Tratto da: L. Amerio - Analisi algebrica - Genova: Di Stefano 1970

ri assunti da r variabili complesse ordinate $x_1, \dots, x_r$. I numeri $x_1, \dots, x_r$ costituiscono le *coordinate di un punto* di tale spazio. Perciò lo spazio S_r complesso coincide con lo spazio S_{2r} reale $(x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_r, x''_r)$ avendo posto

$$x_h = x'_h + i\, x''_h \quad .$$

È noto poi dalla Geometria Analitica come ai punti di uno spazio S_r così definito sia conveniente aggiungerne degli altri, detti *punti impropri*, con il seguente procedimento. Si introducano $r+1$ variabili $y_1, y_2, \dots, y_r, t$. Se $(x_1, \dots, x_r)$ è un punto qualsiasi di S_r, possiamo scrivere la sua coordinata x_h nella forma $x_h = \frac{y_h}{t}$; basta infatti attribuire a t un valore non nullo e porre $y_h = t\, x_h$.

Per ogni punto P di S_r vengono in tal modo determinati *i rapporti* $\frac{y_1}{t}, \frac{y_2}{t}, \dots, \frac{y_r}{t}$, con $t \neq 0$. Le quantità $y_1, y_2, \dots, y_r, t$ si chiamano le *coordinate omogenee* del punto P; due gruppi $y'_1, \dots, y'_r, t'$ e $y''_1, \dots, y''_r, t''$ sono da considerarsi equivalenti se rappresentano il medesimo punto: in tal caso risulta

$$y''_1 = \rho\, y'_1, \ \dots, \ y''_r = \rho\, y'_r, \ t'' = \rho\, t'$$

essendo ρ una costante non nulla. Si noti inoltre che i numeri $y_1, \dots, y_r, t$ non sono tutti nulli perchè è $t \neq 0$.

Consideriamo ora *la totalita' delle $(r+1)$-ple ordinate di numeri complessi non tutti nulli $y_1, \dots, y_r, t$, dove due gruppi sono da considerarsi equivalenti quando sono proporzionali. Questa totalita' si chiama lo spazio proiettivo complesso a r dimensioni*. Indicandolo con S'_r è chiaro che esso contiene lo spazio S_r. In S'_r, oltre ai punti di S_r, si sono considerati i punti del tipo $(x_1, \dots, x_r, 0)$ dove le x_i non sono tutte nulle.

Questi punti si chiamano *punti impropri* di S_r, o anche *punti all'infinito*, non coincidendo con alcun punto al finito.

Si chiama *ipersuperficie* T di ordine n dello spazio S_r la totalità dei punti di S_r le cui coordinate annullino un polinomio $f(x_1, \dots, x_r)$ di grado n. Se si passa a coordinate omogenee ponendo $\frac{y_h}{t}$ in luogo di x_h e moltiplicando poi per t^n,

si ottiene un polinomio le cui radici, distinte da quella nulla, definiscono per $t \neq 0$ gli stessi punti della ipersuperficie T: in più, per $t = 0$ (ma supponendo le y_h non tutte nulle) si ottengono i punti impropri, o all'infinito, di T.

I procedimenti indicati nei §§ 16 e 17 ci hanno dato il modo di trovare i punti comuni a due curve di S_2 o a p ipersuperficie di S_r.

Gli stessi procedimenti permettono di trovare, considerando i sistemi omogenei, gli eventuali punti impropri comuni.

In particolare il teorema di Bezout afferma che *due curve del piano proiettivo S_2, prive di parti comuni, si intersecano in nm punti (propri o impropri) distinti o coincidenti, valutandosi in un modo conveniente la molteplicita' di intersezione in un dato punto.*

Precisamente se il sistema (122) ha $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ come radice multipla di ordine λ, si dirà che nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ le due curve di equazioni rispettive $f(x,y,t) = 0$, $g(x,y,t) = 0$ hanno *molteplicita' di intersezione* λ.

Considerazioni analoghe si possono fare per i sistemi di m equazioni omogenee in $m+1$ incognite, in virtù dell'osservazione che segue il § 18.

20) - RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI TERZO E DI QUARTO GRADO.

Cominciamo con l'osservare che *un'equazione di grado n*:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \ , \tag{143}$$

puo' sempre trasformarsi, con un conveniente cambiamento di incognita, *in un'altra equazione di grado n in cui sia nullo il coefficiente di x^{n-1}.*

Basta infatti porre

$$x = y - \frac{a_1}{n a_0} \quad .$$

per ricavare dalla (143)

$$a_0(y - \frac{a_1}{na_0})^n + a_1(y - \frac{a_1}{na_0})^{n-1} + \dots + a_n =$$

$$= a_0(y^n - y^{n-1}\frac{a_1}{a_0} + \dots) + a_1(y^{n-1} - \dots) + \dots + a_n =$$

$$= b_0\, y^n + b_2\, y^{n-2} + \dots + b_n = 0\,,$$

avendo indicato con $b_0 = a_0$, b_2, ..., b_n delle costanti.

a) - *Risoluzione dell'equazione di terzo grado.*

La formula risolutiva dell'equazione di terzo grado, che scriveremo, per quanto precede, nella forma

(144) $$x^3 + p\,x + q = 0\,,$$

fu data nel 1515 dal bolognese Scipione Dal Ferro e, successivamente, dal Tartaglia: il primo che la pubblicò fu il Cardano. Il procedimento di risoluzione che esporremo è quello di Hudde, coincidente in sostanza co quello di Tartaglia.

Si ponga nella (144)

(145) $$x = u + v\,,$$

essendo u e v due nuove indeterminate. Si ricava allora dalla (144):

(146) $$u^3 + v^3 + (3\,u\,v + p)\,(u + v) + q = 0\,.$$

La (145) dà, in funzione di x, il valore della somma $u + v$. Determiniamo il prodotto $u\,v$ con la condizione

$$3\,u\,v + p = 0\,,$$

cioè

(147) $$u\,v = -\frac{p}{3}\,.$$

In tal modo la (146) diventa

(148) $$u^3 + v^3 + q = 0\,.$$

Dalle (147),(148) segue che i due numeri u^3, v^3 sono le radici dell'equazione di secondo grado (*risolvente di Hudde*)

$$z^2 + q\,z - \frac{p^3}{27} = 0\,.$$

Ne segue

(148′)
$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,,$$

e quindi, per la (145),

(149) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.$$

Si osservi che ciascuno dei due radicali cubici a secondo membro della (149) ha tre valori. Essi non sono però indipendenti, ciò che condurrebbe a nove valori per la x; infatti, a causa della (147), fissato u, v resta determinato dalla formula

(150) $$v = -\frac{p}{3\,u}\,.$$

Si ottengono in tal modo le tre radici dell'equazione (144).

L'espressione

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\,,$$

che abbiamo già incontrata (§ 15), è (a meno del fattore 108) il *discriminante del* polinomio $x^3 + p\,x + q$: con il suo annullarsi, ci dà perciò la condizione necessaria e sufficiente affinché nell'equazione (144) almeno due radici siano coincidenti.

Esaminiamo ora i casi che possono presentarsi supponendo p, q *reali*.

a) - $\Delta > 0$; in tal caso

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

è reale. Si ottengono per u tre valori: uno, u_1, reale e gli altri due complessi coniugati, risultando precisamente

$$u_2 = u_1 \, e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad , \qquad u_3 = u_1 \, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Si ricavano così, per la (150), le tre radici

$$x_1 = u_1 + v_1 = u_1 - \frac{p}{3u_1}$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = u_1 \, e^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{p}{3u_1} \, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = u_1 \, e^{-i\frac{2\pi}{3}} - \frac{p}{3u_1} \, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Perciò *la radice x_1 e' reale, le radici x_2 e x_3 sono complesse coniugate* (si noti che x_2 e x_3 sono effettivamente complesse perchè, se fossero reali, coinciderebbero e sarebbe $\Delta = 0$).

b) $-\Delta < 0$. In tal caso $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta}$,

$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\Delta}$ sono numeri complessi coniugati e risulta, per le (148'),

$$|u^3| = \left| -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta} \right| = \left| -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\Delta} \right| = |v^3|$$

e quindi

(150') $$|u| = |v| \quad .$$

Dalla condizione $\Delta < 0$, segue $p < 0$; posto allora

$$u = \rho \cdot e^{i\theta} \quad ,$$

si desume dalle (150) e (150')

$$v = \frac{|p|}{3\rho} \, e^{-i\theta} = |u| \, e^{-i\theta} \quad .$$

cioè v è il complesso coniugato di u.

Ai valori u_1, u_2, u_3 corrispondono allora valori v_1, v_2, v_3 che ne sono i complessi coniugati. Perciò *le tre radici x_1, x_2, x_3 sono reali.*

c) $-\Delta = 0$. In tal caso esiste almeno una radice doppia, necessariamente reale. Allora è reale anche la terza radice, la quale può inoltre venire a coincidere con le altre due.

Si noti che *proprio nel caso in cui le tre radici dell'equazione sono reali la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado conduce a operazioni su numeri complessi* (a differenza di quel che avviene per le equazioni di secondo grado): è stato anzi dimostrato dal Capelli che è impossibile ottenere un'altra formula risolutiva (nella quale le soluzioni si ricavino dai coefficienti con operazioni razionali e di estrazione di radici) con cui le operazioni su numeri complessi siano evitate.

Il caso $\Delta < 0$, detto dal Bombelli *il caso irriducibile*, fornisce, per tale motivo, uno dei più validi argomenti per l'uso degli immaginari in Matematica.

Osservazione. - Si può evitare, nel caso $\Delta < 0$, l'uso degli immaginari nel modo seguente. Si ponga

$$-\frac{1}{2} q + \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} q + i\sqrt{-\Delta} = \rho(\cos\phi + i \sin\phi) \ ,$$

con $0 < \phi < \pi$.

Ne segue

$$tg\,\phi = -\frac{2\sqrt{-\Delta}}{q}$$

e quindi l'angolo ϕ, compreso tra 0 e π, risulta individuato. È inoltre

$$\rho = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \quad ,$$

cioè anche ρ è determinato.

Si ha pertanto

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \rho^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\phi}{3} + i \sin\frac{\phi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\frac{\phi}{3} + i \sin\frac{\phi}{3}\right),$$

e quindi

$$u_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\frac{\phi + 2\pi}{3} + i \sin\frac{\phi + 2\pi}{3}\right),$$

$$u_3 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\frac{\phi - 2\pi}{3} + i \sin\frac{\phi - 2\pi}{3}\right)$$

da cui

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\phi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Questo procedimento è dovuto a Viète.

b) - *Risoluzione dell'equazione di quarto grado.*

Le equazioni di quarto grado furono risolte dal Ferrari, discepolo di Cardano.

Consideriamo l'equazione di quarto grado nella forma

$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0, \tag{151}$$

cui può sempre ridursi, per quanto si è precedentemente dimostrato.

Procediamo ora in modo analogo a quello tenuto per le equazioni di terzo grado: si ponga cioè

$$x = u + v + w, \tag{152}$$

con u, v, w nuove indeterminate. Elevando a quadrato due volte

di seguito si ricava

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + vw + wu),$$

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) +$$

$$+ 8uvw(u + v + w).$$

Affinchè questa equazione e la (151) coincidano occorre e basta che sia, per la (152),

$$-2(u^2 + v^2 + w^2) = p$$

$$-8uvw = q$$

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) = r,$$

da cui segue

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}$$

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}$$

$$u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}$$

Perciò i tre numeri u^2, v^2, w^2 sono le radici dell'equazione di terzo grado *(risolvente di Eulero)*

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r) z - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Indicate con z_1, z_2, z_3 le radici di questa equazione, si ha

$$z_1 = u^2, \qquad z_2 = v^2, \qquad z_3 = w^2.$$

Ne segue, per la (152),

$$x = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$