Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare H_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

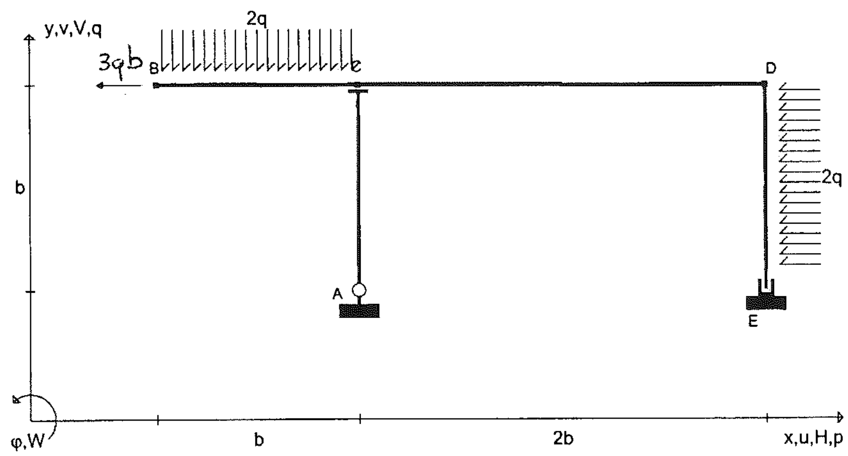
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta *ABCD*), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta *DE*), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto *B*, u_B, e quella verticale dello spostamento del punto *C*, v_C;

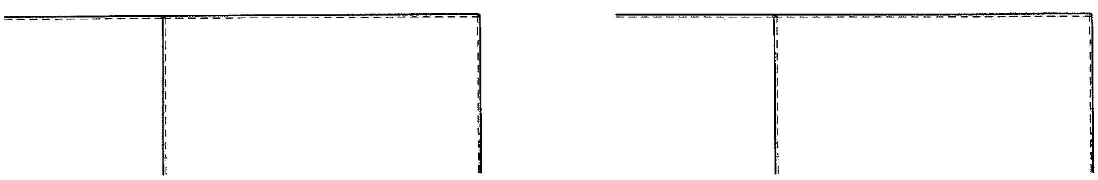
Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto *C*, M_C ***<u>riferito all'asta AC</u>***. In questa situazione si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti *B* e *D*, u_B, u_D.

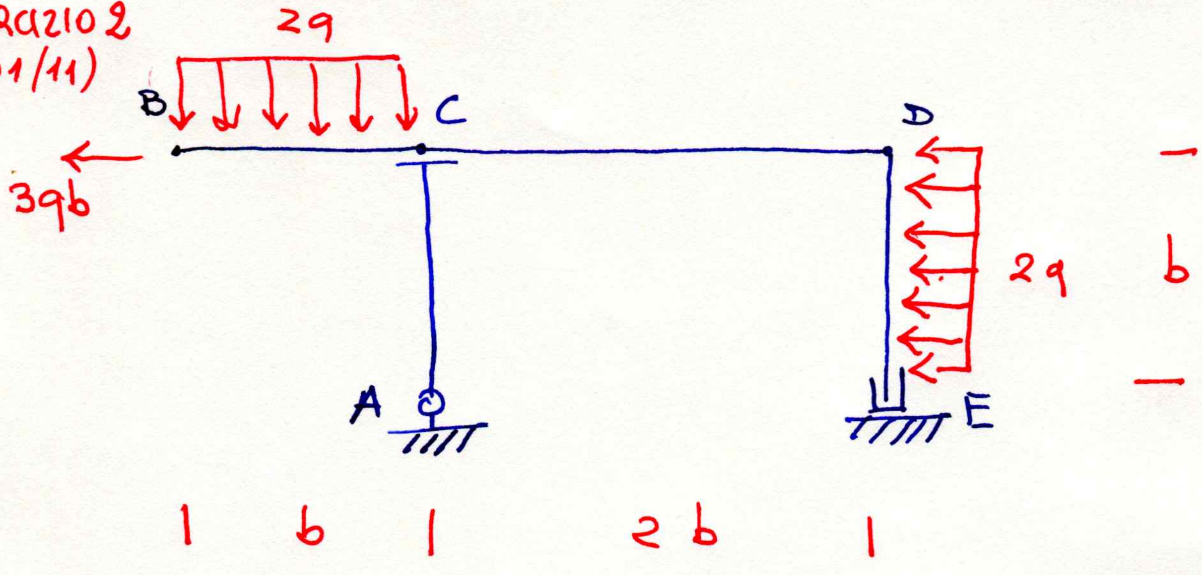
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio

Universita' di Cagliari SdC_SdA 25.01.11*008





ESERCIZIO 2
(25/01/11)



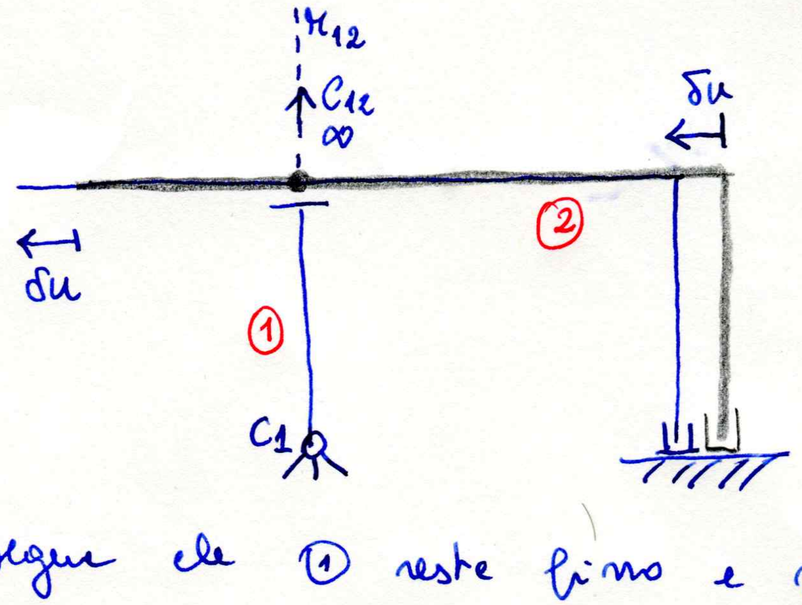
- Per l'asta AC il centro di rotazione istantanea è chiaramente $C_1 \equiv A$

- Per l'asta BCDE, invece, il centro di rotazione istantanea, per la presenza del pattino-manicotto, deve trovarsi sulla retta impropria $C_2 \in r_\infty$

- Quindi si ha che

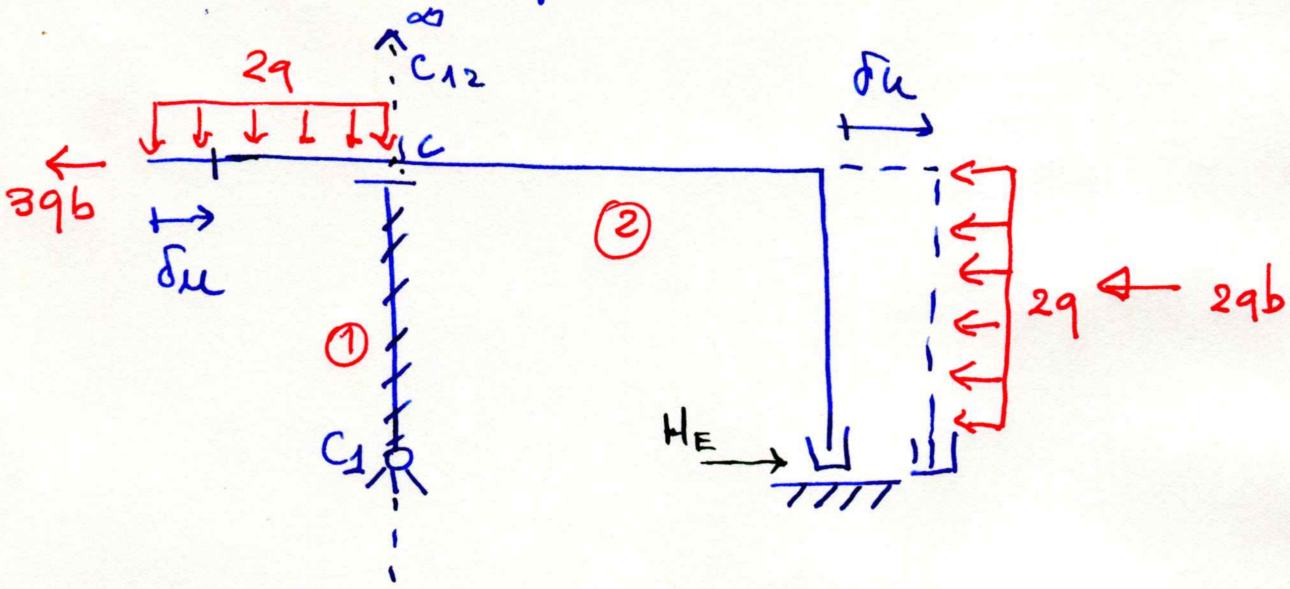
$$\begin{cases} C_2 \in r_\infty \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12} \end{cases} \Rightarrow C_2 = C_{12}$$

dove



da cui segue che 1 resta fermo e solo 2 si sposta.
Risulta che $u_B = -\delta u$ e $v_C = 0$

Applichiamo il PLV per valutare le reazione vincolare H_E.

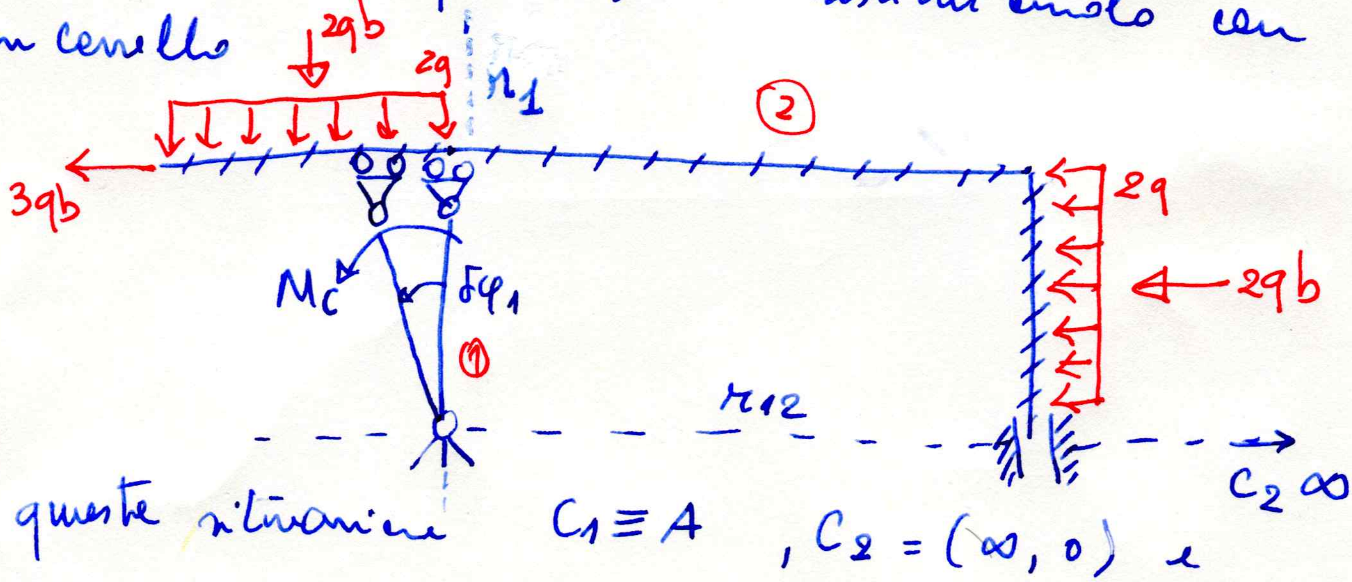


$$\delta \mathcal{L} = -3qb\,\delta u - 2qb\,\delta u + H_E\,\delta u = 0 \quad \forall \delta u$$

$$(-3qb - 2qb + H_E)\,\delta u = 0 \quad \forall \delta u$$

$$-5qb + H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad H_E = 5qb$$

Adesso vogliamo calcolare, riutilizzando il PLV, il valore del momento flettente nel punto C M_C riferito all'asta AC. Per fare ciò degradiamo il vincolo in C (pattino) e sostituiamolo con un carrello



In questa situazione $C_1 \equiv A$, $C_2 = (\infty, 0)$ e $C_{12} \in r_{12}$

Per cui

$$\begin{cases} C_{12} \in r_1 \\ C_1 \longleftrightarrow C_2 \longleftrightarrow C_{12} \end{cases} \qquad C_{12} \in r_{12} \quad \Rightarrow C_{12} \equiv C_1$$

Dunque ② non si sposta.

Applichiamo infine il PLV, ottenendo

$$\delta \mathcal{L} = M_C \cdot \delta \varphi_1 = 0 \quad \forall\, \delta \varphi_1$$

$$M_C = 0$$

H_E (⇨) = ...; C_1 = (........., ...); C_2 = (........., ...); C_{12} = (........., ...);

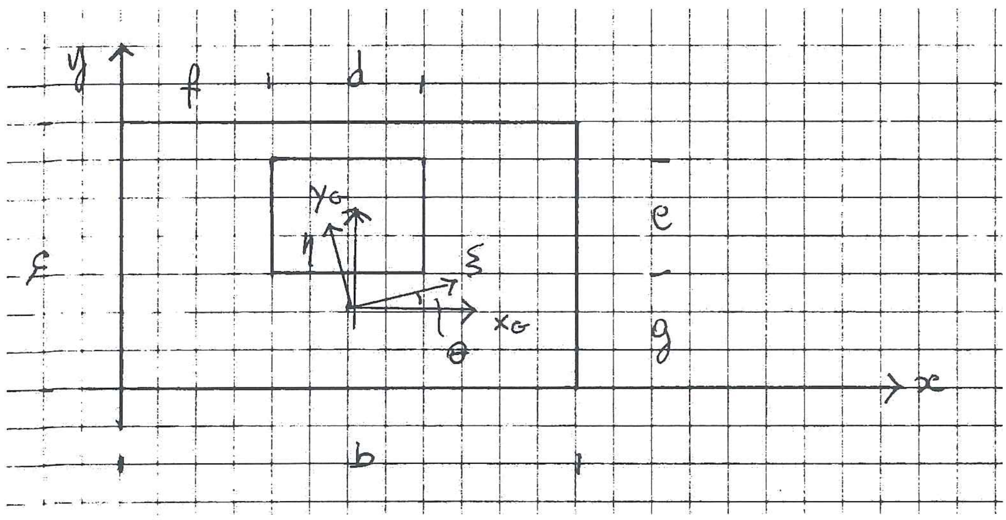
u_B = ...; v_C = ...;

M_C (⟲□⟳) = ...; u_B = ...; u_D = ...;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea forata indicata in Figura, nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 12a$; $c = 16a$; $d = 6a$; $e = 8a$; $f = 3a$; $g = 4a$, si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



S_x = ...; S_y = ...;

x_G = ...; y_G = ...;

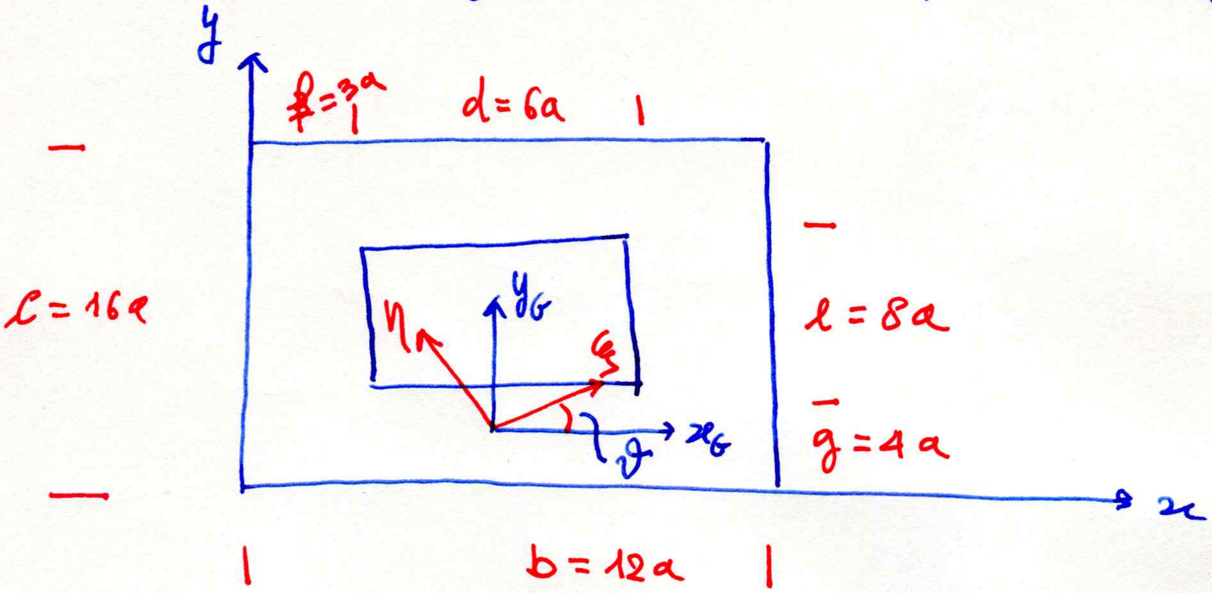
J_{xG} = ...; J_{yG} = ...;

J_{xGyG} = ...; tan 2θ = ...;

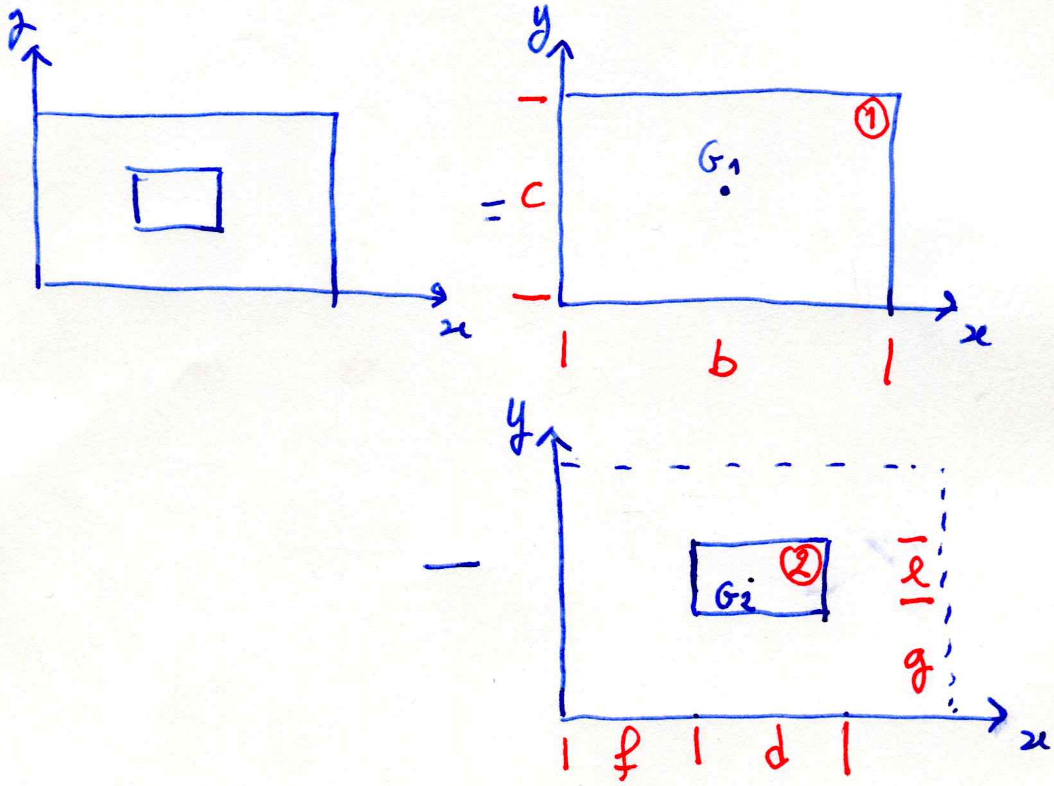
$J_\xi = J_{max}$ = ...; $J_\eta = J_{min}$ = ...;

ESERCIZIO 3 (25/01/11)

Consideriamo la seguente lamina piana omogenea



Possiamo ricostruire questa figura come differenza tra un rettangolo pieno e un rettangolo più piccolo delle dimensioni del foro



Dunque le superfici e le coordinate dei baricentri risultano essere

$A_1 = b \cdot c$ $\quad G_1 = \left(\frac{b}{2} ; \frac{c}{2}\right)$

$A_2 = -d \cdot l$ $\quad G_2 = \left(f + \frac{d}{2} ; g + \frac{l}{2}\right)$

Quindi si ha che

$S_{x_1} = A_1 \cdot y_{G_1}$ $\quad S_{x_2} = A_2 \cdot y_{G_2}$ $\quad S_x = S_{x_1} + S_{x_2}$

$S_{y_1} = A_1 \cdot x_{G_1}$ $\quad S_{y_2} = A_2 \cdot x_{G_2}$ $\quad S_y = S_{y_1} + S_{y_2}$

$A = A_1 + A_2$ $\quad x_G = \dfrac{S_y}{A}$ $\quad y_G = \dfrac{S_x}{A}$

$J_{x_1} = \frac{1}{3} b c^3$ $\quad J_{x_2} = -\frac{1}{12} d c^3 + A_2 y_{G_2}^2$ $\quad J_x = J_{x_1} + J_{x_2}$

$J_{y_1} = \frac{1}{3} b^3 c$ $\quad J_{y_2} = -\frac{1}{2} d^3 c + A_2 \cdot x_{G_2}^2$ $\quad J_y = J_{y_1} + J_{y_2}$

$J_{xy_1} = A_1 x_{G_1} y_{G_1}$ $\quad J_{xy_2} = A_2 x_{G_2} y_{G_2}$ $\quad J_{xy} = J_{xy_1} + J_{xy_2}$

$J_{x_G} = J_x - A y_G^2$ $\quad J_{y_G} = J_y - A x_G^2$ $\quad J_{x_G y_G} = J_{xy} - A x_G y_G = 0$

$$tg\, 2\vartheta = -\frac{2 J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} \Rightarrow \begin{cases} 2\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}}\right) & \text{se } J_{x_G} > J_{y_G} \\ 2\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}}\right) + \pi & \text{se } J_{x_G} < J_{y_G} \end{cases}$$

$$J_\xi = J_{max} = \frac{J_{x_G} + J_{y_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_G} - J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2}$$

$$J_\eta = J_{min} = \frac{J_{x_G} + J_{y_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_G} - J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2}$$

Inserendo nelle espressioni precedenti i valori in termini di a si ottiene

$$A_1 = 12a \cdot 16a = 192a^2 \qquad A_2 = -48a^2$$

$$G_1 = (6a\,;\,8a) \qquad G_2 = \left(3a + \frac{6}{2}a\,;\,4a + \frac{8}{2}a\right)$$

$$G_2 = (6a\,;\,8a)$$

$$S_{x_1} = y_{G_1} \cdot A_1 = 192a^2 \cdot 8a = 1536a^3$$

$$S_{x_2} = y_{G_2} \cdot A_2 = -48a^2 \cdot 8a = -384a^3$$

$$S_{y_1} = x_{G_1} \cdot A_1 = 192a^2 \cdot 6a = 1152a^3$$

$$S_{y_2} = x_{G_2} \cdot A_2 = -48a^2 \cdot 6a = -288a^3$$

$$A = A_1 + A_2 = 192a^2 - 48a^2 = 144a^2$$

$$S_x = S_{x_1} + S_{x_2} = 1536a^3 - 384a^3 = 1152a^3$$

$$S_y = S_{y_1} + S_{y_2} = 1152a^3 - 288a^3 = 864a^3$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{864a^3}{144a^2} = 6a$$

$$\Rightarrow G = G_1 = G_2$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1152a^3}{144a^2} = 8a$$

$$J_{x_1} = \frac{1}{3}\,12a \cdot (16a)^3 = 16384a^4$$

$$J_{x_2} = -\frac{1}{12}\,6a \cdot (8a)^3 + A_2\,y_G^2 = -3328a^4$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{3}(12a)^3 \cdot 16a = 9216a^4$$

$$J_{y_2} = -\frac{1}{2}(6a)^3 \cdot 8a + A_2\,x_G^2 = -1872a^4$$

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} = 3840a^4 \quad ; \quad J_y = J_{y_1} + J_{y_2} = 7344a^4$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare V_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

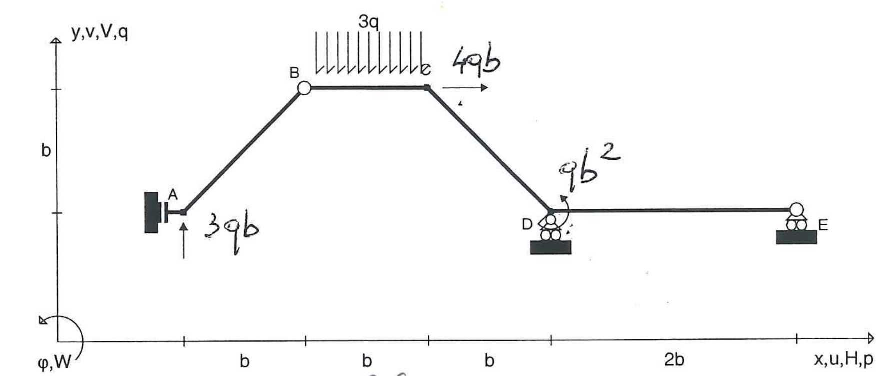
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta *AB*), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta *BCDE*), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti *B* e *D*, u_B e u_D;

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto *C*, M_C. In questa situazione si richiede di:

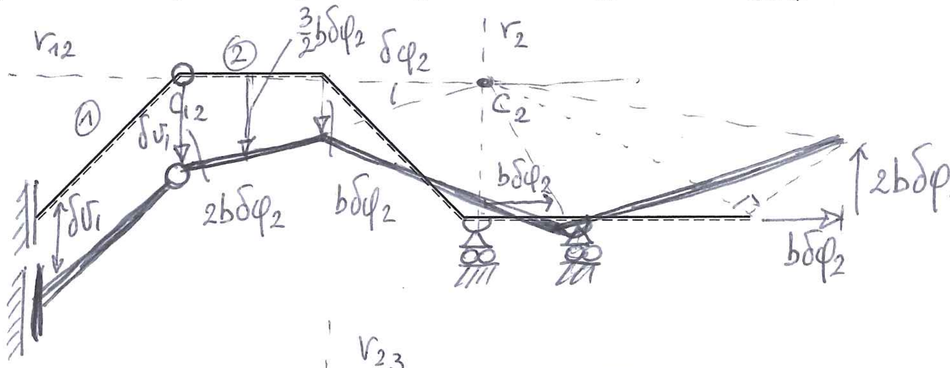
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, le componenti orizzontali dello spostamento virtuale dei punti *B* e *D*, u_B, u_D.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio

Universita' di Cagliari SdC_AdC 13.07.10*003

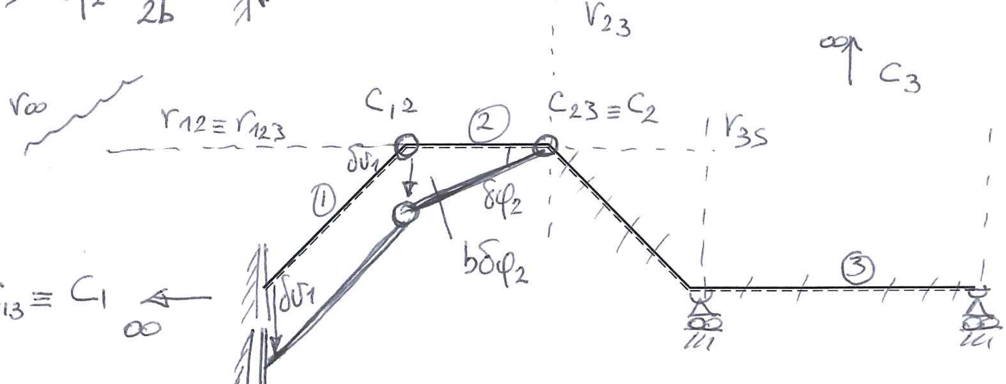


$C_2 \in r_2$
$C_2 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \in r_{12}$



C_1 ∞

$\delta v_1 = 2b\,\delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = \dfrac{\delta v_1}{2b}$

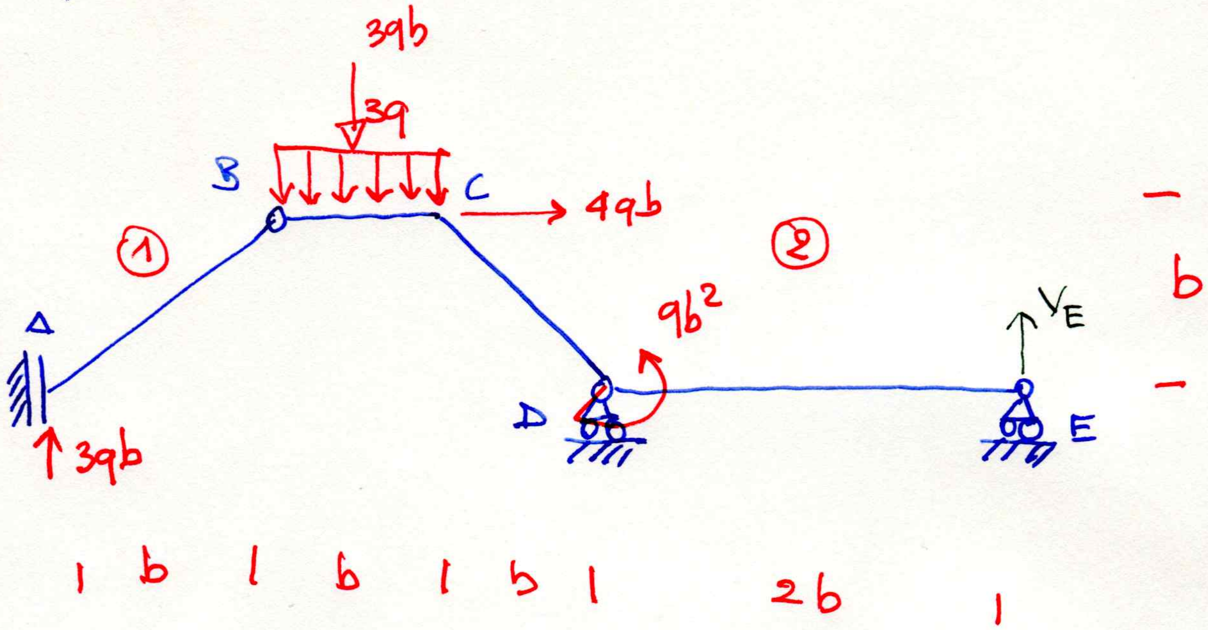


$\delta v_1 = b\,\delta\varphi_2$
$\Rightarrow \delta\varphi_2 = \dfrac{\delta v_1}{b}$ $C_{13} \equiv C_1$ ∞

$C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12}$
$C_3 \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{23}$ } $C_2 \equiv C_{23}$
$C_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_3 \Rightarrow C_{13} \in r_\infty$
$C_{12} \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_{13} \Rightarrow C_{13} \in r_{123}$ } $C_{13} \equiv C_1$

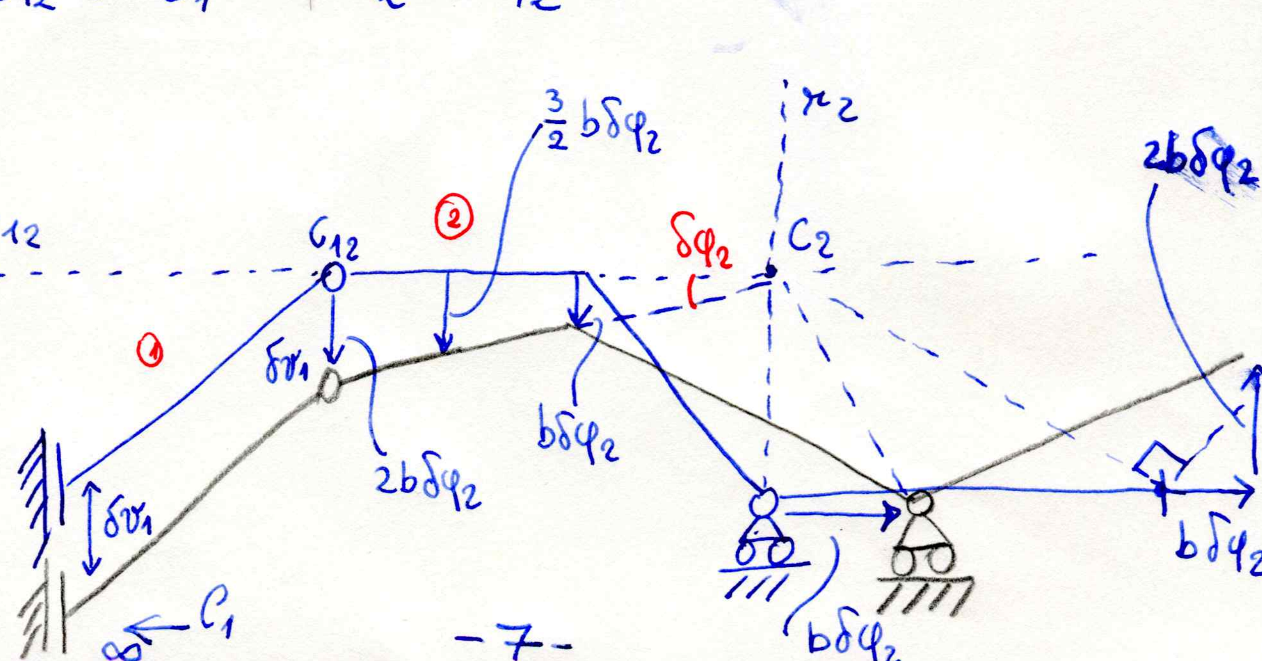
} pertanto poiché $C_{23} \equiv C_2$ e $C_{13} \equiv C_1$ si conclude che la ③ non subisce spostamenti.

ESERCIZIO 2 (13/07/10)



Per la determinazione di V_E eliminiamo il carrello in E.
Osserviamo che l'asta AB ha centro di rotazione istantanea C_1 all'infinito per il pattino in A.
Considerando il corpo rigido ②, il centro di rotazione istantanea deve trovarsi lungo la retta r_2 passante per il carrello in D

$$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_2 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_1 \end{cases} \Rightarrow C_2 \in r_{12}$$



$\delta v_1 = 2b\delta\varphi_2$

$\Downarrow$

$\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta v_1}{2b}$

Applichiamo il PLV per determinare V_E:

$$\delta\mathcal{L} = -3qb \cdot \delta v_1 + 3qb \cdot \frac{3}{2} b\,\delta\varphi_2 + qb^2 \cdot \delta\varphi_2 + V_E \cdot 2b\,\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall \delta\varphi_2$$

$$= -3qb \cdot 2b\,\delta\varphi_2 + \frac{9}{2} qb^2\,\delta\varphi_2 + qb^2\,\delta\varphi_2 + V_E\, 2b\,\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall \delta\varphi_2$$

$$\left(-6qb^2 + \frac{9}{2}qb^2 + qb^2 + 2bV_E\right)\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall \delta\varphi_2$$

$$\left(\frac{-12+9+2}{2} qb^2 + 2bV_E\right)\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall \delta\varphi_2$$

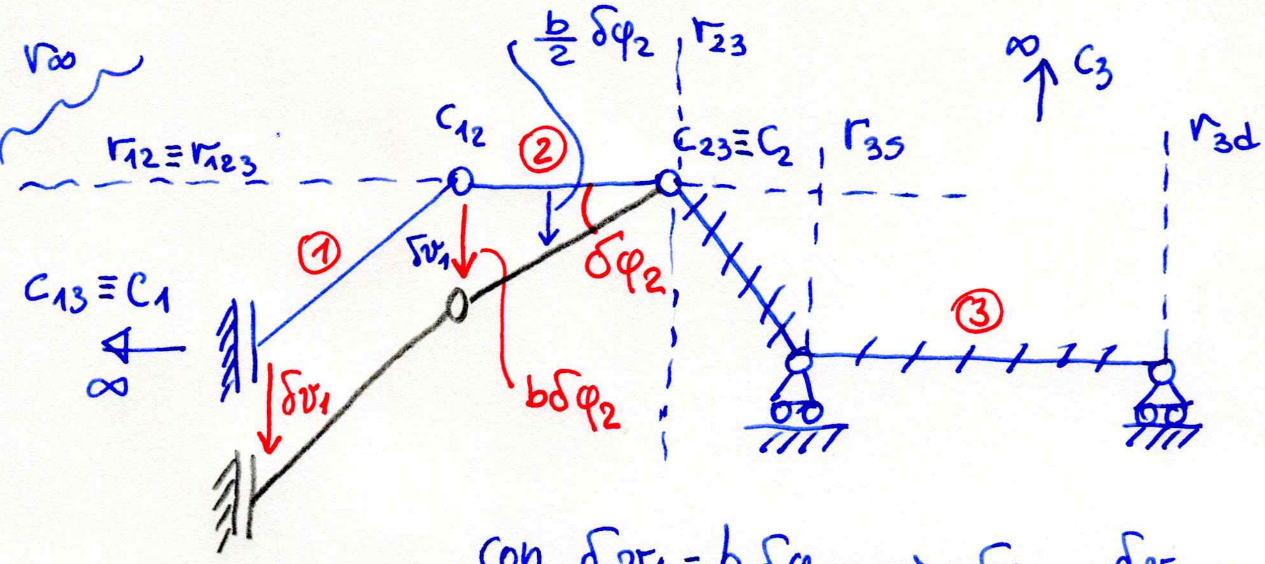
$$-\frac{1}{2}qb^2 + 2bV_E = 0$$

$$V_E = \frac{1}{4}qb$$

Adesso, invece, vogliamo calcolare, sempre usando il PLV il valore del momento flettente nel punto C, M_C. A tale scopo introduciamo una cerniera in C. Quindi, la struttura risulterà composta da tre corpi rigidi ovvero:

① AB ② BC ③ CDE

Come prima, abbiamo che il centro di rotazione istantanea per l'asta AB si trova all'infinito per il vincolo del pettine in A.



$$\text{con } \delta v_1 = b\,\delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = \frac{\delta v_1}{b}$$

$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12}$
$C_3 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{23}$ } $C_2 \equiv C_{23}$

$C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{33} \Rightarrow C_{13} \in r_\infty$
$C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} \Rightarrow C_{13} \in r_{123}$ } $C_{13} \equiv C_1$

da cui si conclude che la ③ non subisce spostamenti

Applichiamo adesso il PLV per calcolare M_C

$$\delta\mathcal{L} = -3qb\cdot\delta v_1 + 3qb\cdot\frac{b}{2}\delta\varphi_2 + M_C\,\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall\,\delta\varphi_2$$

$$-3qb\cdot b\,\delta\varphi_2 + \frac{3}{2}qb^2\delta\varphi_2 + M_C\,\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall\,\delta\varphi_2$$

$$\left(-3qb^2 + \frac{3}{2}qb^2 + M_C\right)\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall\,\delta\varphi_2$$

$$M_C = 3qb^2 - \frac{3}{2}qb^2 = \frac{3}{2}qb^2$$

V_E (⇧) = $\frac{1}{4} qb$; C_1 = (∞, 0); C_2 = ($3b$, b); C_{12} = (b, b);

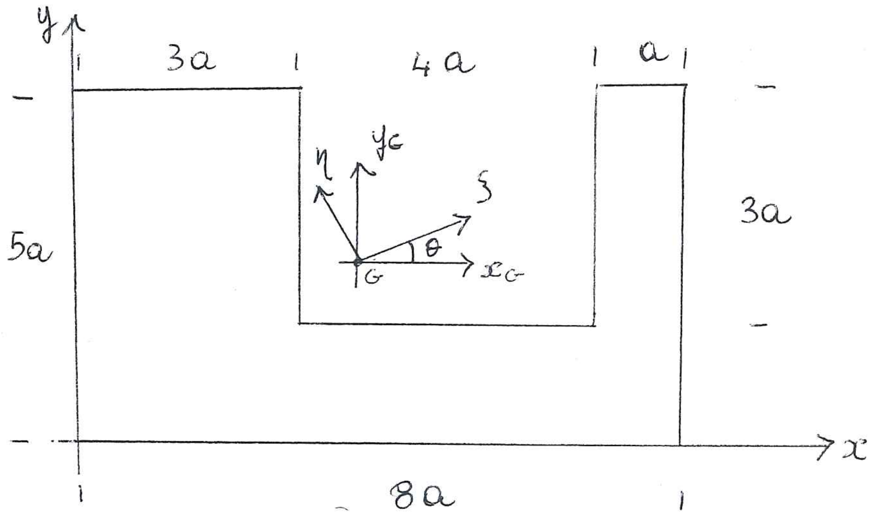
u_B = 0; u_D = $b\,\delta\varphi_2$;

M_C = $+\frac{3}{2} qb^2$; u_B = 0; u_D = 0;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea a forma di U asimmetrica indicata in Figura si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, J_ξ e J_η rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



S_x = $58\,a^3$; S_y = $100\,a^3$;

x_G = $\frac{25}{7} a = 3{,}57143 a$; y_G = $\frac{29}{14} a = 2{,}07143 a$;

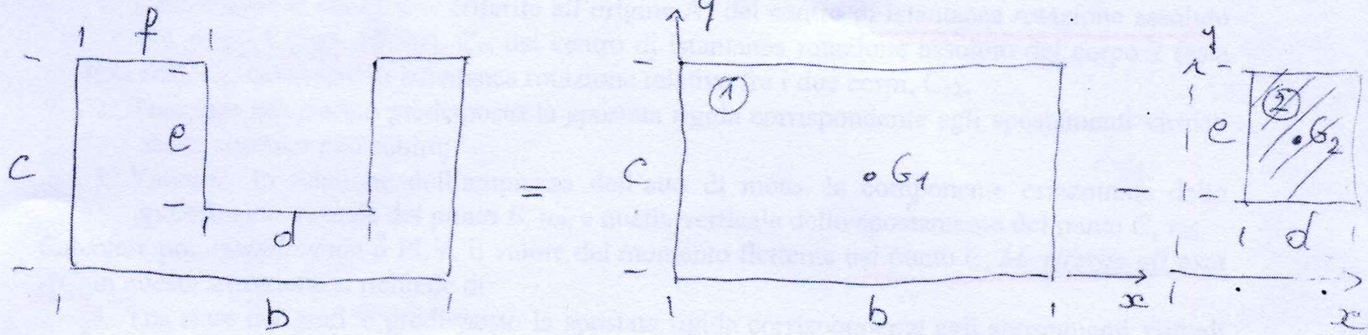
J_{xG} = $\frac{1201}{21} a^4 = 57{.}1905 a^4$; J_{yG} = $\frac{3784}{21} a^4 = 180{.}1905 a^4$;

J_{xGyG} = $-\frac{120}{7} a^4 = -17{.}1429\, a^4$; tan 2θ = $-\frac{80}{287} = -0{,}27875$ ($\theta = 82^\circ{,}2122$);

J_ξ = $182{.}5355\, a^4$; J_η = $54{.}8459\, a^4$;

Esercizio 3

Si può procedere considerando la lamina come differenza di 2 aree:



Ne segue:

$A_1 = b \cdot c$ $\quad G_1 = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ $\quad S_{x_1} = A_1 \cdot y_{G_1}$ $\quad S_{y_1} = A_1 \cdot x_{G_1}$

$A_2 = -d \cdot e$ $\quad G_2 = \left(f + \frac{d}{2}, c - \frac{e}{2}\right)$ $\quad S_{x_2} = A_2 \cdot y_{G2}$ $\quad S_{y_2} = A_2 \cdot x_{G2}$

$A = A_1 + A_2$ $\quad S_x = S_{x_1} + S_{x_2}$ $\quad S_y = S_{y_1} + S_{y_2}$

$$x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$J_{x_1} = \frac{1}{3} b c^3 \qquad J_{x_2} = -\frac{1}{12} d \cdot e^3 + A_2 \cdot y_{G2}^2 \qquad J_x = J_{x_1} + J_{x_2}$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{3} b^3 c \qquad J_{y_2} = -\frac{1}{12} d^3 e + A_2 x_G^2 \qquad J_y = J_{y_1} + J_{y_2}$$

$$J_{xy_1} = A_1 \cdot x_{G1} \cdot y_{G1} \qquad J_{xy_2} = A_2 \cdot x_{G2} \cdot y_{G2} \qquad J_{xy} = J_{xy_1} + J_{xy_2}$$

$$J_{x_G} = J_x - A y_G^2 \qquad J_{y_G} = J_y - A x_G^2 \qquad J_{x_G y_G} = J_{xy} - A x_G y_G$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 J_{xy_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} \qquad 2\theta = \arctan \frac{-2 J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} \quad \text{se } J_{x_G} > J_{y_G}$$

$$2\theta = \arctan \frac{-2 J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} + \pi \quad \text{se } J_{x_G} < J_{y_G}.$$

$$J_\xi = \frac{J_{x_G} + J_{y_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_G} - J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2}$$

$$J_\eta = \frac{J_{x_G} + J_{y_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_G} - J_{y_G}}{2}\right)^2 + J_{x_G y_G}^2}.$$