alpha_{z1} = 0 \\ \boxed{\alpha_{x1}^2 + \alpha_{y1}^2 + \alpha_{z1}^2 = 1} \end{cases}$$

$\vec{n}_1$ vettore unitario

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_{x1} = 0.762 \\ \alpha_{y1} = 0.122 \\ \alpha_{z1} = 0.636 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0.762 \\ 0.122 \\ 0.636 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo troviamo per $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0.188 \\ -0.981 \\ -0.039 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0.619 \\ 0.147 \\ -0.771 \end{pmatrix}$$