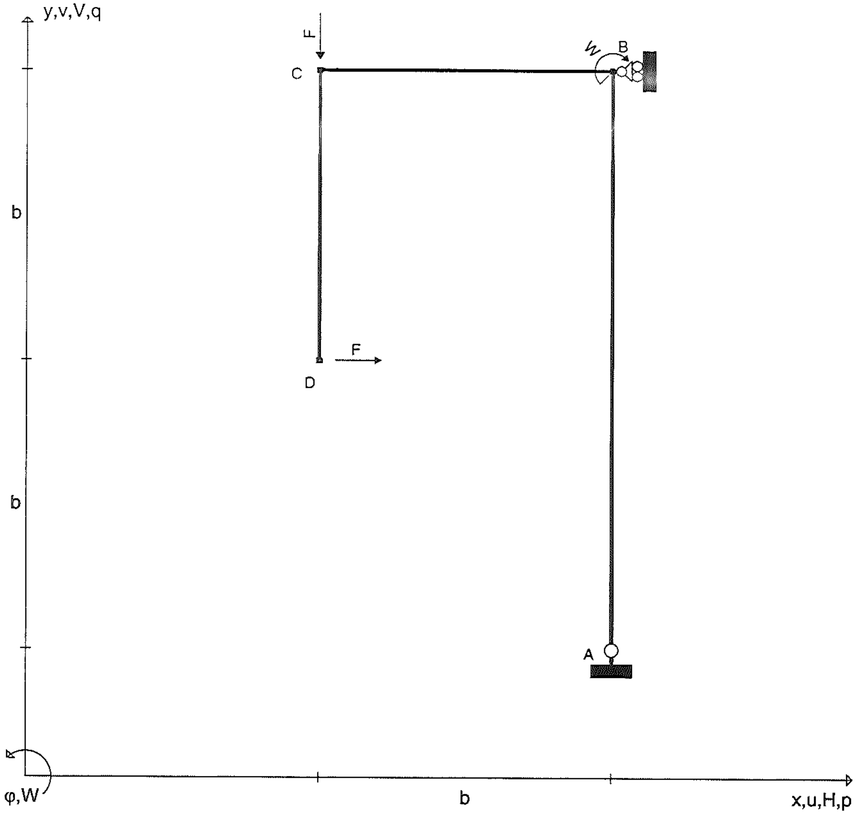


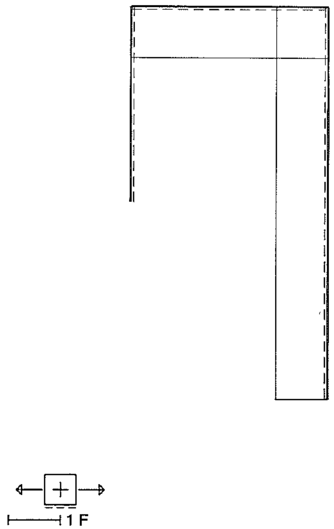
$H_D = F$
$V_C = -F$

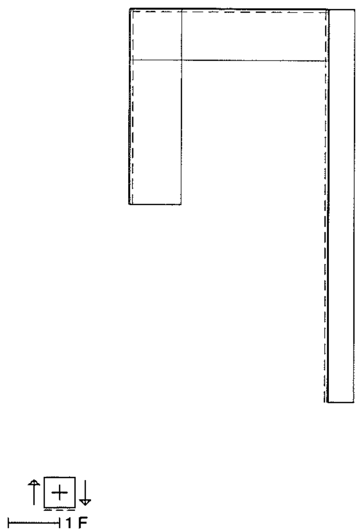
$W_B = -W = -Fb$
x_{DC}

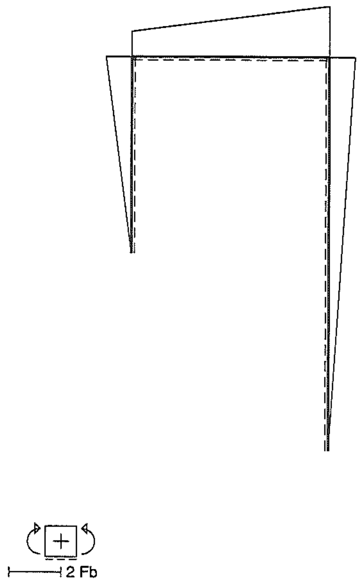
x_{CB}
x_{BA}

Verso effettivo dei carichi riportato nel disegno.
Calcolare reazioni vincolari della struttura e delle aste.
Tracciare i diagrammi delle azioni interne nelle aste.
Esprimere le funzioni delle azioni interne nelle aste.
J_{AB} x_{AB} ϑ_{AB} riferimento locale asta AB con origine in A.

MANTENERE I RISULTATI IN FORMA FRAZIONARIA

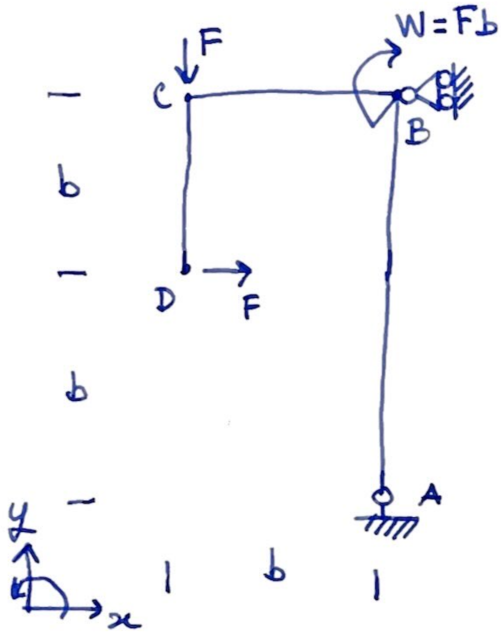






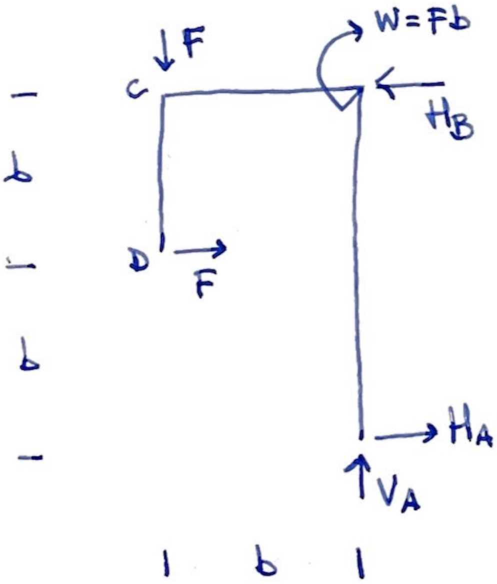
ESERCIZIO 1

Consideriamo la struttura di aste in figura. Si noti



preventivamente che GDL = 3 e i due vincoli, vincolo doppio in A e vincolo semplice in B, forniscono GDV = 2 + 1 = 3 QUINDI la struttura è isostatica. Inoltre, i vincoli sono cinematicamente ben disposti e quindi la struttura non è labile.

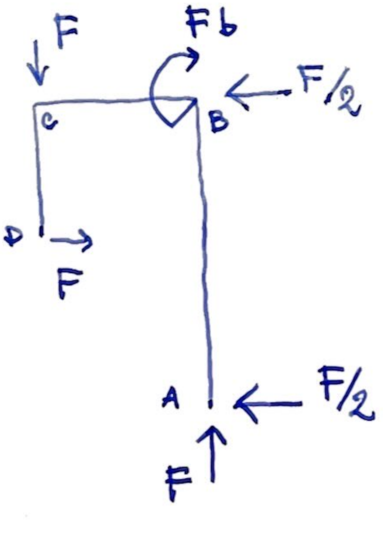
IL DIAGRAMMA di corpo libero risulta essere:



Applicando le equazioni cardinali della statica al diagramma di corpo libero, si ottiene

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} F_{(D)} - H_B + H_A = 0 \\ -F_{(C)} + V_A = 0 \\ -F_{(D)} b + F_{(C)} b - Fb + H_B 2b = 0 \end{cases}$$

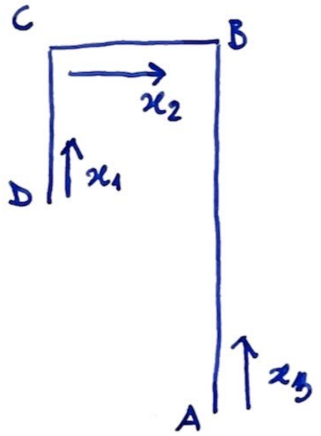
$$\begin{cases} H_A = H_B - F \\ V_A = F \\ H_B 2b = Fb \end{cases} ; \quad \begin{cases} H_A = -F/2 \\ V_A = F \\ H_B = F/2 \end{cases}$$



Possiamo rappresentare graficamente questa soluzione come fatto nel disegno a sinistra

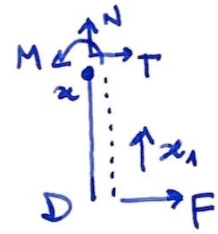
Per lo studio delle azioni interne ~~introduciamo~~ scomporremo la struttura nei tre rami che la compongono.

Introduciamo tre ascisse locali sulle tre aste che compongono la struttura. Per calcolare le azioni interne considereremo i seguenti tre casi



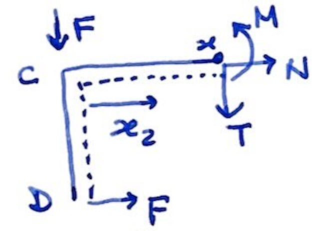
I : $D \rightarrow C$

$0 < x_1 < b$



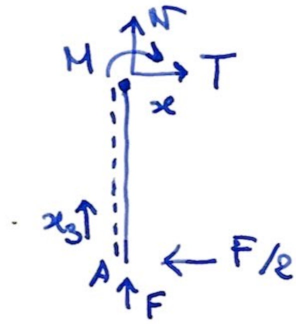
II : $C \rightarrow B$

$0 < x_2 < b$



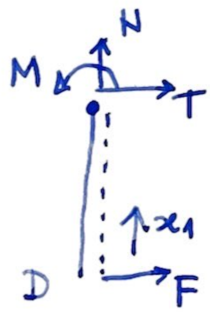
III : $A \rightarrow B$

$0 < x_3 < 2b$



$D \rightarrow C$

$0 < x_1 < b$



(I) Scriviamo le equazioni cardinali della statica usando assi paralleli e normali all'asta

$$\begin{cases} \uparrow R_{\parallel} = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \end{cases}$$

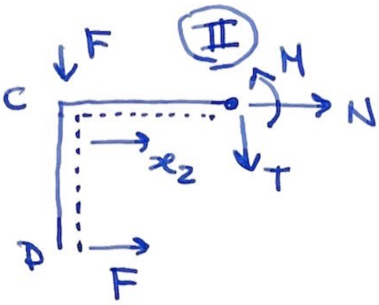
$$\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ F + T(x_1) = 0 \\ M(x_1) + F x_1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x_1) = 0 \\ T(x_1) = -F \\ M(x_1) = -F x_1 \end{cases}$$

Si noti che il valore del momento, che, come ci aspettavamo, è lineare, negli estremi è dato da

$$\begin{cases} M(x_1 = 0) = 0 \\ M(x_1 = b) = -Fb \end{cases}$$

$C \longrightarrow B$

$0 < x_2 < b$

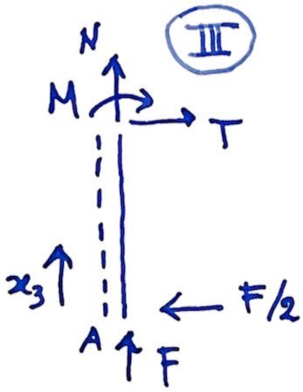


$$\begin{cases} \to R_{\parallel} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F + N(x_2) = 0 \\ -F - T(x_2) = 0 \\ M(x_2) + Fb + F x_2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x_2) = -F \\ T(x_2) = -F \\ M(x_2) = -F(b + x_2) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} M(x_2 = 0) = -Fb \\ M(x_2 = b) = -2Fb \end{cases}$$

$A \longrightarrow B$

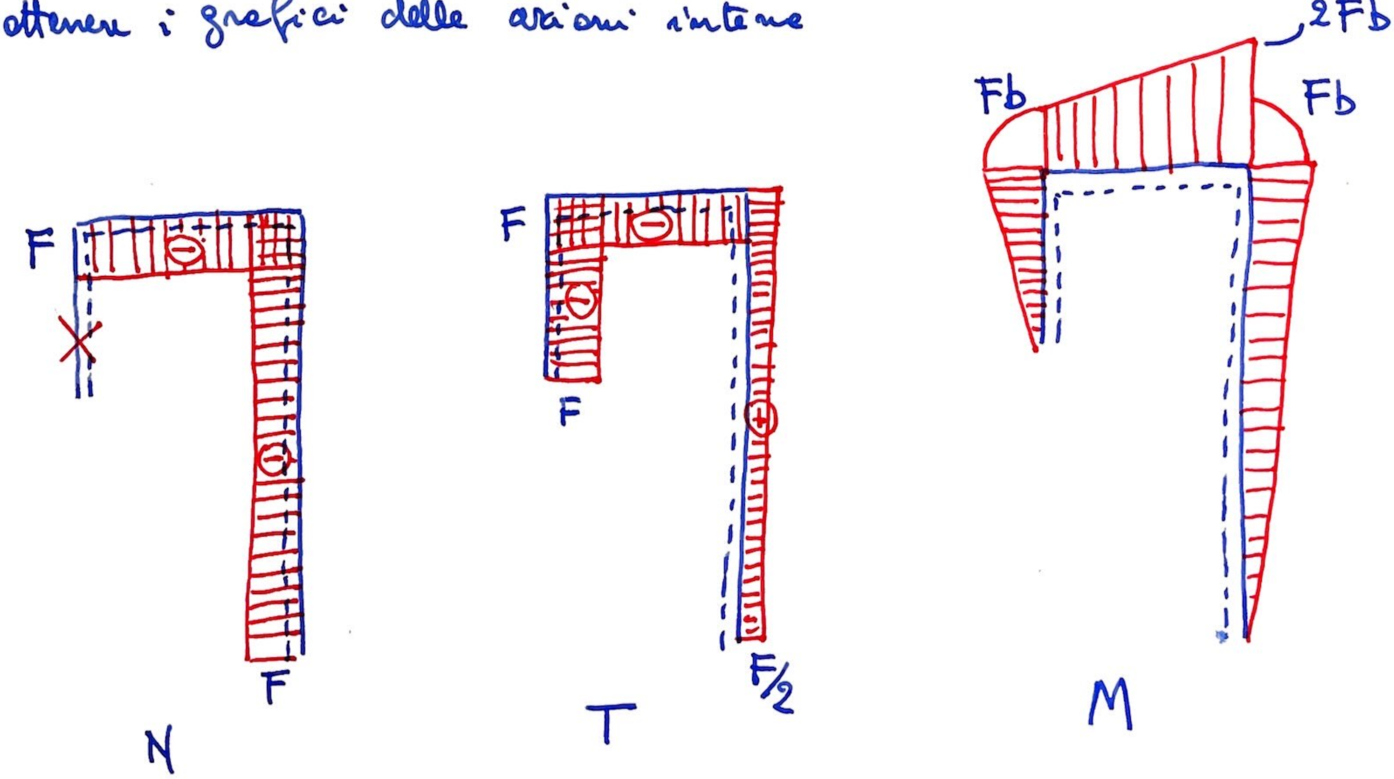
$0 < x_3 < 2b$



$$\begin{cases} \uparrow R_{\parallel} = 0 \\ \to R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F + N(x_3) = 0 \\ -F/2 + T(x_3) = 0 \\ -F/2 \, x_3 - M(x_3) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x_3) = -F \\ T(x_3) = F/2 \\ M(x_3) = -F/2 \, x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} M(x_3 = 0) = 0 \\ M(x_3 = 2b) = Fb \end{cases}$$

ADESSO possiamo ricomporre i risultati ottenuti in I, II e III per ottenere i grafici delle azioni interne



REAZIONI

$H_A = -1/2F$
$V_A = F$
$H_B = -1/2F$

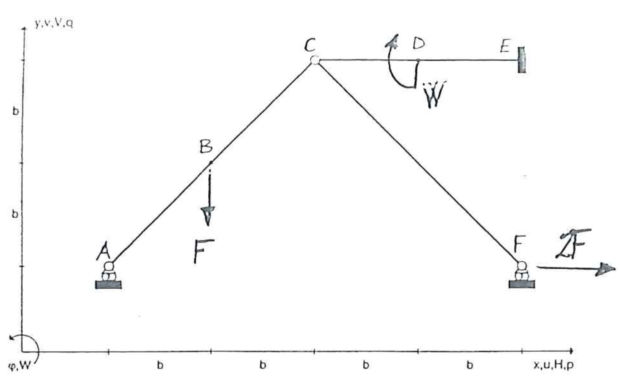
$H_{DC} = F$	$H_{CB} = F$	$H_{BA} = 1/2F$
$V_{DC} = 0$	$V_{CB} = -F$	$V_{BA} = -F$
$W_{DC} = 0$	$W_{CB} = Fb$	$W_{BA} = Fb$
$H_{CD} = -F$	$H_{BC} = -F$	$H_{AB} = -1/2F$
$V_{CD} = 0$	$V_{BC} = F$	$V_{AB} = F$
$W_{CD} = -Fb$	$W_{BC} = -2Fb$	$W_{AB} = 0$

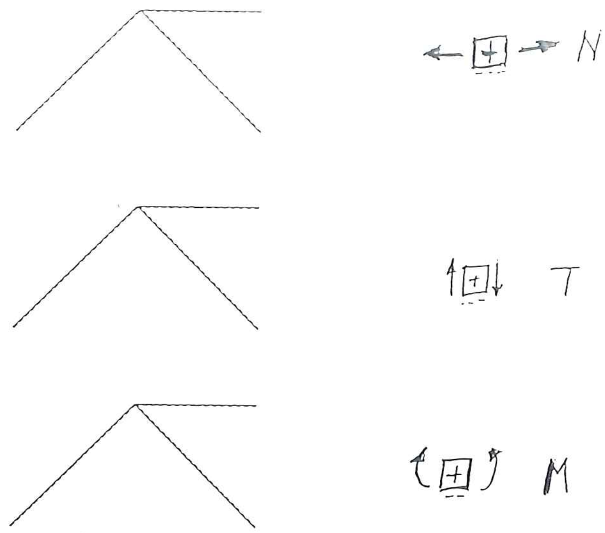
AZIONI INTERNE (coordinate locali)

$N_{DC} = 0$	$N_{CB} = -F$	$N_{BA} = -F$
$T_{DC} = -F$	$T_{CB} = -F$	$T_{BA} = 1/2F$
$M_{DC} = -Fx$	$M_{CB} = -Fb -Fx$	$M_{BA} = -Fb +1/2Fx$

Esercizio n.1 (9 punti)

Risolvere la struttura presentata in Figura e riportare in grafico e per iscritto le azioni interne nei tratti indicati.





W = Fb

$V_A =$ ....; $V_F =$ ....; $M_E =$..........................; $V_E =$..........................;

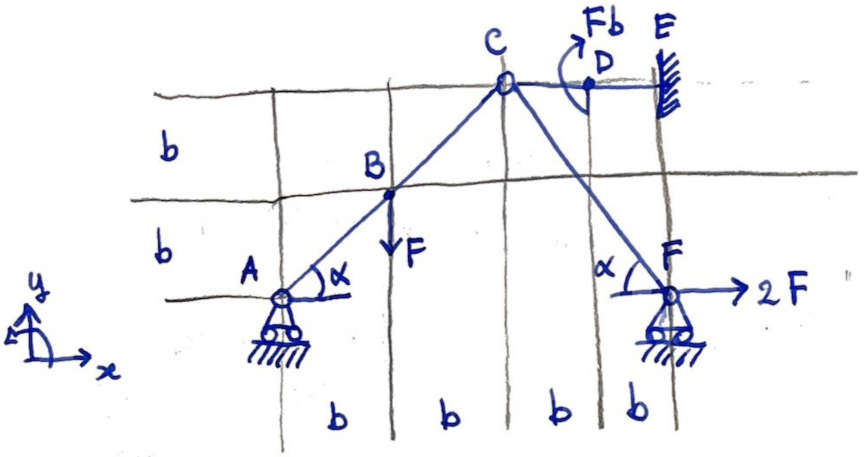
$N_{AB} =$ ....; $N_{BC} =$ ....; $N_{CE} =$..........................; $N_{CF} =$..........................;

$T_{BC} =$ ....; $T_{CD} =$ ....; $T_{CF} =$ ....;

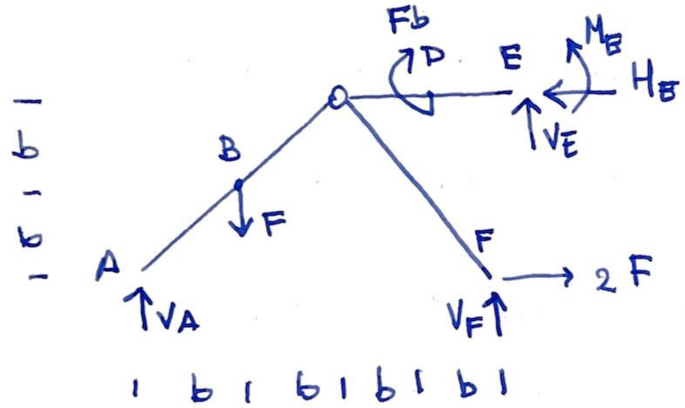
$M_{CF} =$ ....; $M_{ED} =$ ....; $M_{DC} =$ ....

1/1

ESERCIZIO 2 Consideriamo la seguente struttura



Studiamo il diagramma di corpo libero associato a tale struttura per poter usare poi le equazioni cardinali della statica



Le equazioni cardinali della statica sono dunque

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(E)} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -H_E + 2F_{(F)} = 0 \\ V_A + V_E + V_F - F_{(B)} = 0 \\ -Fb + M_E + F_{(B)}3b - V_A 4b + 2F_{(F)}2b = 0 \end{cases} ;$$

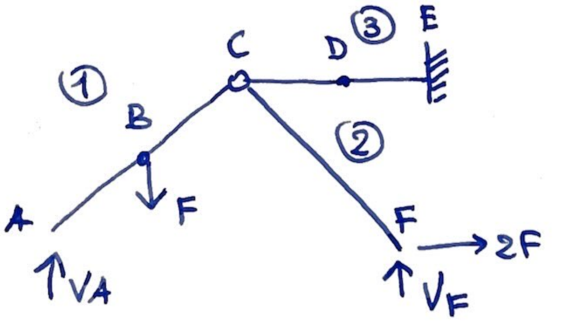
che possono essere facilmente riscritte come

$$\begin{cases} H_E = 2F \\ V_A = F - V_E - V_F \\ M_E = -4b(V_E + V_F) - 2Fb \end{cases}$$

È EVIDENTE che questo sistema non può essere risolto nella forma attuale, perché vi sono 5 incognite ($H_E, V_A, V_E V_F, M_E$) ma solo tre equazioni.

DOBBIAMO TROVARE ALTRE 2 EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI

A TALE SCOPO utilizziamo il metodo delle equazioni ausiliarie. Nello specifico, osserviamo che nella cerniera in C il momento $M_{z(C)}$ deve essere nullo e, quindi, possiamo studiare il momento rispetto al polo fissato in C sui due rami della struttura ① e ②:



$$\begin{cases} M^{①}_{z(C)} = 0 \\ M^{②}_{z(C)} = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI AUSILIARIE

$M^{①}_{z(C)}$: $V_A\, 2b - Fb = 0 \Rightarrow V_A = F/2$

$M^{②}_{z(C)}$: $2F\, 2b + V_F\, 2b = 0 \Rightarrow V_F = -2F$

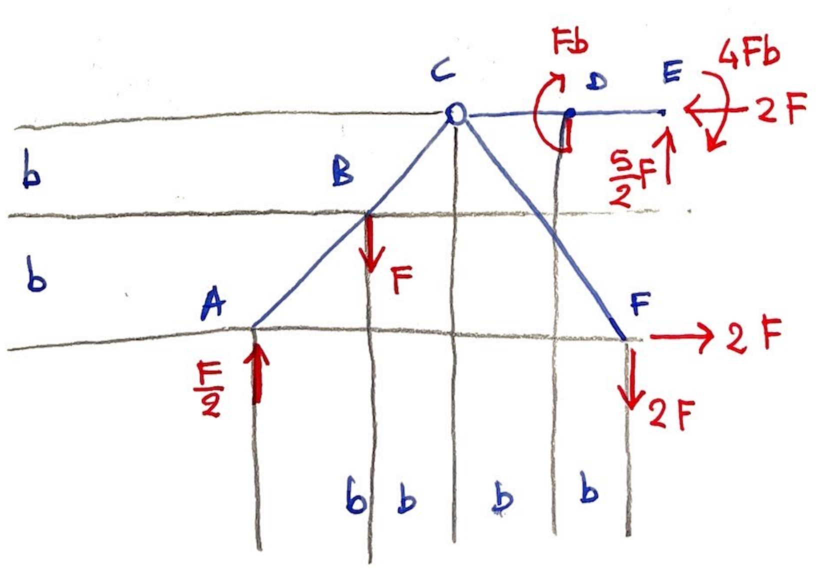
POSSIAMO aggiungere queste due equazioni al sistema delle equazioni cardinali della statica completandolo

$$\begin{cases} H_E = 2F \\ V_A = F - V_E - V_F \\ M_E = -4b(V_E + V_F) - 2Fb \\ V_A = F/2 \\ V_F = -2F \end{cases}$$

che può essere risolto per sostituzione fornendo

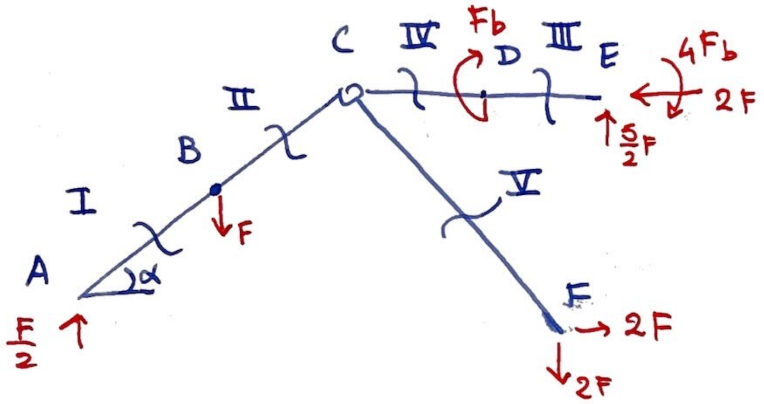
$$\begin{cases} H_E = 2F \\ V_A = F/2 \\ V_E = \frac{5}{2}F \\ V_F = -2F \\ M_E = -4Fb \end{cases}$$

QUESTA soluzione può essere rappresentata graficamente come segue



STUDIO DELLE AZIONI INTERNE

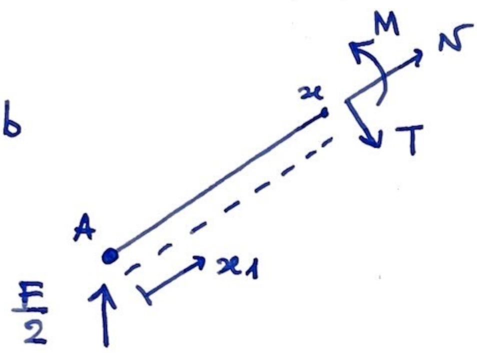
PER STUDIARE le azioni interne conviene scegliere le partizioni mostrate nelle figure



NOTA: per il seguito si noti che $\overline{AC}$ è la diagonale di un quadrato di lato $2b$. PERQUESTA ragione, l'angolo α vale $\frac{\pi}{4}$. La lunghezza di $\overline{AC}$ è quindi $2\sqrt{2}\,b$. DAQUESTA osservazione di carattere geometrico si possono dedurre tutte le lunghezze e le proiezioni necessarie.

I: $A \longrightarrow B$

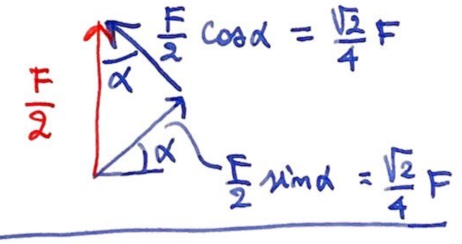
$0 < x_1 < \sqrt{2}\,b$



$$\begin{cases} \nearrow R_{//} = 0 \\ \nwarrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x_1)} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}F + N(x_1) = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4}F - T(x_1) = 0 \\ M(x_1) - \frac{\sqrt{2}}{4}F x_1 = 0 \end{cases}$$

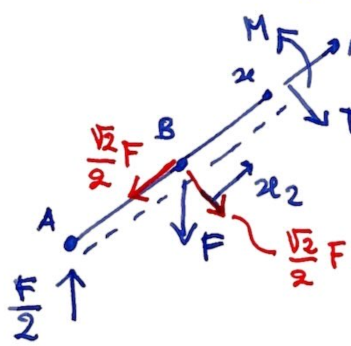
$$\begin{cases} N(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}F \\ T(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{4}F \\ M(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{4}F x_1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} M(x_1=0) = 0 \\ M(x_1=\sqrt{2}\,b) = \frac{Fb}{2} \end{cases}$$

NOTA 2: per quanto detto sopra, si ha che la reazione in A, $\frac{F}{2}$, può essere decomposta lungo due assi, parallelo e ortogonale al tratto di trave, come segue ($\alpha = \frac{\pi}{4}$)



II: $B \longrightarrow C$

$0 < x_2 < \sqrt{2}\,b$



[VEDI NOTA 2]

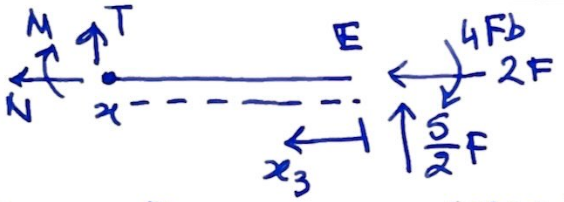
$$\begin{cases} M(x_2=0) = \frac{Fb}{2} \\ M(x_2=\sqrt{2}\,b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nearrow R_{//} = 0 \\ \nwarrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x_2)} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x_2) - \frac{\sqrt{2}}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{4}F = 0 \\ -T(x_2) - \frac{\sqrt{2}}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{4}F = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}F\left[\sqrt{2}\,b + x_2\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}F x_2 + M(x_2) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}F \\ T(x_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \\ M(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{4}F\left[\sqrt{2}\,b - x_2\right] \end{cases}$$

con

III: $E \longrightarrow D$

$0 < x_3 < b$

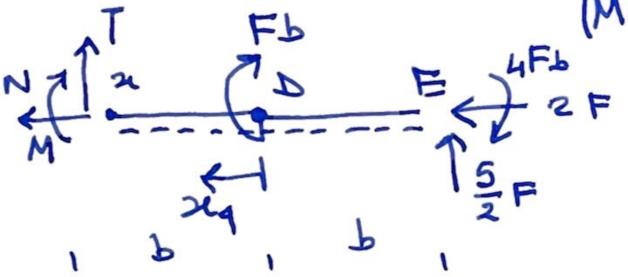


$$\begin{cases} \rightarrow R_{\parallel} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x_3)} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -N(x_3) - 2F = 0 \\ T(x_3) + \frac{5}{2}F = 0 \\ -M(x_3) - 4Fb + \frac{5}{2}F x_2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x_3) = -2F \\ T(x_3) = -\frac{5}{2}F \\ M(x_3) = -4Fb + \frac{5}{2}F x_2 \end{cases}$$

con $\begin{cases} M(x_3 = 0) = -4Fb \\ M(x_3 = b) = -\frac{3}{2}Fb \end{cases}$

IV: $D \longrightarrow C$

$0 < x_4 < b$

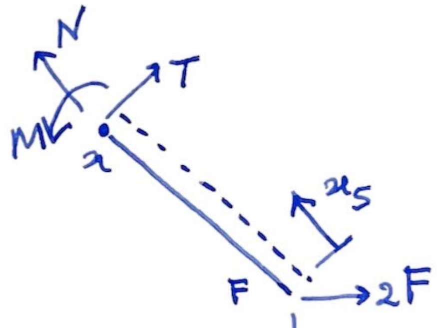


$$\begin{cases} \rightarrow R_{\parallel} = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x_4)} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -N(x_4) - 2F = 0 \\ T(x_4) + \frac{5}{2}F = 0 \\ -M(x_4) - Fb - 4Fb + \frac{5}{2}F\left[b + x_4\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(x_4) = -2F \\ T(x_4) = -\frac{5}{2}F \\ M(x_4) = -\frac{5}{2}Fb + \frac{5}{2}F x_4 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} M(x_4 = 0) = -\frac{5}{2}Fb \\ M(x_4 = b) = 0 \end{cases}$$

V: $F \rightarrow C$

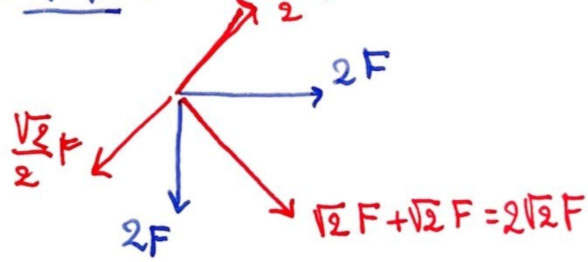
$0 < x_5 < 2\sqrt{2}\, b$



$$\begin{cases} \nwarrow R_{\parallel} = 0 \\ \nearrow R_{\perp} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x_5)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N(x_5) - 2\sqrt{2}F = 0 \\ T(x_5) = 0 \\ M(x_5) = 0 \end{cases}$$

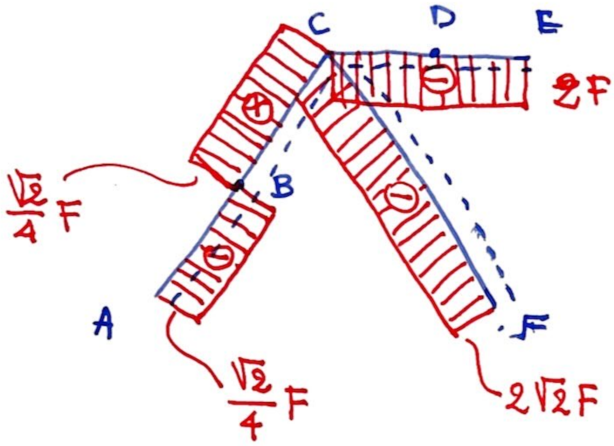
$$\begin{cases} N(x_5) = 2\sqrt{2}F \\ T(x_5) = 0 \\ M(x_5) = 0 \end{cases}$$

<u>NOTA</u>:

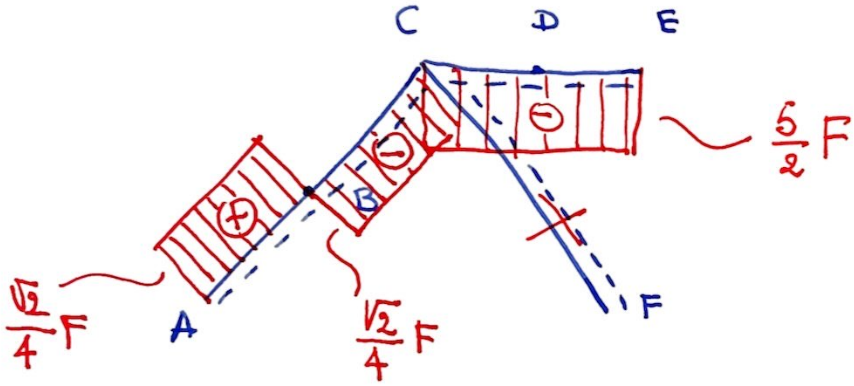


Quindi sull'asse trasversale le due componenti si annullano, mentre su quello longitudinale si addizionano

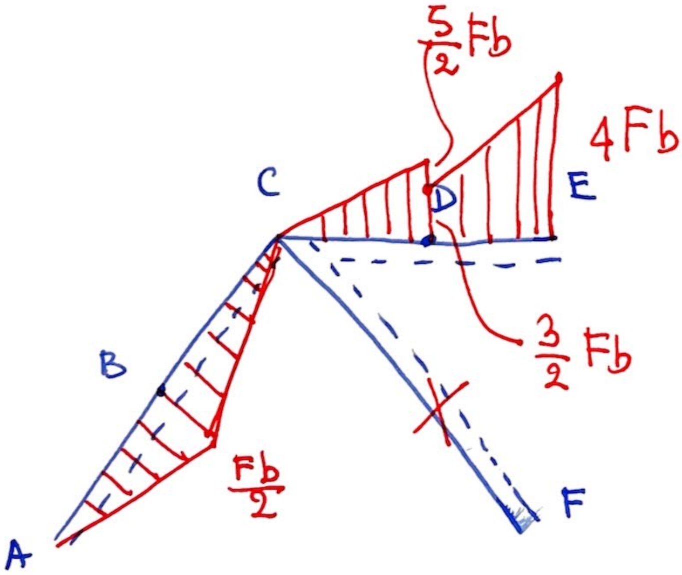
DISEGNAMO, infine, le azioni interne collegando i risultati ottenuti negli studi sui rami I - V :



N



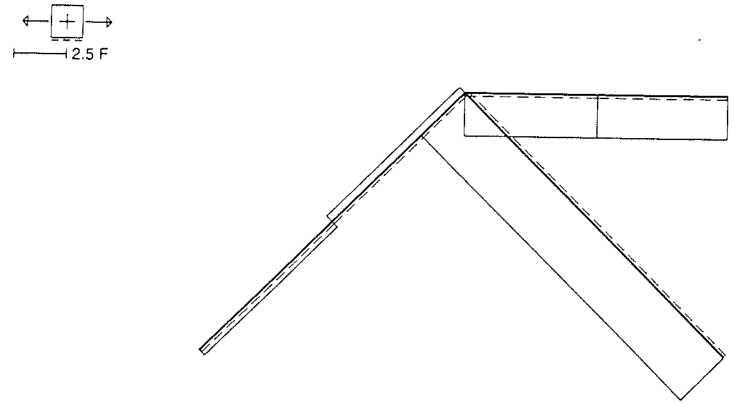
T

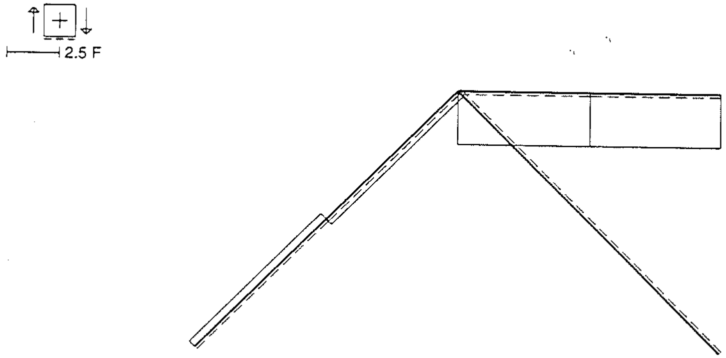


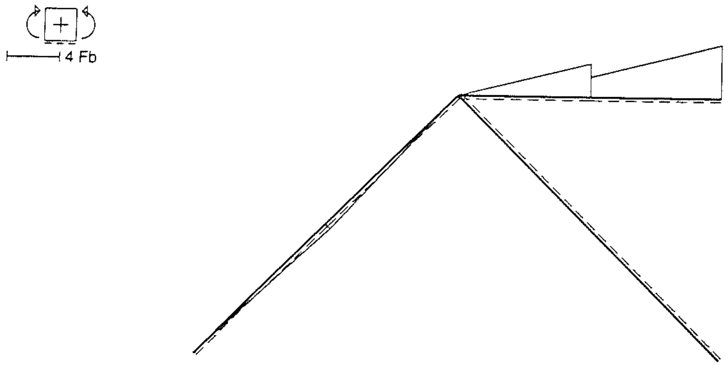
M

DIAGRAMMI AZIONI INTERNE

TePCS2 14.11.02*009







RISULTATI NUMERICI

TePCS2 14.11.02*009

AZIONI INTERNE (coordinate locali)

$N_{AB} = -\sqrt{2}/4F$
$T_{AB} = \sqrt{2}/4F$
$M_{AB} = \sqrt{2}/4Fx$

$N_{BC} = \sqrt{2}/4F$
$T_{BC} = -\sqrt{2}/4F$
$M_{BC} = 1/2Fb - \sqrt{2}/4Fx$

$N_{CD} = -2F$
$T_{CD} = -5/2F$
$M_{CD} = -5/2Fx$

$N_{DE} = -2F$
$T_{DE} = -5/2F$
$M_{DE} = -3/2Fb - 5/2Fx$

$N_{FC} = 2\sqrt{2}F$
$T_{FC} = 0$
$M_{FC} = 0$