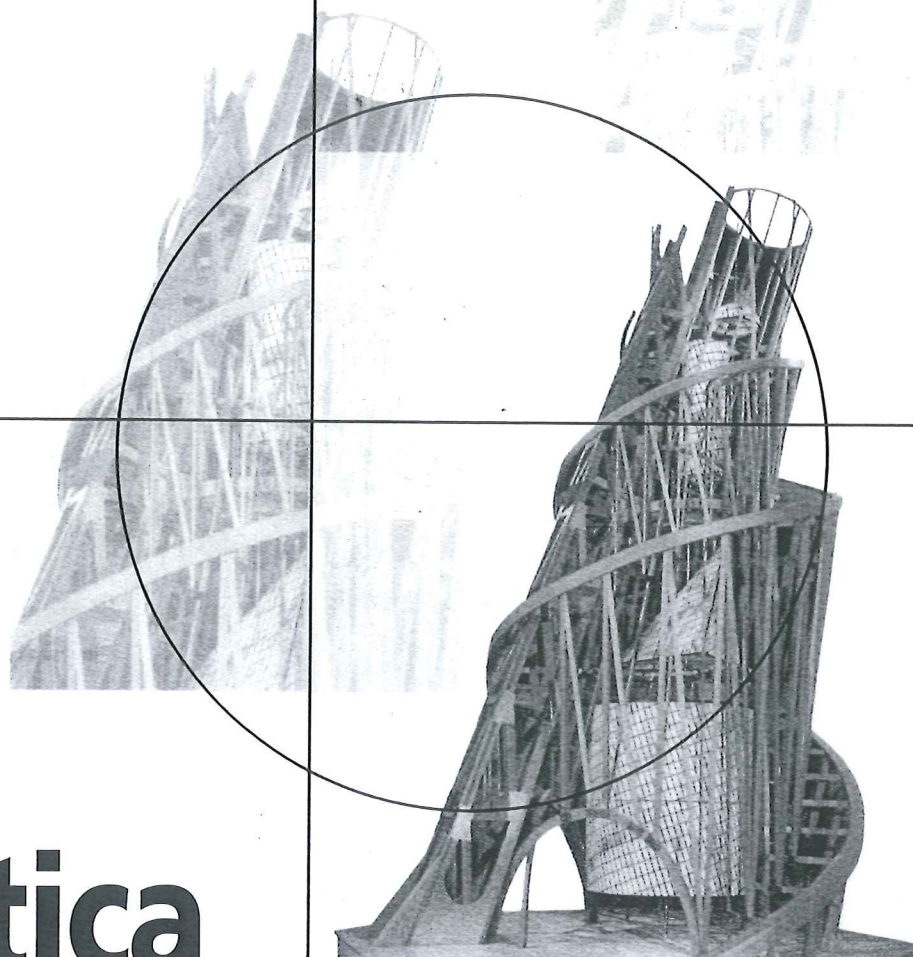


Elisa Guagenti  
Fernanda Buccino  
Elsa Garavaglia  
Giorgio Novati



# Statica

## Fondamenti di meccanica strutturale

---

Seconda edizione

**McGraw-Hill**

**Riassumendo:** un sistema di forze a risultante  $\mathbf{R} \neq 0$  è equivalente alla sola risultante, applicata sull'asse centale, se è l'invariante scalare  $I \neq 0$ .

Esempi cospicui ne sono le forze piane e le forze parallele. Per queste ultime è definito, sull'asse centrale, un punto  $O$  detto *centro delle forze parallele* che dipende solo dal modulo e dal punto di applicazione delle forze, non dalla direzione, secondo la (3.14).

Nel caso in cui le forze parallele siano i pesi, tale centro si dice baricentro. Esso non dipende neppure dalla gravità. Si dice perciò anche *centro di massa* e per corpi omogenei coincide con il baricentro geometrico. In termini del tutto generali l'asse centrale (se è  $I = 0$ ) è definito dalle (3.11). Un metodo grafico nel piano per costruire la retta d'applicazione della risultante è costituito dal metodo del *poligono funicolare*.

*momento di un sistema di forze è il momento della risultante applicata all'asse centrale, purché esso sia luogo di momento nullo*

### 3.9 Postulati della Statica del corpo rigido ed equazioni cardinali

Vediamo ora quali siano le condizioni caratteristiche per l'equilibrio di un corpo rigido, intendendo ancora, ovviamente, che *equilibrio significa mantenimento della quiete in un sistema di riferimento inerziale*.

Anche ora, come a proposito del punto materiale, dobbiamo fare affidamento su proposizioni assiomatiche iniziali che l'esperienza induce ad accettare come credibili ai fini dell'analisi che ci si propone di svolgere.

Non sarebbe necessario introdurre postulati specifici per il corpo rigido. Vedremo nel Capitolo 4 come la Statica del corpo rigido potrebbe trovare collocazione nella formulazione conseguente al Principio dei Lavori Virtuali; oppure essa potrebbe ricavarsi come caso particolare della Dinamica dei sistemi.

Tuttavia, per una trattazione semplice e vicina all'intuito fisico, la Statica del corpo rigido viene spesso introdotta con suoi specifici postulati. Sono i tre seguenti.

- 1) Se su di un corpo rigido in quiete non agisce *nessuna forza esterna*, il corpo persevera nel suo stato di quiete.
- 2) Se agisce *una sola forza esterna* il corpo non persevera nel suo stato di quiete.
- 3) Se agiscono due forze esterne, il corpo persevera nel suo stato di quiete *se e solo se le due forze sono opposte e allineate*.

Per quanto semplici e convincenti, anche questi postulati danno luogo a qualche considerazione critica, specialmente nei riguardi del primo, in quanto è ben difficile predisporre un'esperienza in assenza di qualunque forza. Tralasciando le questioni epistemologiche vediamo come questi postulati, assieme al teorema fondamentale sull'equivalenza, consentano di enunciare le

■ *condizioni caratteristiche per l'equilibrio di un corpo rigido libero:* consistono nell'essere nulli risultante e momento (rispetto a un generico punto  $A$ ) delle forze esterne applicate al corpo rigido:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = 0 \\ \mathbf{M}_A = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

La condizione è sufficiente: infatti se le (3.21) sono soddisfatte il sistema delle forze esterne è equivalente al sistema nullo e l'equilibrio sussiste per il primo postulato. La condizione è necessaria: se infatti fosse

$$\mathbf{R} = 0 \text{ ed } \mathbf{M} \neq 0$$

il sistema sarebbe equivalente a una coppia e l'equilibrio non sussisterebbe per il terzo postulato; se fosse  $\mathbf{R} \neq 0$  il sistema potrebbe essere equivalente o a una sola forza o a forza più coppia; entrambi i casi non sarebbero di equilibrio per il secondo e per il terzo postulato (l'insieme di forza più coppia è equivalente a due forze che non sono opposte e allineate).



Se le (3.21) sono soddisfatte il momento è nullo rispetto a qualunque polo. Infatti, se è  $\mathbf{R} = 0$  il momento è invariante al variare del polo.

*Condizione caratteristica significa condizione necessaria e sufficiente*

■ Le (3.21) si dicono *equazioni cardinali della Statica* (si indicheranno a volte con EC). Esse sono necessarie e sufficienti per l'equilibrio del corpo rigido; inoltre, sono necessarie per l'equilibrio di qualunque sistema materiale.

Vale infatti il *postulato dell'irrigidimento*:

■ Se un qualunque sistema materiale è in equilibrio sotto l'azione di certe forze esterne, resta in equilibrio, sotto l'azione delle stesse forze, qualora si aggiunga il vincolo dell'irrigidimento.

In altre parole: se le equazioni cardinali non sono soddisfatte l'equilibrio non può sussistere, qualunque sia il sistema materiale.

Vediamo l'uso delle equazioni cardinali per un corpo rigido in condizioni isostatiche.

### 3.10 Il caso isostatico

Se l'attenzione al corpo rigido *libero* è servita per enunciare condizioni caratteristiche per l'equilibrio, l'interesse pratico del progettista è rivolto alle *strutture vincolate* (al terreno o comunque all'ambiente esterno). Anzi il più delle volte vincolate in modo che, quando considerate nella loro effettiva deformabilità, esse non possano subire spostamenti se non quelli dovuti alla deformabilità propria della struttura e a eventuali (piccoli) cedimenti dei vincoli.

Restiamo per ora nell'ambito di strutture schematizzate da uno o più corpi rigidi variamente vincolati fra loro e con l'ambiente esterno. Se una siffatta struttura è vincolata in modo da non poter subire (come schema teorico) spostamento alcuno e se i vincoli non sono "sovrrabbondanti" (in condizioni iperstatiche) essa è detta essere in condizioni *isostatiche*. Per tale struttura l'equilibrio sussiste grazie ai vincoli, qualunque sia il sistema di forze esterne attive applicate.

Questa constatazione, assieme alle equazioni cardinali e al postulato sulle reazioni vincolari (Paragrafo 2.6), consente il seguente enunciato delle equazioni cardinali (come condizione necessaria).

■ Se l'equilibrio sussiste, risultante e momento (rispetto a un generico punto) di tutte le forze esterne, attive e reattive, deve essere uguale a zero:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{\text{est}} \begin{cases} \text{att} \\ \text{reatt} \end{cases} = 0 \\ \mathbf{M}_A^{\text{est}} \begin{cases} \text{att} \\ \text{reatt} \end{cases} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

In tali equazioni, se i vincoli non consentono spostamento alcuno alla struttura, sono solo le reazioni vincolari ( $R_y$ ) a fungere da incognite.

Quando si tratti di un sol corpo rigido in condizioni isostatiche la soluzione è unica. In tal caso infatti c'è pareggio fra numero di equazioni e numero di incognite e il sistema di equazioni (3.22) non è degenere.

Quando si tratti di una struttura formata da più corpi rigidi le (3.22), ancora necessarie, non sono in generale sufficienti a determinare le reazioni vincolari (vedi Paragrafo 3.13).

Per comprendere appieno queste affermazioni e per decidere se una struttura è in condizioni isostatiche occorre approfondire l'analisi dei vincoli e degli spostamenti possibili, il che sarà fatto nel prossimo capitolo. Per ora limitiamoci, nel caso piano, a constatare intuitivamente che alcune tipiche situazioni di vincolo realizzano condizioni isostatiche.

Nel caso piano, assumendo il piano direttore come piano  $xy$ , le (3.22) divengono

$$\begin{cases} R_x^{est} - R_x^{att} = 0 \\ R_y^{est} - R_y^{att} = 0 \\ M_A^{est} - M_A^{att} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Si noti che la terza equazione è in effetti una proiezione secondo l'asse  $z$ . Ma, come si è detto, nel caso piano è sufficiente far riferimento alla elementare definizione di momento (3.1).

Nell'uso delle (3.23) si tenga presente che una forza incognita equivale a due componenti scalari incognite, mentre una forza incognita di direzione nota equivale a una sola grandezza scalare incognita.

Continuiamo ora la elementare presentazione di alcuni vincoli tipici che si è iniziata nel Paragrafo 2.6.

Le reazioni vincolari sono forze a priori incognite. Ma, come già si è visto a proposito del punto materiale, si può dire qualcosa a proposito di queste forze, qualcosa che le rende meno indeterminate, e che dipende dal tipo di vincolo.

Le reazioni vincolari sono forze di contatto. Il loro studio come interazione fra punti sarebbe quanto mai complicato; dipenderebbe da quanto le regioni di contatto si deformano per la reciproca influenza di contatto nel rispetto della non comprenetrabilità dei corpi.

Per fortuna nella maggior parte dei problemi della Statica è sufficiente tener conto delle caratteristiche globali (risultante e momento) delle forze generate nella regione di contatto. Sono tali caratteristiche globali che chiamiamo *reazioni vincolari*.

Confortati da evidenze sperimentali possiamo ritenere valido questo schema di comportamento di alcuni vincoli nel caso piano.

**L'incastro.** Realizza il collegamento rigido fra struttura e terreno o fra due componenti strutturali (Figura 3.31a). Si usa rappresentare come nella Figura 3.31b, garantisce l'assenza di qualunque spostamento rigido (assoluto, se l'incastro è a terra o relativo, se l'incastro collega due corpi rigidi). Ciò significa che esso è in grado di fornire il più generale sistema di forze, il quale si è visto essere equivalente a forza più coppia. Nel piano ciò equivale a dire che l'incastro fornisce tre componenti scalari  $X_1 X_2 X_3$  (Figura 3.31c) di reazioni vincolari\* che fungono da incognite nel sistema (3.31). L'incastro si dice pertanto vincolo triplo.

\* La dizione è impropria per il momento  $X_3$ , che non è una forza. Ci sembra tuttavia efficace mettere in evidenza il ruolo di incognita che il momento d'incastro svolge, al pari di  $X_1$  e  $X_2$ . Inoltre si vedrà (Capitolo 4) in qual senso anche i momenti siano componenti "generalizzate" di sollecitazione.

**La cerniera.** Realizza un collegamento che consente rotazioni (Figura 3.32a). Si usa rappresentare come nella Figura 3.32b; garantisce la fissità di un punto (assoluta o relativa), ma non è in grado di fornire momenti rispetto a quel punto. Ciò significa che è in grado di fornire una forza comunque diretta e volta, e cioè due componenti scalari  $X_1 X_2$  (Figura 3.32c). Si dice vincolo doppio.

**Pattino o manicotto.** Realizza un collegamento che consente scorrimenti (assoluti o relativi) in una determinata direzione (Figura 3.33a). Si usa rappresentare come nella Figura 3.33b; garantisce l'assenza di rotazioni e la fissità di una coordinata di un punto, l'altra essendo libera poiché lo scorrimento è consentito. Fornisce una forza  $X_1$  nella direzione dello spostamento impedito e un momento  $X_2$  (Figura 3.33c). È vincolo doppio.

**Pendolo, biella, carrello, appoggio.** Realizzano collegamenti che impediscono solo spostamenti in una determinata direzione (assoluti o relativi) (Figura 3.34a). Si rappresentano come nella Figura 3.34b. Forniscono una forza  $X_1$  in quella direzione. Sono vincoli semplici (Figura 3.34c).

Le frecce usate per indicare le reazioni vincolari incognite sono per così dire "frecce di prova", in quanto il verso non è a priori noto. Sarà la soluzione delle (3.12) a dire se la freccia di prova è da confermare oppure da invertire (vedi Appendice A).

L'appoggio e il pendolo (se realizzato con una fune) presentano un'anomalia: il verso della forza da essi fornita non è disponibile. L'appoggio non può che reggere dal piano d'appoggio verso il corpo; il pendolo (se non rigido) non può che esercitare una trazione. Si dicono *vincoli unilateri* (vedi Capitolo 4). Se la soluzione richiedesse di invertire la freccia, ciò significherebbe che l'equilibrio non sussiste. Tuttavia il carrello è generalmente immaginato bilatero, come se le ruote fossero impegnate nella gola di un binario.

Merita infine un commento l'applicazione della coppia che l'incastro o il pattino o il manicotto esercitano sull'asta "nel punto" in cui l'asta è vincolata. Vale a questo proposito l'osservazione introdotta nel Paragrafo 3.5. Nel caso dei vincoli ora ricordati il braccio della coppia è da immaginare ricavato nello spessore dell'asta, spessore esistente, anche se in genere non raffigurato nei disegni (Figura 3.35). Si noti che agli effetti dell'equilibrio del corpo rigido è ininfluente il "punto" d'applicazione della coppia.

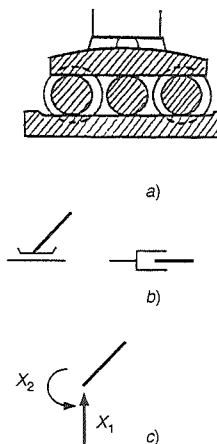
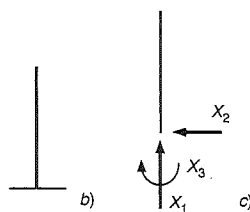
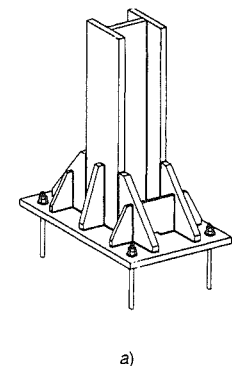
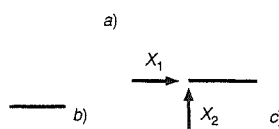
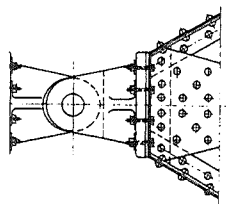


Figura 3.33



3.31



3.32

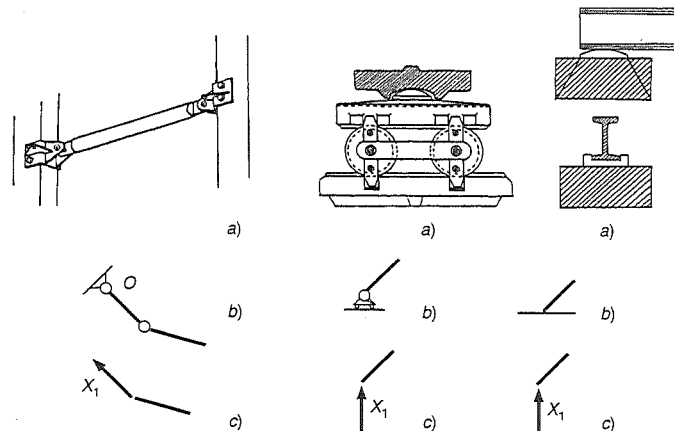
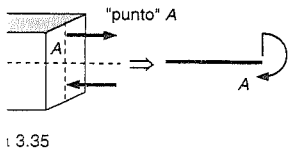
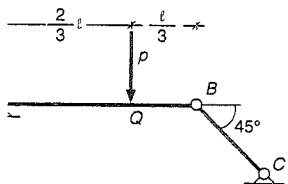


Figura 3.34



Dei vincoli passati in rassegna solo l'incastro è di per sé sufficiente a garantire l'equilibrio di un corpo rigido in piano. Degli altri occorre fare una "corretta" combinazione per garantire al corpo rigido condizioni isostatiche. Come già detto, la trattazione esaustiva di come possa avvenire una "corretta" combinazione è rimandata al Capitolo 4. Ora affrontiamo direttamente qualche problema piano e ci renderemo conto man mano di quali problemi (con tre componenti incognite di reazioni vincolari) diano luogo a soluzione unica. Solo questi corrispondono a condizioni isostatiche. In essi il corpo rigido sarà vincolato o con vincolo triplo, o con vincolo doppio e vincolo semplice, o con tre vincoli semplici.

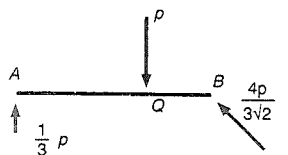
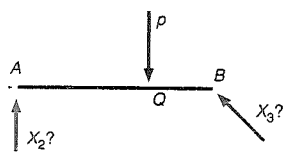


**Esempio 3.3** *Asta con cerniera e biella*

Un'asta AB è vincolata con cerniera in A e biella a 45° in B. Sia soggetta a un carico p applicato a 2/3 della sua lunghezza l. Trovare le tre componenti di reazione vincolare.

La soluzione è la seguente (Figura 3.36)

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X_2 + X_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = p \\ \frac{2}{3} pl = X_3 l \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{2}{3} p \\ X_2 = p - \frac{2}{3} p = \frac{1}{3} p \\ X_3 = \frac{4}{3\sqrt{2}} p \end{cases}$$



3.36

Riguardo alla convenzione sui segni conviene chiamare  $X_1, X_2, \dots$  i moduli delle reazioni incognite e ipotizzare un verso (freccia) per le reazioni vincolari incognite. Se l'ipotesi è giusta il risultato per  $X_1, X_2, \dots$  deve essere positivo (poiché sono i moduli); altrimenti la freccia ipotizzata è da invertire (definizioni più rigorose si possono trovare in Appendice A).

**Commento:** per cominciare a rendersi conto che non sempre i vincoli sono correttamente disposti (anche se danno luogo a tre componenti incognite di reazioni vincolari) si provi a risolvere il problema precedente se la biella BC è orizzontale. Il sistema di equazioni che si ottiene non ammette soluzioni. L'equilibrio non sussiste!

**Esempio 3.4** *Un'equazione diventa identità*

Un'asta sia vincolata con due carrelli orizzontali e soggetta a un carico p come nella Figura 3.37. Trovare le reazioni vincolari.

L'asta non è in condizioni isostatiche: potrebbe spostarsi orizzontalmente. I vincoli infatti forniscono solo due componenti di reazioni vincolari. Senonché la prima delle equazioni di equilibrio (3.12) è identicamente soddisfatta (non lo sarebbe se la forza attiva avesse componente orizzontale, e l'equilibrio non potrebbe sussistere!). Le altre due equazioni consentono di trovare  $X_1$  e  $X_2$  in quanto i due soli carrelli bastano a garantire l'equilibrio per il particolare tipo di sollecitazione.

$$\begin{cases} R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_2 + p \\ pl = X_2 l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2p \\ X_2 = p \end{cases}$$

3.37

Si noti che la soluzione conferma la freccia verso il basso ipotizzata per  $X_2$ . Se il carrello in B fosse sostituito da un semplice appoggio l'equilibrio non sussisterebbe.

Se una struttura, per una data situazione di carichi, non "fruisce" di una libertà di spostamento concessa dai vincoli, accade sempre che una corrispondente equazione di equilibrio diviene un'identità (vedi Capitolo 4).

**Esempio 3.5** *Tre vincoli semplici*

Un'asta AB sia vincolata con tre bielle e sollecitata come nella Figura 3.38. Siano  $X_1, X_2, X_3$  i moduli delle tre reazioni vincolari.

La soluzione è la seguente

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = p \\ X_2 + X_3 = p \\ \frac{2}{3} pl = X_3 l + pl \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = p \\ X_2 = \frac{4}{3} p \\ X_3 = -\frac{1}{3} p \end{cases}$$

Si usa dire che le due bielle convergenti in A equivalgono a una cerniera in A.

**Commenti:** si provi a risolvere il problema se la biella in B fosse orizzontale. L'asta AB non sarebbe in condizioni isostatiche. L'equilibrio non sussisterebbe. Rappresentazioni del tipo di Figura 3.36c, 3.37c, 3.38c si dicono diagrammi di corpo libero.

**Esempio 3.6** *Un'incastro*

Un'asta a T sia incastrata al piede e soggetta a due forze e a una coppia come nella Figura 3.39. Trovare le reazioni vincolari.

La soluzione è la seguente

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = p \\ X_2 = p \\ X_3 = pl \end{cases}$$

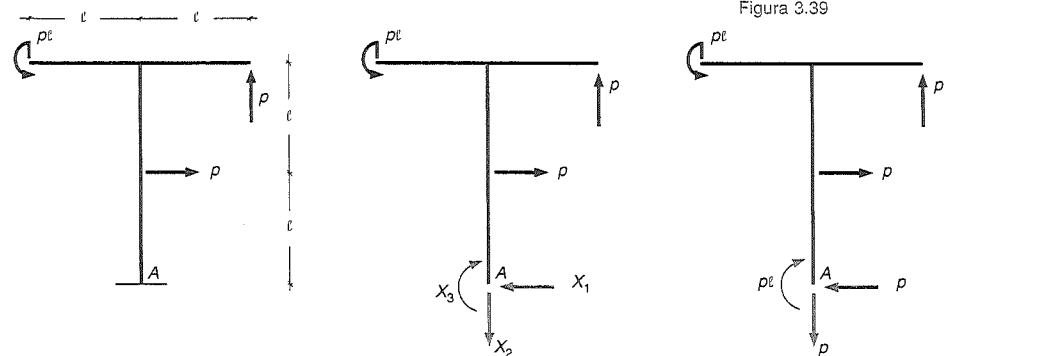


Figura 3.39

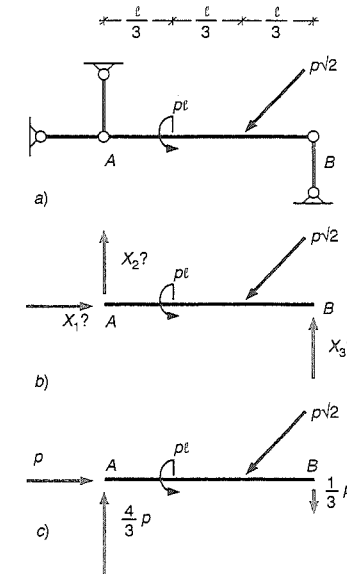


Figura 3.38

Come esercizio, in questo esempio e nei precedenti si espliciti la soluzione per valori numerici di  $p$  e di  $l$ , per esempio  $p = 800 \text{ N}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ .

### 3.11 Il poligono funicolare e le condizioni grafiche di equilibrio

Nel caso piano, cui finora abbiamo dedicato la maggiore attenzione, è molto espressivo e di immediata comprensione l'aspetto grafico delle equazioni di equilibrio. La prima equazione di equilibrio,  $\mathbf{R} = 0$ , si commenta immediatamente, e con validità del tutto generale (anche in tre dimensioni):

■ In condizioni di equilibrio la poligonale delle forze (attive e reattive) è chiusa.

Basta ricordare infatti la definizione stessa di somma (o risultante) di un sistema di vettori; affinché sia nulla, primo e ultimo vertice della poligonale delle forze devono coincidere.

Per quanto riguarda la seconda equazione di equilibrio, ( $\mathbf{M} = 0$ ) vediamo dapprima quale ne sia l'aspetto grafico in qualche caso particolare.

*Due forze.* La possibilità, per due forze, di essere equilibrate è descritta dal terzo postulato: devono essere opposte ( $\mathbf{R} = 0$ ) e allineate ( $\mathbf{M} = 0$ ).

Sia per esempio un'asta rigida sottoposta a forze applicate *solo* agli estremi  $A$  e  $B$ ; quand'anche siano più d'una le forze in ciascun estremo, una volta sommate fra loro rispettivamente in  $A$  e in  $B$  (prima operazione invariante), esse danno luogo a due forze che in condizioni di equilibrio sono allineate opposte (Figura 3.40a, b). L'asta  $AB$  in tali condizioni si dice *biella*.

■ Il termine *biella*, come sinonimo di pendolo, si usa anche dal punto di vista puramente cinematico come collegamento, tramite due cerniere estreme, con altri elementi strutturali indipendentemente dal fatto che l'asta sia caricata oppure no. Dal punto di vista statico il termine *biella* è riservato a un'asta che sia sollecitata solo agli estremi e che in tali estremi non riceva momenti.

Se due forze opposte allineate sono applicate a una struttura non rigida (Figura 3.40c) non garantiscono affatto l'equilibrio! Si dice sempre tuttavia che le due forze formano un sistema equilibrato (vedi Tabella 3.1).

*Tre forze.* Condizione necessaria affinché tre forze siano equilibrate è che siano concorrenti.

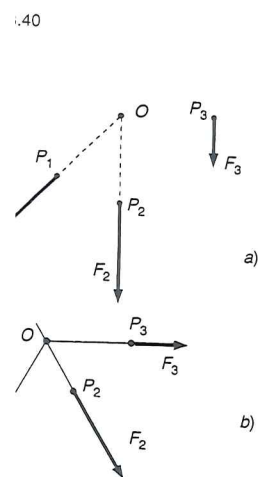
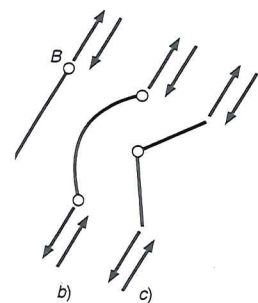
Infatti, se non fossero concorrenti ci sarebbe senz'altro un punto  $O$  rispetto al quale sarebbe  $M_O \neq 0$ : il punto di intersezione fra due delle tre forze, punto rispetto al quale solo la terza forza avrebbe momento (Figura 3.41a).

La condizione non è sufficiente per l'equilibrio! (Figura 3.37b). La concorrenza infatti assicura solo l'esistenza di un punto  $O$  rispetto al quale sia  $M_O = 0$ .

Alla luce di queste semplici proprietà cominciamo a risolvere graficamente alcuni problemi statici.

#### Esempio 3.7

Risolvere graficamente l'Esempio 3.3.



Il vincolo  $BC$  (biella o pendolo) fornisce all'asta  $AB$  una forza incognita  $\mathbf{X}_1$  di direzione nota. Per il punto  $O$  intersezione di  $\mathbf{X}_1$  con la forza attiva  $\mathbf{p}$  deve passare anche la terza forza  $\mathbf{X}_2$  fornita dalla cerniera. D'altronde la poligonale delle tre forze deve essere chiusa. Disegnata perciò la forza  $\mathbf{p}$  (a lato della struttura) si conducano per i suoi estremi le parallele alle due rette d'azione di  $\mathbf{X}_1$  e di  $\mathbf{X}_2$  (ora entrambe note). Si ottiene un triangolo. Un lato, con freccia nota, è la forza attiva  $\mathbf{p}$ ; gli altri due forniscono, in modulo direzione e verso, le due reazioni vincolari: i moduli sono le lunghezze dei due lati, le direzioni quelle dei lati stessi (già determinate dalla condizione di concorrenza) i versi tali che si rincorrono (a partire da quello noto di  $\mathbf{p}$ ). La soluzione è rappresentata nella Figura 3.42.

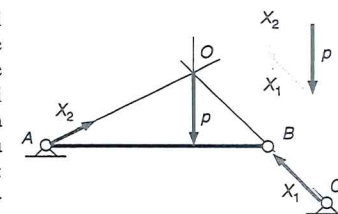


Figura 3.42

#### Esempio 3.8

Risolvere graficamente l'Esempio 3.4.

Da un qualsiasi punto  $O$  della retta d'azione di  $\mathbf{p}$  si mandino due rette per  $B$  e per  $C$  rispettivamente (trasformazione 1, Paragrafo 3.7). Due forze  $\mathbf{X}'_1$  e  $\mathbf{X}'_2$  aventi queste rette d'azione equilibrano  $\mathbf{p}$  (e si trovano come nell'esercizio precedente). Si scompongano poi queste forze secondo le loro componenti in direzione di  $AB$  e in quella perpendicolare: le prime componenti si annullano (opposte allineate) le seconde sono le reazioni  $X_1$  e  $X_2$  ricercate. La soluzione è rappresentata nella Figura 3.43.

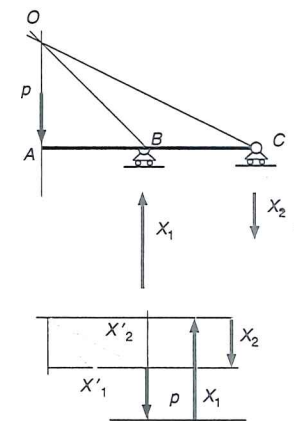


Figura 3.43

#### Esempio 3.9

L'asta  $BD$ , soggetta a un carico concentrato  $\mathbf{p}$ , sia vincolata da tre bielle come nella Figura 3.44. Trovare graficamente le RV.

Si consideri dapprima l'insieme delle due reazioni vincolari  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  come un'unica reazione incognita in  $B$  (si usa dire che le due bielle sono equivalenti a una cerniera nel loro punto d'incontro). L'asta  $BD$  è allora soggetta a tre forze che devono pertanto essere concorrenti. Poiché  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{X}_3$  sono parallele deve esserlo anche la forza complessiva derivante da  $B$ . Pertanto deve essere  $X_1 = 0$  e  $X_2$  si trova come nell'Esempio 3.8. La soluzione è rappresentata nella Figura 3.44.

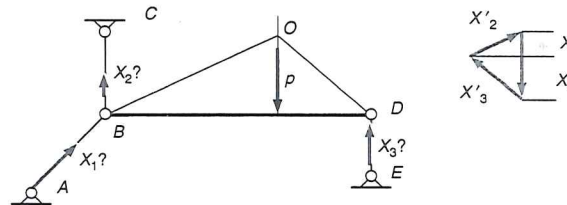


Figura 3.44

#### Esempio 3.10

Risolvere lo stesso problema con una forza  $\mathbf{p}$  a  $45^\circ$  come nella Figura 3.45.

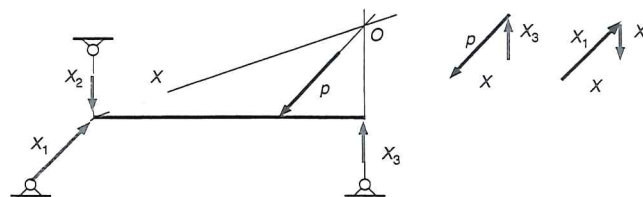


Figura 3.45

Poiché  $\mathbf{X}_3$  e  $\mathbf{p}$  si incontrano in  $O$ , per  $O$  deve passare anche la forza  $\mathbf{X}$ , somma di  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ . Si equilibra  $\mathbf{p}$  con  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}_3$  (come nell'Esempio 3.7) e poi si scompone  $\mathbf{X}$  in  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ .

Nel caso generale (piano) di più forze la seconda condizione grafica di equilibrio si mette chiaramente in evidenza con il metodo del poligono funicolare. La chiusura della poligonale delle forze ( $\mathbf{R} = 0$ ) implica che primo e ultimo vertice di tale poligonale coincidano (per esempio  $0 \equiv 4$  nella Figura 3.30) e perciò che primo e ultimo lato del poligono funicolare siano paralleli. Infatti il metodo, che riduce le forze a essere due, dirette come primo e ultimo lato del poligono funicolare, deve condurre a una coppia. Se poi anche il momento deve annullarsi, le due forze componenti la coppia devono sovrapporsi e cioè *primo e ultimo lato del poligono funicolare devono coincidere*. Ciò si usa esprimere brevemente in questo modo:

no delle forze chiuso significa lenza di primo e ultimo verti-  
gono funicolare chiuso signi-  
vrapposizione di primo e ulti-

■ in condizioni di equilibrio il poligono funicolare che connette le forze (attive e reattive) è chiuso.

Con riferimento alla Figura 3.30 il sistema formato da  $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2\mathbf{F}_3 - \mathbf{R}$  applicate in  $P_1P_2P_3$   $\bar{O}$  è un sistema equilibrato. Il poligono funicolare relativo alle quattro forze non si arresta alla retta  $d$ , ma prosegue con un quinto lato per connettere anche  $-\mathbf{R}$ . L'ultimo lato del poligono funicolare è la stessa retta  $a$ ; essa infatti si trova ad essere parallela non solo alla proiettante  $a'$  del primo vertice  $O$  ma anche alla proiettante (ancora)  $a'$  dell'ultimo vertice  $4$  ( $\equiv 0$ ): primo ed ultimo lato del poligono funicolare sono sovrapposti su  $a$ .

Se  $-\mathbf{R}$  fosse applicata in altro punto  $O$  il sistema di forze sarebbe equivalente a una coppia; primo e ultimo lato del poligono funicolare sarebbero paralleli ma non coincidenti. Riassumendo:

■ condizioni grafiche di equilibrio sono la chiusura della poligonale delle forze e del poligono funicolare.

### 3.12 Azioni interne

Vediamo ora quali informazioni possiamo ottenere, in base a sole condizioni d'equilibrio, sulle sollecitazioni che attraversano la struttura. Diremo *problema interno* la ricerca delle forze che si trasmettono fra loro due parti della struttura. Finora abbiamo incontrato il problema interno solo nel caso in cui una molla o una fune fossero tese fra due punti della struttura. Quel che ora ci accingiamo a calcolare è la sollecitazione interna in qualunque punto della struttura. Il problema invece, già visto, del calcolo delle reazioni vincolari esterne, si dirà brevemente *problema esterno*.

Iniziamo con l'esaminare una sola asta rigida. Sia essa in equilibrio sotto l'azione di determinate forze (attive e reattive). Si immagini di sezionarla ottenendo due tronconi: ciascuno di essi in equilibrio non sta più. Ciò significa (o per lo meno si interpreta dicendo) che prima del taglio ciascuno dei due tronconi riceveva dall'altro attraverso la sezione un sistema di forze (interne) atto a garantirne l'equilibrio (Figura 3.46). In ciò consiste il *postulato ridotto delle tensioni interne*. Esso afferma:

■ se un sistema materiale è in equilibrio allora lo è ogni sua parte soggetta a quella parte di forze esterne che le competono e alle forze che le parti contigue le trasmettono.

In questa forma il postulato si dice ridotto perché rappresenta una condizione necessaria per l'equilibrio di qualunque sistema materiale.

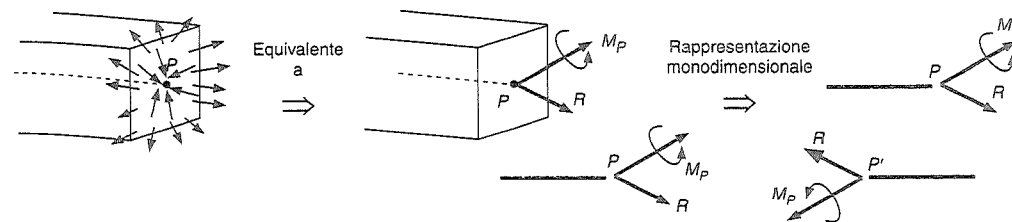


Figura 3.46

Ne vedremo più avanti una formulazione più generale che fornisce condizioni caratteristiche.

Nella Figura 3.46 e nel seguito, quando si parla di azioni interne, si intende che la struttura sia composta da aste.

Quale sia l'effettivo sistema di forze che un troncone riceve dall'altro, come tali forze siano distribuite sulla sezione sono quesiti che non ricevono risposta da sole condizioni di equilibrio: occorre tener conto del tipo di deformabilità del materiale. Lo stato di sollecitazione che effettivamente si sviluppa nella struttura sarà calcolato nel Capitolo 7 per qualche semplice situazione di carico su aste deformabili elasticamente; la trattazione generale dell'argomento esula dai limiti di questo testo. Tuttavia con sole considerazioni di equilibrio (se i vincoli sono in condizioni iso-statiche) si giunge a definire i valori globali di tali sollecitazioni interne, la risultante e il momento. Sono esse che si chiamano *azioni interne*.

Nulla impedirebbe di definire le azioni interne anche per un corpo generico, ma solo per corpi monodimensionali (aste) esse rivestono notevole significato fisico, come man mano vedremo. Il calcolo delle azioni interne è conseguenza immediata del postulato testé enunciato e delle equazioni cardinali.

Infatti per ristabilire l'equilibrio del troncone (l'uno o l'altro che sia) occorre applicare alla sezione messa in evidenza un sistema di forze che a priori non si conosce e che, in termini generali, è equivalente a forza più coppia. Per quanto detto sull'equivalenza, la forza è la risultante  $\mathbf{R}$  del sistema di forze agenti sulla sezione e la coppia ha momento  $M_P$  uguale al loro momento rispetto al punto di applicazione di  $\mathbf{R}$ . Tale punto altri non è che quel punto  $P$  che da solo rappresenta tutta la sezione quando dell'asta si dà rappresentazione monodimensionale tramite la sua linea d'asse: il baricentro della sezione.

Per il principio d'azione e reazione, nel punto  $P'$  che prima del taglio coincideva con  $P$  va applicata la risultante  $-\mathbf{R}$  e la coppia di momento  $-M_P$ . La ricerca delle azioni interne è pertanto la ricerca del comune valore di tali sollecitazioni interne opposte, che sono a priori incognite e che ovviamente dipendono dalla sollecitazione esterna nonché dal punto  $P$  in cui si è "sezionata" l'asta per metterle in evidenza.

■ Le equazioni cardinali, scritte per un generico tronco terminante in  $P$ , individuano le azioni interne  $\mathbf{R}$  e  $M_P$  una volta che siano note tutte le altre forze agenti sul tronco considerato. Si tratta di sei equazioni in sei incognite nel caso tridimensionale; di tre equazioni in tre incognite nel caso piano.

Le componenti di  $\mathbf{R}$  e di  $M_P$  si assumono su assi privilegiati: normale alla sezione il primo (asse  $x$  nella Figura 3.47a) e sulla sezione gli altri due (assi  $y$  e  $z$ ). Nel caso piano si sottintende l'asse  $z$  normale al piano (secondo cui è diretto il momento) e si considera, sulla sezione, il solo asse  $y$  contenuto nel piano (Figura 3.47b).

Secondo una convenzione generalmente accettata, nel caso piano le componenti delle azioni interne si chiamano e si assumono in segno come segue:

- azione assiale  $N$ : agisce normalmente alla sezione; si assume positiva quando ha carattere di trazione (su entrambi i tronchi) come nella Figura 3.48a;

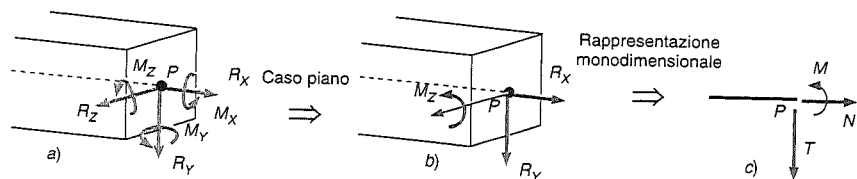


Fig. 3.47

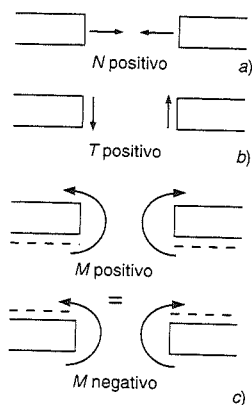


Fig. 3.48

Il segno del momento è convenzionalmente dipendente dalle fibre di riferimento; la situazione fisica non lo è.

- azione di taglio  $T$ : agisce perpendicolarmente a  $N$ ; si assume positiva quando induce rotazione oraria (su entrambi i tronchi) come nella Figura 3.48b;
- momento flettente  $M$ : agisce come coppia nel piano delle forze; assunte (tratteggiandole) certe fibre di riferimento, si usa definire positivo  $M$  se tende tali fibre di riferimento (Figura 3.48c).

Le tre grandezze  $NTM$  si dicono brevemente loro stesse azioni interne (si indicheranno a volte con  $AI$ ). La convenzione sui segni merita ulteriori commenti.

- Le forze (interne) opposte che si scambiano i due tronchi attraverso le due facce vengono a essere individuate dallo stesso segno.
- Il segno di  $M$  può essere indifferentemente più o meno a seconda di quali fibre siano definite di riferimento (tratteggiate). La situazione fisica ovviamente è unica e determinata. Per esempio nella Figura 3.48 sono le fibre inferiori a essere tese; ciò però si traduce in segno + se proprio esse sono assunte come riferimento, con segno - per la scelta opposta.
- Delle azioni interne è molto espressivo tracciare i grafici che ne mostrano il variare al variare della sezione considerata (al variare di  $P$ ). Essi si riportano perpendicolarmente all'asta cui si riferiscono (e si usa tratteggiare l'interno del diagramma nella stessa direzione). È convenzione visivamente efficace riportare il grafico di  $M$  dalla parte delle fibre tese, cosicché, l'esecuzione e l'interpretazione del grafico di  $M$  non necessita delle convenzioni sul segno e sulle fibre di riferimento.

Veniamo al calcolo esplicito di  $NTM$ , nel caso di asta rettilinea che assumiamo come asse  $x$ ; si sia già constatato l'equilibrio e si sia risolto il problema esterno. Scriviamo le equazioni cardinali per l'uno (o l'altro) dei due tronchi. In esse compaiono, per il postulato ridotto delle tensioni interne, le azioni interne  $NTM$  e le forze esterne che competono a quel tronco.

Diciamo ① e ② i due tronchi e  $R_x^{est} ①, M_p^{est} ①$  risultante e momento, rispetto a  $P$ , di quella porzione di forze esterne che compete a ① e analogamente  $R_x^{est} ②, M_p^{est} ②$ . Le azioni interne  $NTM$  si trovano scrivendo le tre equazioni di equilibrio indifferentemente per il tronco ① o per il tronco ②. Per le convenzioni fatte esse danno luogo a

$$\begin{aligned} N &= R_x^{est} ① & N &= R_x^{est} ② \\ T &= R_y^{est} ① & T &= R_y^{est} ② \\ M &= M_p^{est} ① & M &= M_p^{est} ② \end{aligned} \quad \text{oppure a} \quad (3.24)$$

I secondi membri dei due sistemi, assieme, formano un sistema equilibrato e perciò i due sistemi danno luogo alla stessa soluzione, coincidente anche in segno grazie alle convenzioni adottate se gli assi, su ciascun tronco, si assumono nel verso positivo delle azioni interne.

Nell'uso delle (3.24) si tengano presenti le seguenti osservazioni.

- Tra forze esterne agenti su ogni tronco compaiono sia quelle attive che quelle reattive e queste devono già essere state determinate.

- La sezione operata in  $P$  deve sempre separare la struttura in due tronchi complementari (Figura 3.49a). Sarebbe errato scrivere le (3.24) per i due tronchi di Figura 3.49b senza esplicitare le azioni trasmesse dalla cerniera!
- Le equazioni cardinali scritte nella forma (3.24), e cioè già risolte rispetto a  $NTM$ , facilitano la questione dei segni e permettono di evitare l'esplicita assunzione degli assi cartesiani (Figura 3.50). Basta infatti assumere ogni forza (nel secondo membro) con lo stesso segno della corrispondente  $AI$ : positive quelle forze che provocano trazione, quelle forze perpendicolari all'asta che provocano rotazione oraria nelle vicinanze di  $P$ , quelle forze il cui momento rispetto a  $P$  tende le fibre di riferimento.
- La convenzione complessiva sui segni si usa riassumere immaginando di enucleare dall'asta un tronchetto e raffigurando come nella Figura 3.51. Tuttavia ciò è impreciso perché le azioni a destra e a sinistra di un tronchetto non sono in generale uguali fra loro (v. Paragrafo 5.6).
- Appena possibile converrà risolvere *mentalmente* le (3.24): "percorrendo" la struttura e "raccolgendo" man mano il contributo delle forze che vengono ad aggiungersi durante il "percorso".
- Le azioni interne  $NTM$  sono funzioni del punto  $P$  in cui si è operata la sezione. Per l'asta rettilinea assunta come asse  $x$ , detta  $x$  l'ascissa del generico punto  $P$  esse sono funzioni di tale ascissa,  $N(x), T(x), M(x)$  e forniscono l'insieme dei valori delle azioni lungo l'asta.
- Tali funzioni presenteranno discontinuità nei punti di applicazione delle sollecitazioni esterne: in un punto in cui sia applicata una forza  $p$  tangente all'asta,  $N$  ha discontinuità uguale a  $p$ ; se vi è applicata una forza  $p$  perpendicolare all'asta,  $T$  ha discontinuità uguale a  $p$ ; se vi è applicata una coppia di momento  $pl$ , il momento flettente  $M$  ha discontinuità  $pl$ .
- Se l'asta si compone di più tratti rettilinei l'analisi svolta non cambia pur di distinguere i vari tratti ma sempre "raccolgendo" il contributo di tutte le forze che stanno da una parte (Figura 3.52).

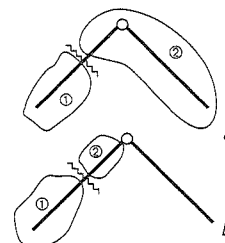


Figura 3.49

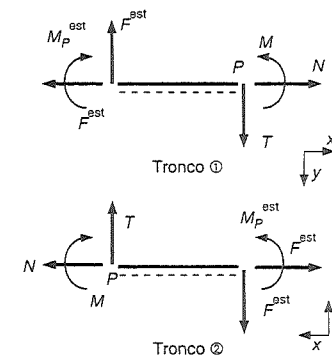


Figura 3.50

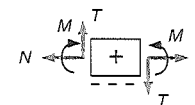


Figura 3.51

Infine una precisazione circa il segno di  $T$ : esso è + quando induce rotazione oraria sul "tronchetto adiacente" alla sezione operata. Per esempio nell'asta di Figura 3.52 il taglio in  $P$  è positivo (mentre il momento della forza  $F$  applicata in  $A$  rispetto a  $P$  è antiorario).

Vediamo il calcolo e il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne nelle aste di cui si è già studiato l'equilibrio negli Esempi 3.3-3.6.

**Esempio 3.11**

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.3.

Il calcolo di  $N$  è immediato.

Il calcolo di  $T$ : percorrendo l'asta da  $A$  verso  $B$ , dapprima il contributo a  $T$  proviene solo da  $p/3$  (Figura 3.36c) che dà verso orario; dopo i  $2/3$  di "percorso" si "raccolghe" il contributo opposto di  $p$ : il taglio diventa negativo (contributo complessivo antiorario uguale a  $2/3 p$ ).

Il calcolo di  $M$ : ancora percorrendo l'asta da  $A$  verso  $B$  dapprima il momento flettente  $M$  si oppone al momento di  $1/3 p$ , che ha braccio crescente fino a  $2/3 l$ ; perciò  $M$  cresce linearmente fino a valere  $2/9 pl$  in  $Q$ , tendendo le fibre inferiori. Giunti in  $Q$  conviene sospendere il percorso e riprenderlo da  $B$ : il momento cresce con il braccio della componente verticale proveniente dalla biella fino a giungere allo stesso valore in  $Q$  (Figura 3.53).

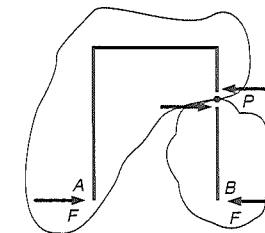


Figura 3.52

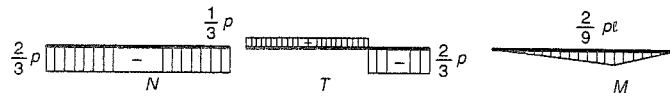


Figura 3.53

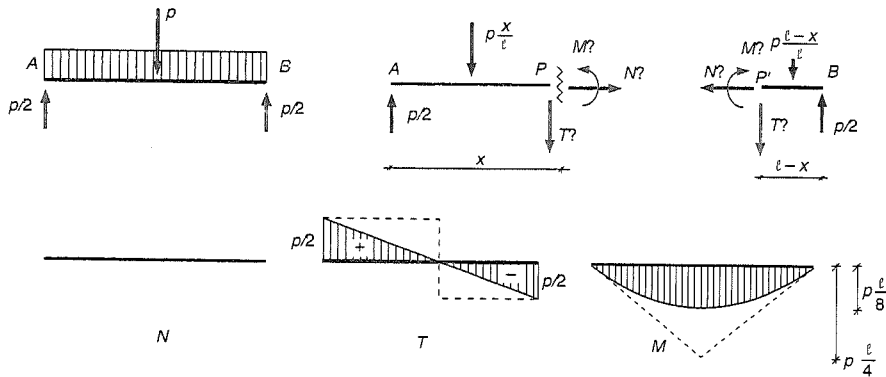
**Commenti:** per ogni struttura sarà bene riflettere sulle variazioni implicate sia dal variare della sollecitazione esterna sia della situazione di vincolo. Facciamolo per la trave AB, in condizioni elementari di carico e di vincolo.

a) Il carico  $p$  sia concentrato in mezzeria. I diagrammi delle azioni interne divengono simmetrici e cambiano di valore (Figura 3.54):

$$N = -p/2 \quad T(0) = p/2; \quad T(l) = -p/2 \quad M_{\max} = M(l/2) = pl/4$$

b) Con carico  $p$  concentrato in mezzeria, i vincoli siano ora due carrelli orizzontali in A e in B. L'asta si decompone ( $N = 0$ ),  $T$  ed  $M$  restano invariati rispetto al caso a).

c) Nonostante la trattazione dei carichi distribuiti si sia rimandata al Capitolo 5, se lo stesso carico  $p$  fosse uniformemente distribuito su AB, sarebbe possibile fin d'ora calcolare le azioni interne. Infatti, grazie alle equazioni cardinali e alle (3.24), è possibile *concentrare nel baricentro di ogni tronco il carico gravante su ogni tronco considerato*. Su un tratto di lunghezza  $x$  grava (grazie all'uniformità) un carico ridotto del rapporto  $x/l$  se  $l$  è la lunghezza su cui l'intero carico  $p$  è distribuito.



3.54

Le azioni interne non presentano ora discontinuità; i grafici sono "smussati" rispetto al caso b) (tratteggiato nei diagrammi) e il momento massimo in mezzeria è dimezzato. Ciò in quanto la collaborazione a reggere il carico è ora più "equamente" richiesta agli elementi della trave. In ogni punto  $P$  di ascissa  $x$  è

$$T(x) = \frac{1}{2}p - \frac{x}{l}p \quad M(x) = \frac{1}{2}px - \frac{x}{l}p \frac{x}{2}$$

**Esempio 3.12**

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.4.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.55.

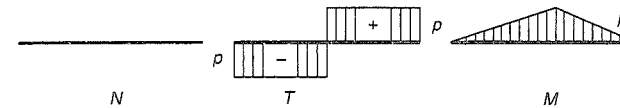


Figura 3.55



Quando il problema, come nei casi precedenti, non dà valori numerici ma esprime la forza come multiplo di una forza  $p$  e i momenti come multipli di un momento  $pl$  converrà esprimere le azioni interne in *forma adimensionale*:  $N/p$ ,  $T/pl$ ,  $M/pl$ . Così faremo nel seguito.

**Esempio 3.13**

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.5.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.56.

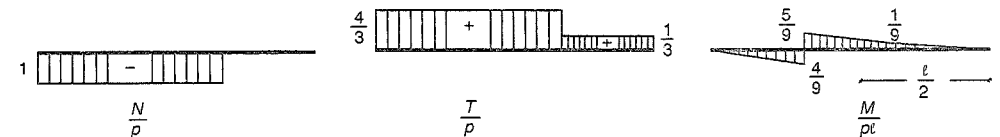


Figura 3.56

**Esempio 3.14**

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.6.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.57.

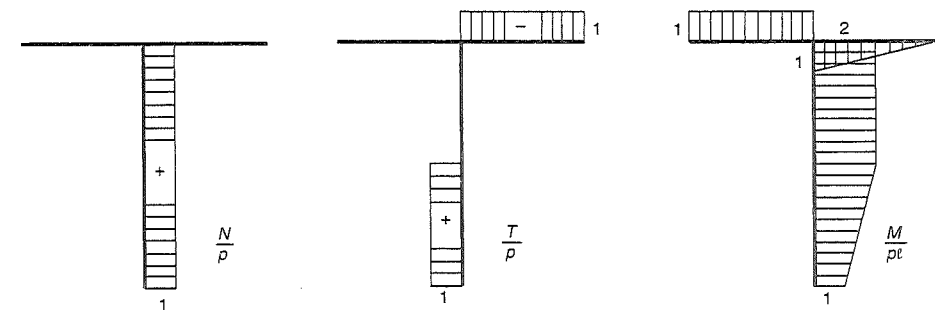


Figura 3.57

**Esempio 3.15**

L'asta rigida (Figura 3.52) è in equilibrio sotto l'azione delle due forze opposte allineate. Calcolare le azioni interne.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.58.



Se si applica la seconda operazione invariante facendo scorrere una delle due forze fino ad aver lo stesso punto d'applicazione dell'altra le azioni interne non restano invariate! Resta invariato l'equilibrio dell'asta perché rigida.

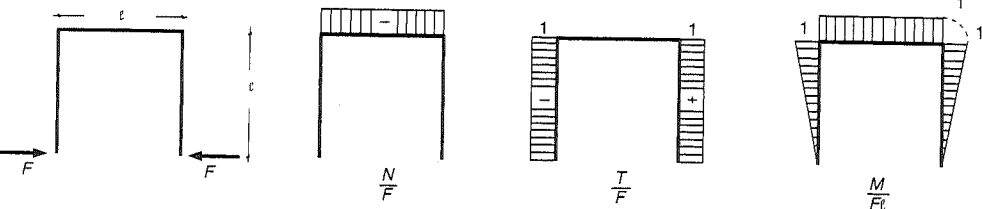


Fig. 3.58

Nel calcolo sarà utile tener conto del

■ **principio di sovrapposizione degli effetti:** la linearità delle EC consente di comporre sia le reazioni vincolari sia le azioni interne dovute a diverse sollecitazioni.

### 3.13 Strutture isostatiche piane

#### 3.13.1 Strutture isostatiche piane e postulato delle tensioni interne

I vincoli descritti nel Paragrafo 3.10 servono non solo a collegare a terra la struttura, ma anche a collegare fra loro i componenti strutturali che, tutti assieme, costituiscono la struttura. Le forze che attraverso questi vincoli, interni alla struttura, le due parti si scambiano costituiscono casi particolari di azioni interne. Così se una cerniera collega due aste rigide, esse si scambiano attraverso la cerniera una forza di direzione incognita di componenti  $X_1, X_2$  (Figura 3.59) e non si trasmettono momenti. Se le forze si scompongono secondo tangente e normale a ognuna delle aste, esse altro non sono che  $N$  e  $T$  di ciascuna asta nel loro punto di connessione alla cerniera.

Quel che accade fra struttura e terreno attraverso una cerniera fissa a terra (Figura 3.32) è del tutto simile a quel che accade fra le due aste attraverso la cerniera che le collega. Nella Figura 3.32, come in generale quando si tratti di vincolo a terra, si era messa in evidenza solo la forza che il terreno trasmette alla struttura, la sua opposta essendo di interesse solo quando si vada ad analizzare il terreno.

Considerazioni analoghe valgono per gli altri vincoli (pattino, carrello ecc.) che abbiamo esaminato e che possono essere interni alla struttura.

Notiamo esplicitamente che anche in ogni punto di un'asta rigida sussiste un vincolo: un incastro. Attraverso ogni punto le due parti dell'asta si trasmettono forza più coppia (Figure 3.46, 3.47, 3.48): altro non sono che le azioni interne.

Analizziamo ora alcune semplici strutture isostatiche piane composte da aste rigide vincolate fra loro.

Come si è detto rimandiamo al prossimo capitolo l'analisi cinematica che permetterà di decidere quando una struttura è in condizioni isostatiche. Per ora limitiamoci a constatare intuitivamente che alcune strutture

- sono vincolate in modo da non avere possibilità alcuna di spostamento;
- hanno reazioni vincolari e azioni interne determinabili in modo univoco dalle equazioni di equilibrio.

Le suddette due proprietà definiscono l'isostaticità di una struttura composta da elementi rigidi. Il suo equilibrio è garantito dai vincoli.

Le reazioni vincolari esterne comportano in generale più di tre incognite. Le tre equazioni cardinali (3.23), che continuano a essere necessarie per il postulato dell'irrigidimento, non sono più in generale sufficienti. Altre equazioni di equilibrio sono fornite dal *postulato ridotto delle tensioni interne*:

■ Se un sistema materiale è in equilibrio, lo è anche *ogni sua parte*, soggetta alle forze esterne che le competono e alle forze (interne) che le parti contigue le trasmettono.

In questa forma il postulato si dice *ridotto* perché fornisce una condizione solo necessaria. Il postulato come condizione caratteristica sarà presentato nel Capitolo 8. Operativamente il postulato fornisce le equazioni di equilibrio parziale che si aggiungono alle tre equazioni globali di equilibrio e che permettono di risolvere il problema dell'equilibrio per le strutture isostatiche.

☞ Anche per le strutture articolate può essere utile sostituire un sistema di forze con altro equivalente purché entrambi agenti sullo stesso componente rigido. Si rifletta a questo proposito sull'Esempio 5.3.

Le equazioni di equilibrio parziale sono ancora le equazioni cardinali scritte, grazie al postulato ridotto delle tensioni interne, per uno solo dei corpi rigidi che compongono la struttura o per gruppi di due o più corpi rigidi componenti o anche per un sol punto, tipicamente un nodo della struttura.

Tali equazioni hanno però il torto di contenere in generale le forze (incognite) che i vincoli interni forniscono alla parte considerata. Con ciò la ricerca delle reazioni vincolari esterne viene a intrecciarsi con quella delle reazioni vincolari interne, con aggravio del numero di incognite. Diremo: *il problema esterno non è separabile dal problema interno*.

A ciò purtroppo bisogna rassegnarsi, in generale, per strutture molteplicemente connesse; ma si può invece evitare per strutture semplicemente connesse.

Diconsi *semplicemente connesse* (o ad albero) quelle strutture che un singolo taglio separa in due tronchi (Figura 3.60); *molteplicemente connesse* quelle strutture (presentano circuiti chiusi) per cui c'è modo di operare un taglio che non separi la struttura in due tronchi distinti (Figura 3.61).

Vediamo come *nelle strutture ad albero il problema esterno è separabile dal problema interno*.

#### 3.13.2 Strutture semplicemente connesse (o ad albero) e molteplicemente connesse

Le strutture articolate che esamineremo e che chiameremo *strutture* sono composte da aste, che per ora supporremo rigide.

Per esse le equazioni globali di equilibrio (le tre EC nel caso piano) sono ancora valide in quanto sono *necessarie sempre* per l'equilibrio, ma solo per una particolare classe di strutture sono sufficienti alla determinazione delle RV: per le strutture equivalenti a un sol corpo rigido (che diremo *internamente isostatico*, v. Paragrafo 4.7) cioè per quelle strutture che, una volta liberate dai vincoli a terra, hanno possibilità di soli spostamenti rigidi. Per esse infatti tre vincoli semplici garantiscono l'equilibrio.

È per esempio equivalente a un sol corpo rigido la struttura di Figura 3.61a); non lo è quella di Figura 3.61b). Si noti che entrambe sono molteplicemente connesse.

Per tutte le strutture non equivalenti a un sol corpo rigido sono necessarie equazioni parziali di equilibrio. La loro oculata scelta può essere cruciale per svellere

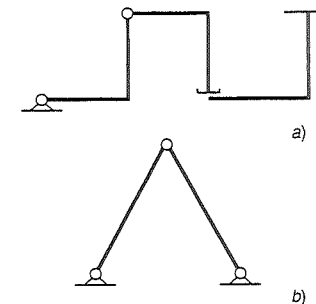


Figura 3.60

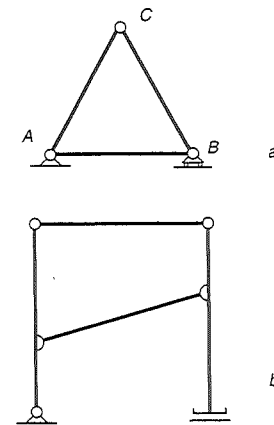


Figura 3.61

le operazioni di calcolo, come cercheremo di mostrare nei prossimi esempi. Possiamo intanto enunciare un criterio generale di oculata scelta:

■ Le equazioni parziali di equilibrio siano pure rispetto ai vincoli interni.

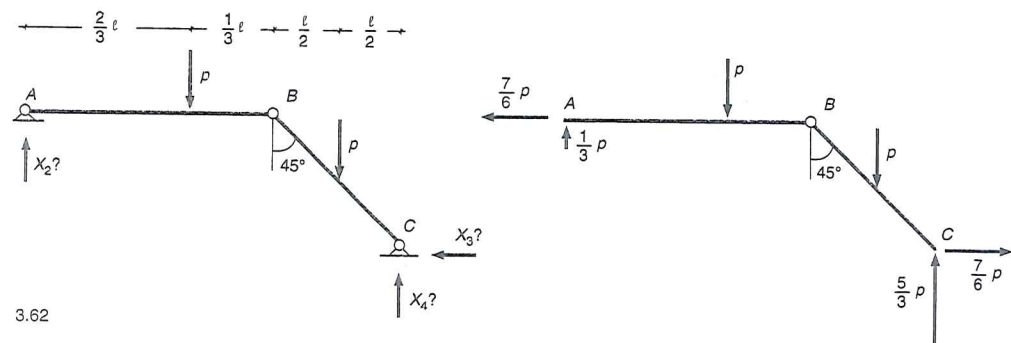
Se per esempio l'equazione parziale di equilibrio riguarda una parte che termina in cerniera interna conviene scrivere l'annullarsi del momento rispetto alla cerniera; se essa termina in un pattino interno conviene scrivere l'annullarsi della risultante in direzione parallela alla retta di scorrimento del pattino...

In questo modo, se la struttura è ad albero, è possibile non introdurre nelle equazioni le RV interne. Per quanto riguarda la ricerca delle AI:

■ Sempre per la ricerca delle azioni interne, la struttura deve essere ridotta ad albero, cioè devono essere già state calcolate quelle forze interne che le parti si scambiano nei punti di "apertura" che rendono la struttura semplicemente connessa.

**Esempio 3.16** Un'asta non è più "biella"

Si riprenda il problema visto negli Esempi 3.3 e 3.11 e sia ora caricata anche l'asta BC (Figura 3.62).



Essa non può più considerarsi vincolo semplice: non fornisce più ad AB una forza di direzione nota. Il sistema va considerato come formato da due aste rigide. Le componenti incognite di reazioni vincolari sono quattro:  $X_1 X_2 X_3 X_4$ .

Alle tre equazioni cardinali basta aggiungerne una sola, che riguardi l'equilibrio di una sola asta, purché non coinvolga le altre incognite relative al vincolo in B.

L'equazione che risponde a tale requisito è l'annullarsi del momento, rispetto a B, delle forze che agiscono su di una singola asta. È questa un'equazione pura rispetto al vincolo in B: impone l'annullarsi di quel che si è chiamato "incentivo alla rotazione" attorno a B, rotazione di una singola asta rispetto all'altra che il vincolo stesso non potrebbe contrastare. Diremo brevemente: impone che l'asta (una o l'altra) non ruoti rispetto a B.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \\ M_B^{(AB)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_3 \\ X_2 + X_4 = 2p \\ \frac{2}{3}pl + \frac{3}{2}pl - X_3l = X_4 2l \\ \frac{1}{3}pl = X_2l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{7}{6}p \\ X_2 = \frac{1}{3}p \\ X_3 = -\frac{7}{6}p \\ X_4 = \frac{5}{3}p \end{cases}$$

**Commento:** si noti come la struttura ora considerata, pur essendo coincidente con quella dell'Esempio 3.3, a causa della diversa sollecitazione esterna, assegni una diversa distribuzione di compiti ai suoi vincoli. Aggiungere un carico su un elemento strutturale non significa alterare solo le reazioni dei vincoli che a quell'elemento strutturale sono applicati. I vari elementi strutturali *collaborano*. È appunto in ciò che consiste l'essere *struttura*. A differenza dell'Esempio 3.3 la struttura qui va considerata come arco a tre cerniere.

**Esempio 3.17** L'arco a tre cerniere

La più semplice ed essenziale forma è come nella Figura 3.60b. Consiste di due aste rigide incernierate fra loro in un estremo e a terra nell'altro (indipendentemente dal fatto che le aste siano rettilinee), ma ne vedremo molte generalizzazioni.

Le componenti incognite di reazioni vincolari sono  $X_1 X_2 X_3 X_4$ . Se l'arco individua un triangolo equilatero e i carichi sono concentrati come nella Figura 3.63a le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \\ M_C^{(BC)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_3 \\ X_2 + X_4 = 2p \\ \frac{l}{4}p + \frac{3}{4}pl = X_4l \\ \frac{l}{4}p + X_3l \frac{\sqrt{3}}{2} = X_4 \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{p}{2\sqrt{3}} \quad X_2 = p \quad X_3 = \frac{p}{2\sqrt{3}} \quad X_4 = p$$

Nelle strutture moltiplicemente connesse non equivalenti a un sol corpo rigido il problema esterno non è separabile dal problema interno: bisogna "aprire" la struttura anche per il calcolo delle RV



La articolazione introdotta con la cerniera in C è essenziale per spiegare il funzionamento dell'arco. Se la struttura fosse un tutt'uno rigido (Fi-

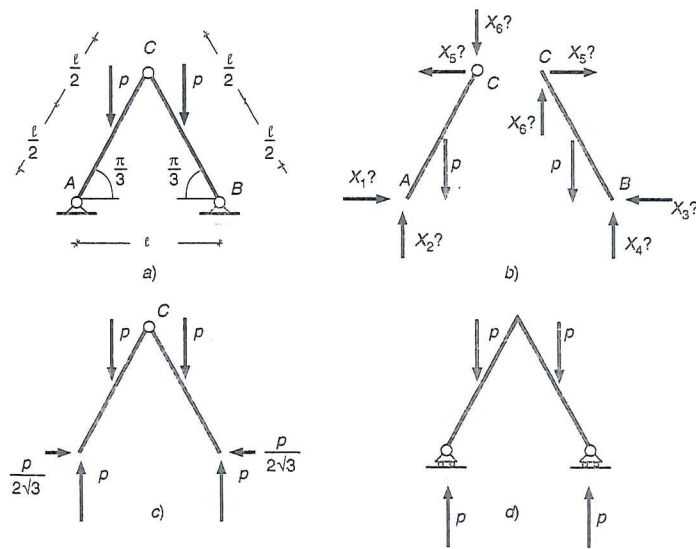
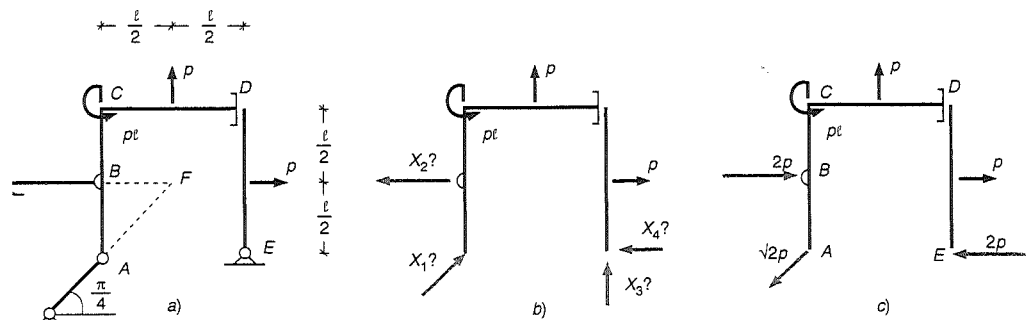


Figura 3.63

gura 3.63d) non sarebbe strettamente necessario alcun contenimento della spinta: basterebbero due carrelli come vincoli. Ma si tratterebbe di una "trave" appoggiata, non di un "arco" e le azioni interne sarebbero ben diverse!

**Esempio 3.18 Cerniere improprie**

Una prima generalizzazione dell'arco a tre cerniere proviene dalla generalizzazione del concetto di cerniera: con cerniera, "impropria", si usa indicare anche il pattino o altro vincolo doppio (vedi Tabella 4.1). Tale generalizzazione, il cui senso verrà ulteriormente commentato nel Capitolo 4, consente di chiamare arco a tre cerniere la struttura ABCDE di Figura 3.64. Le tre "cerniere" sono F; D; E.



La quarta equazione da aggiungere alle tre equazioni cardinali deve essere pura rispetto alla "cerniera" intermedia D: è data dall'annullarsi delle forze che agiscono su ED (oppure su AD) in direzione y; impone che l'asta ED (o tutta la sua parte complementare) non abbia traslazioni verticali, traslazioni che il pattino non potrebbe impedire.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_F = 0 \\ R_y^{(ED)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + p = x_2 + x_4 & x_1 = -\sqrt{2}p \\ x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + p + x_3 = 0 & x_2 = -2p \\ pl + x_3 \frac{l}{2} = x_4 \frac{l}{2} & x_3 = 0 \\ x_3 = 0 & x_4 = 2p \end{cases}$$

**Commento:** le forze in B e in E formano una coppia oraria di momento  $pl$  che si oppone alla coppia attiva; le altre tre forze, convergenti in F, sono anch'esse equilibrate.

**Esempio 3.19 Una struttura ad albero**

La struttura di Figura 3.60a, ancora ad albero, sia sollecitata dall'esterno come nella Figura 3.65a.

Pur essendo cinque le componenti incognite di reazioni vincolari esterne c'è modo, essendo la struttura ad albero, di calcolarle con cinque equazioni senza introdurre ulteriori incognite derivanti dai vincoli interni.

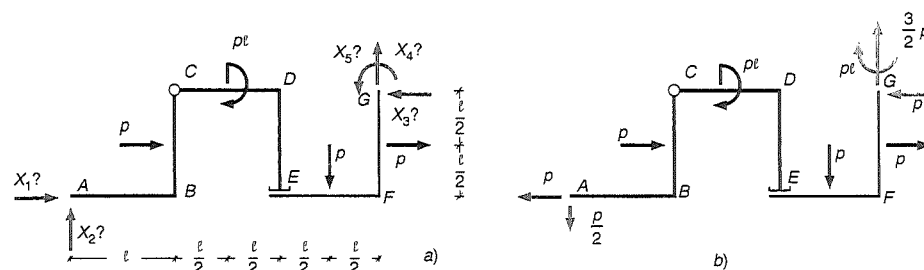


Figura 3.65

Alle tre equazioni cardinali si possono infatti aggiungere:

- 1) l'annullarsi del momento, rispetto a C, delle forze agenti su AC: è un'equazione pura rispetto al vincolo in C; impone che l'asta AC non ruoti attorno a C;
- 2) l'annullarsi della somma delle forze orizzontali sul complesso delle due aste ACE: è un'equazione pura rispetto al vincolo in E (il quale non fornisce forze orizzontali); diremo brevemente: l'equazione impone che il complesso delle due aste ACE (irrigidito) non trasli orizzontalmente.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \\ M_C^{(AC)} = 0 \\ R_x^{(ACE)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + 2p = X_3 & X_1 = -p \\ X_2 + X_4 = p & X_2 = -\frac{p}{2} \\ \frac{l}{2}p + pl + \frac{5}{2}pl + \frac{l}{2}p = X_3l + X_43l + X_5 & X_3 = p \\ X_1l + \frac{l}{2}p = X_2l & X_4 = \frac{3}{2}p \\ X_1 + p = 0 & X_5 = -pl \end{cases}$$



Il procedimento finora proposto si può ulteriormente semplificare. Una volta riconosciuto che la struttura è ad albero e isostatica, si cercano equazioni di equilibrio (globali o parziali che siano) che abbiano questi requisiti:

- 1) siano equazioni pure rispetto ai vincoli interni;
- 2) siano tante quante le componenti incognite di reazioni vincolari esterne;
- 3) ciascuna contenga il minor numero possibile di incognite, se possibile una sola;
- 4) siano (ovviamente) fra loro indipendenti.

Per esempio il suddetto problema si può così risolvere:

$$\begin{aligned} R_x^{(EG)} = 0 \text{ (l'asta EG non deve traslare orizzontalmente)} & \Rightarrow X_3 = p \\ R_x = 0 \text{ (il tutto non deve traslare orizzontalmente)} & \Rightarrow X_1 = -p \\ M_C^{(AC)} = 0 \text{ (l'asta AC non deve ruotare rispetto a C)} & \Rightarrow X_2 = -p/2 \\ R_y = 0 \text{ (il tutto non deve traslare verticalmente)} & \Rightarrow X_4 = 3/2p \\ M_C^{(CEG)} = 0 \text{ (il complesso delle due aste CEG non deve ruotare attorno a C)} & \Rightarrow X_5 = -pl \end{aligned}$$

**Esempio 3.20 L'anello isostatico**

Tre aste collegate fra di loro con tre cerniere (o con tre vincoli doppi) sono il più semplice esempio di "anello isostatico"; con questo termine si indica un circuito chiuso formato da più aste vincolate fra loro isostaticamente e cioè con i vincoli "essenziali" a non consentire deformabilità.

L'anello isostatico, in quanto a spostamenti rigidi possibili, è "equivalente" a un sol corpo rigido. Una struttura che sia moltiplicemente connessa per la presenza di soli anelli isostatici può essere analizzata, per il calcolo delle reazioni vincolari esterne, in modo del tutto simile alle strutture semplicemente connesse.

Sia l'anello isostatico di Figura 3.61a (aste di uguale lunghezza  $l$ ) sollecitato come nella Figura 3.66. Le tre componenti di reazioni vincolari esterne si trovano con le sole equazioni cardinali

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = p \\ X_3 = p \end{cases}$$

La biella  $AB$  funge da "catena" per l'arco  $ABC$  rendendo inutile il contenimento della spinta.

**Esempio 3.21 Un "arco a 3 cerniere" generalizzato**

Anche la struttura di Figura 3.67 contiene un solo circuito chiuso isostatico.

Le quattro componenti di reazioni vincolari esterne si calcolano risolvendo il sistema di quattro equazioni, del tutto simile a quello usato nell'Esempio 3.17.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \\ M_D^{(DE)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + p = X_3 \\ X_2 + X_4 = 2p \\ pl + \frac{l}{2}p = X_4l \\ \frac{l}{2}p = X_3l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{p}{2} \\ X_2 = \frac{p}{2} \\ X_3 = \frac{p}{2} \\ X_4 = \frac{3}{2}p \end{cases}$$

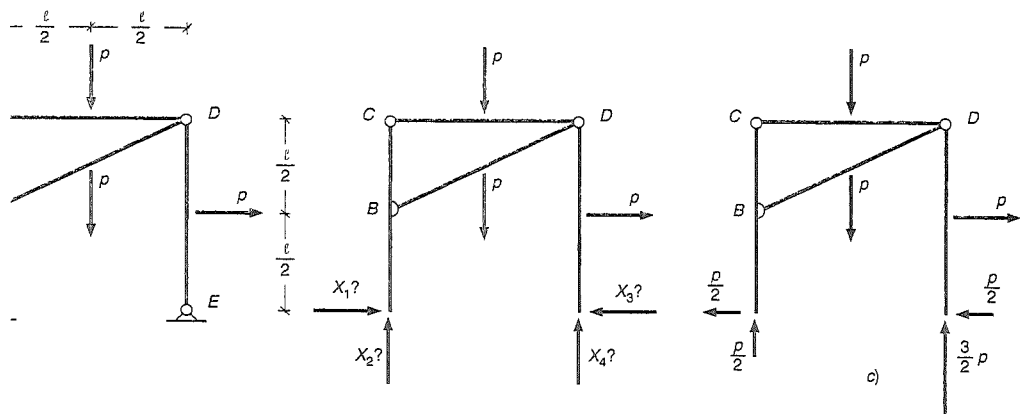


Fig. 3.67



La struttura di Figura 3.67 è un "arco a tre cerniere": il ruolo dell'asta  $AC$  dell'Esempio 3.17 è svolto dall'anello isostatico  $ABCDB$ , "equivalente" a un sol corpo rigido.

**Esempio 3.22 L'anello ipostatico**

Concettualmente e progettualmente diverso dal precedente è il portale di Figura 3.68 (e Figura 3.61b). Il circuito chiuso non è "equivalente" a un solo corpo rigido: è deformabile; consiste di quattro aste collegate con quattro cerniere ( $C, D, E, G$ ).

Le quattro incognite di reazioni vincolari esterne vanno calcolate con un numero di equazioni maggiore di quattro, equazioni che coinvolgono anche le azioni interne relative a qualche vincolo interrompendo il quale la struttura diviene ad albero (Figura 3.68b). Si "apra" per esempio in  $G$  la struttura per renderla ad albero e cioè: si mettano in evidenza le componenti incognite  $X_5$  e  $X_6$  che attraverso la cerniera  $G$  le due parti della struttura si scambiano fra loro.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \\ M_C^{(GC)} = 0 \\ M_D^{(GC+DB)} = 0 \\ M_E^{(AE)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + p = X_3 \\ X_2 + X_4 = 2p \\ pl + \frac{l}{2}p = X_4l \\ \frac{l}{2}p + X_5 \frac{l}{3} = X_6l \\ pl + X_5 \frac{2}{3}l = X_3l + X_6l \\ X_1l = X_5 \frac{2}{3}l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -p \\ X_2 = \frac{p}{2} \\ X_3 = 0 \\ X_4 = \frac{3}{2}p \\ X_5 = -\frac{3}{2}p \\ X_6 = 0 \end{cases}$$

Siamo ora in grado di calcolare le azioni interne in ogni struttura isostatica piana, calcolo che si affronta dopo che sia stato risolto il problema esterno. Solo nel caso in cui si tratti di un corpo rigido con unico incastro si può affrontare subito il calcolo delle azioni interne, senza aver prima determinato le reazioni di incastro (Esempio 3.14). In ogni caso, il calcolo delle azioni interne esige che la struttura sia resa ad albero.

Il calcolo delle azioni interne si conduce come già messo in luce nel Paragrafo 3.12. Vale ancora l'uso delle (3.24) e ciò chiarisce il motivo per cui la struttura

*In presenza di anelli ipostatici il problema esterno non è scindibile da quello interno. Occorre "aprire" la struttura anche per la ricerca delle reazioni vincolari esterne*

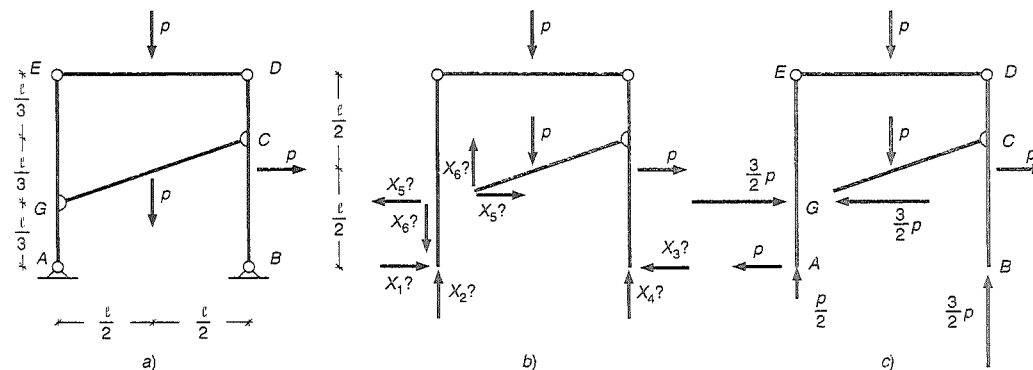


Figura 3.68

vada, prima, resa ad albero: le (3.24) vanno scritte per l'una delle *due* parti in cui il punto *P* (dove si stanno valutando le azioni interne) divide la struttura.

Accade ovviamente che i valori delle azioni interne *NTM*, nei punti dove sussistono i vincoli interni, non possono essere tutti e tre diversi da zero (a meno che non si tratti di incastro). Infatti laddove sussista una cerniera non si trasmettono momenti, dove un pattino non forze parallele allo scorrimento concesso, dove un carrello non forze parallele allo scorrimento e neppure momenti...

E ciò deve risultare immediatamente leggibile nei diagrammi delle azioni interne.

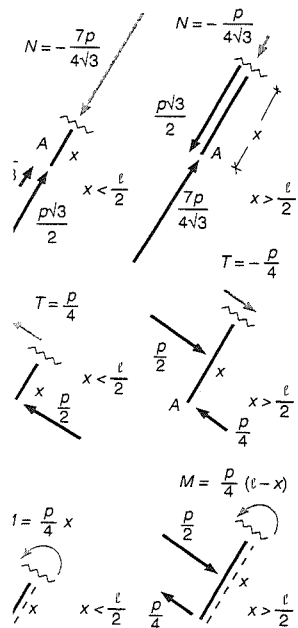
Calcoliamo ora, e tracciamo i diagrammi delle azioni interne relativamente agli Esempi 3.17-3.22 per cui il problema esterno è già stato risolto.

**Esempio 3.23**

Calcolo delle azioni interne nella struttura dell'Esempio 3.17.

La sollecitazione esterna è nota (Figura 3.63c).

Calcolo delle azioni interne nell'asta AC (Figura 3.69a).



$$N(x) = -\frac{p}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2} - p \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{7}{4\sqrt{3}} p \quad \text{per } x < \frac{l}{2}$$

$$N(x) = -\frac{7}{4\sqrt{3}} p + p \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4\sqrt{3}} p \quad \text{per } x > \frac{l}{2}$$

$$T(x) = -\frac{p}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{p}{2} = \frac{p}{4} \quad \text{per } x < \frac{l}{2}$$

$$T(x) = \frac{p}{4} - \frac{p}{2} = -\frac{p}{4} \quad \text{per } x > \frac{l}{2}$$

$$M(x) = -\frac{p}{2\sqrt{3}} x \frac{\sqrt{3}}{2} + p \frac{x}{2} = \frac{1}{4} px \quad \text{per } x \leq \frac{l}{2}$$

$$M(x) = \frac{1}{4} px - \frac{p}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{4} px + \frac{1}{4} pl \quad \text{per } x \geq \frac{l}{2}$$



Le azioni assiali e di taglio sono discontinue nei punti medi dell'asta, la discontinuità essendo di entità uguale alle forze ivi concentrate (nelle rispettive direzioni). Il momento flettente è invece funzione continua (vedi segni di uguaglianza) nei punti di concentrazione delle forze, dove il diagramma presenta punti angolosi; è nullo nelle cerniere (Figura 3.69b).

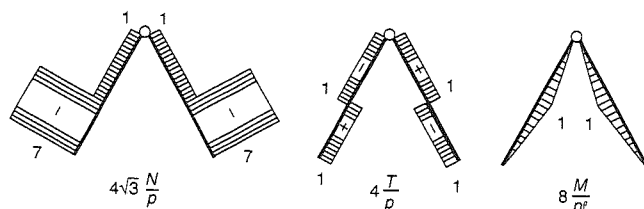


Figura 3.69b

**Esempio 3.24**

Calcolo delle azioni interne nella struttura dell'Esempio 3.18.

La sollecitazione esterna è nota (Figura 3.64c).

Il calcolo di *N* è immediato. Il calcolo di *T* è il seguente (Figura 3.70a):

bielle:  $T = 0$

tratto AB:  $T = p$  per  $x < l/2$   
 $T = p - 2p$  per  $x > l/2$

tratto CD:  $T = -p$  per  $x < l/2$   
 $T = -p + p$  per  $x > l/2$

asta ED:  $T = 2p$  per  $x < l/2$   
 $T = 2p - p$  per  $x > l/2$   
 oppure (proseguendo da ①)  
 $T = -p + 2p$  per  $x < l/2$   
 $T = p + p$  per  $x > l/2$



Le (3.32) si possono scrivere indifferentemente per una o l'altra parte in cui la sezione separa la struttura, come si è esplicitamente fatto per il calcolo di *T* in ED.

Il calcolo di *M* è il seguente (Figura 3.70b):

Nelle bielle è  $M = 0$

tratto AC:  $M(x) = px$  per  $x < l/2$   
 $M(x) = px - 2p(x - l/2) = -px + pl$  per  $l/2 \leq x < l$

tratto CD:  $M(x) = -pl - px$  per  $0 < x \leq l/2$   
 $M(x) = -pl - px + p(x - l/2) = -3/2 pl$  per  $x \geq l/2$

asta ED:  $M(x) = -2px$  per  $x \leq l/2$   
 $M(x) = -2px + p(x - l/2) = -px - pl/2$  per  $x \geq l/2$



Il diagramma di *M* è discontinuo solo laddove è applicato un momento concentrato dall'esterno (spigolo C). Nello spigolo D è invece continuo; si usa dire che *M* viene "ribaltato" (Figura 3.70c).

**Esempio 3.25**

Calcolo delle azioni interne nella struttura dell'Esempio 3.19.

La sollecitazione esterna è nota (Figura 3.65b).

Il calcolo delle azioni interne consiste al solito nell'applicazione delle (3.24). Per casi così semplici si svolge mentalmente "percorrendo" la distribuzione delle forze esterne sulla struttura e si riportano i valori sui diagrammi.

Diamo qualche esplicitazione di tale "percorso" (Figura 3.71a):

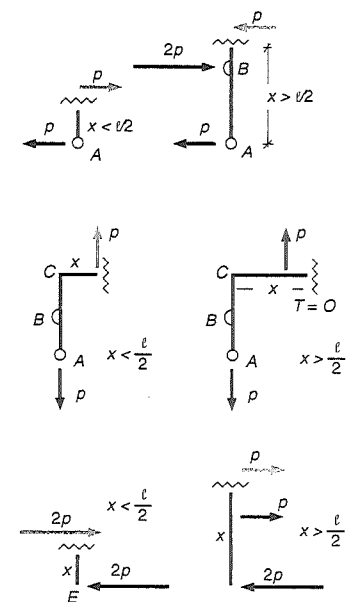


Figura 3.70a

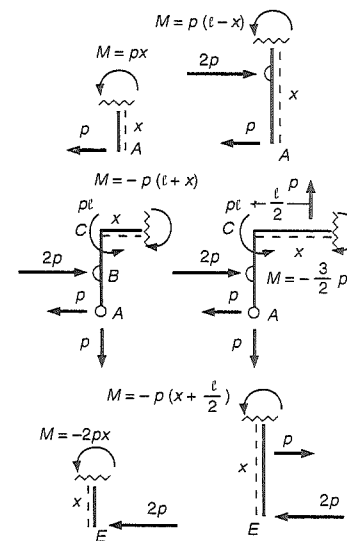
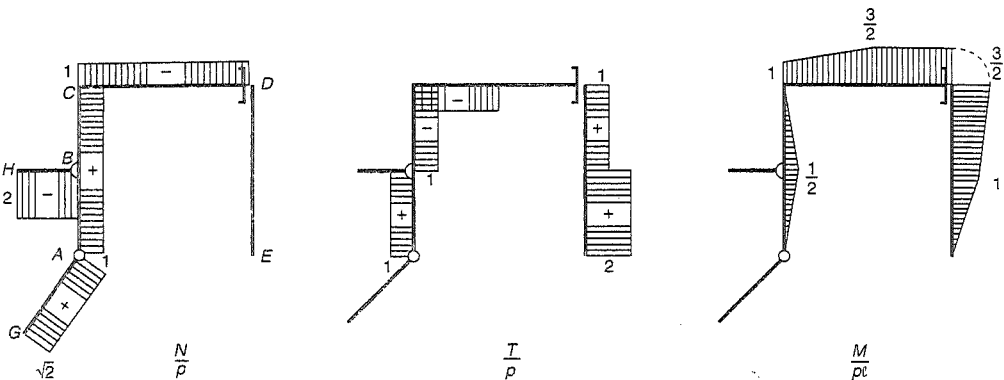
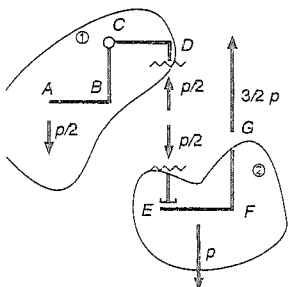


Figura 3.70b



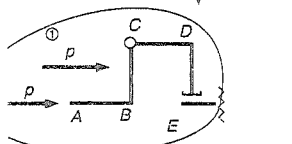
ra 3.70c

1) nell'asta  $DE$  è  $N = -p/2$  perché su ① c'è solo una forza  $p/2$  nella direzione di  $DE$ ; si giungerebbe alla stessa conclusione provenendo da ②:  $3p/2$  verso l'alto e  $p$  verso il basso danno  $p/2$  verso l'alto;



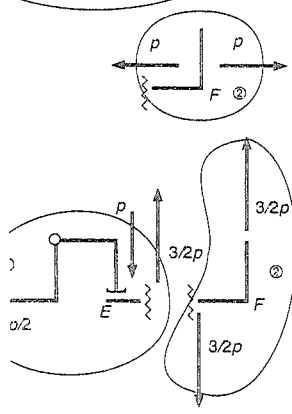
2) nell'asta  $EF$  è  $N = 0$  perché su ① ci sono due forze opposte nella direzione di  $EF$  (e anche su ②). La forza applicata in mezzeria non comporta discontinuità per  $N$ ;

3) nel tratto  $EF$  il taglio  $T$  è discontinuo nel punto di mezzo. A sinistra di esso solo  $p/2$  contribuisce al taglio (negativo); appena a destra della mezzeria interviene anche  $p$  e anch'esso dà contributo negativo al taglio; si giungerebbe alla stessa conclusione provenendo da ②: a destra della mezzeria c'è solo la forza  $3/2p$  (negativo); appena a sinistra interviene anche  $p$  (positivo);



4) se il calcolo di  $M$  si fa mentalmente non occorre assumere fibre di riferimento.

Si può procedere iniziando da  $A$  (e ragionando ancora sulla Figura 3.65b): il momento cresce per contributi della sola forza verticale  $p/2$ , tendendo le fibre superiori fino a valere  $pl/2$  in  $B$ ; tale valore si ribalta su  $BC$  (tende perciò le fibre di sinistra); la forza  $p/2$  ha ora braccio costante rispetto ai punti di  $BC$  e il suo contributo rimane  $pl/2$ , ma si aggiunge il momento di  $p$  con braccio crescente che tende le fibre di destra fino a valere anch'esso  $pl/2$  in mezzeria, dove pertanto  $M$  si annulla e resta nullo fino alla cerniera (coppia  $pl/2$  più forza  $p/2$  con braccio costante). Proseguendo il "percorso" vediamo ora che il momento rispetto al generico punto  $P$  di  $CD$  è dato, fino alla mezzeria, dalla coppia oraria  $pl/2$ , che tende le fibre inferiori, a cui si oppone  $p/2$  con braccio crescente da  $l$  a  $3l/2$ ; in mezzeria pertanto  $M$  vale  $pl/4$ ; interviene la discontinuità  $pl$  dopo di che  $M$  torna a variare ancora con il braccio di  $p/2$  e quindi con la stessa inclinazione fino a  $pl/2$ . Si ribalta su  $DE$  rispetto ai cui punti  $M$  resta invariato. A questo punto conviene sospendere il percorso riprendendolo da  $G$  dove  $M = pl$  e tende le fibre di sinistra e decresce per il contributo di  $p$  giungendo a valere  $M = pl/2$  in mezzeria di  $GF$  e rimanendo tale (due coppie) fino a  $F$ . Si ribalta su  $FE$  e diminuisce (da  $F$  verso  $E$ ) perché  $3p/2$  acquista braccio e si oppone al momento  $pl/2$  (che rimane costante in quanto proviene da due coppie). Giunge a valere  $pl/4$  in mezzeria dove interviene  $p$  che dà contributo opposto e quindi rallenta la variazione;  $M = pl/2$  in  $E$ .



a 3.71a

Vale la pena esplicitare il calcolo lungo quest'ultima asta  $FE$  (Figura 3.71b):

$$M(x) = \frac{3}{2} px - pl + \frac{1}{2} pl = \frac{3}{2} px - \frac{1}{2} pl \quad \text{per } x \leq \frac{l}{2}$$

con  $M(l/2) = 1/4 pl$ ;  $M(0) = M(x_F) = -p(l/2)$

$$M(x) = \frac{3}{2} px - pl + \frac{1}{2} pl - p\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} px \quad \text{per } x \geq \frac{l}{2}$$

con  $M(l) = M(x_F) = p(l/2)$ .

I diagrammi sono riportati nella Figura 3.71c.

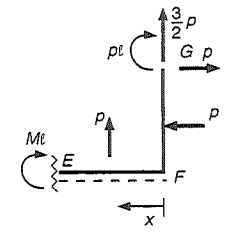


Figura 3.71b

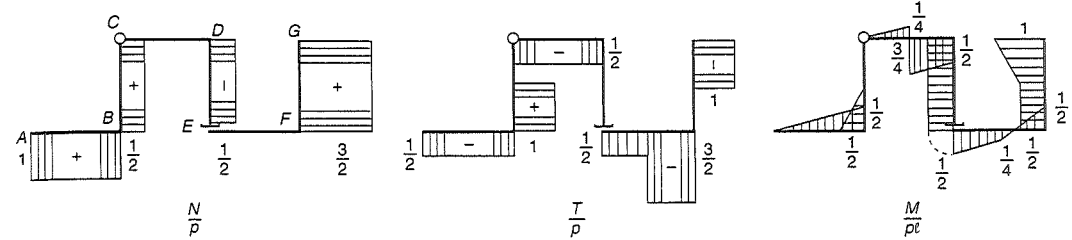


Figura 3.71c

**Esempio 3.26** Triangolo isostatico (arco con catena)

Calcolo delle azioni interne nella struttura dell'Esempio 3.20.

Anche se il problema esterno (Figura 3.66b) è risolto, occorre, prima di iniziare il calcolo delle azioni interne, "aprire" la struttura, rendendola ad albero (Figura 3.72a). Converrà aprire *appena a destra di A* poiché  $AB$ , che è biella, esercita su  $A$  una forza nota in direzione: è diretta come  $AB$ .

Quando un nodo è caricato, come la cerniera  $A$ , occorre sempre precisare che la sezione viene operata appena prima o appena dopo del carico concentrato. Sul nodo caricato le due aste che ivi convergono *non* portano forze uguali. La situazione del nodo  $A$  è illustrata nella Figura 3.72b.

La forza interna  $X_4$  si determina al solito con un'equazione parziale che sia pura rispetto agli altri vincoli:

$$[M_C^{(AC)} = 0] \Rightarrow p \frac{l}{4} + X_4 l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2} p \quad X_4 = \frac{p}{2\sqrt{3}}$$

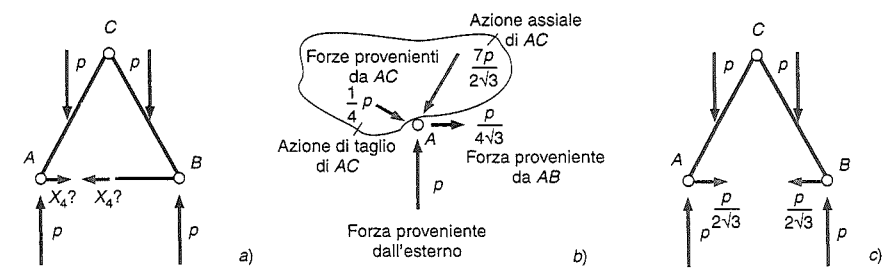
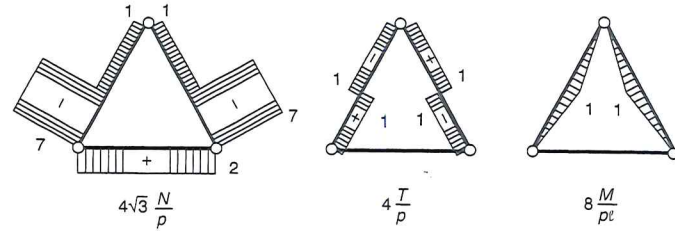


Figura 3.72

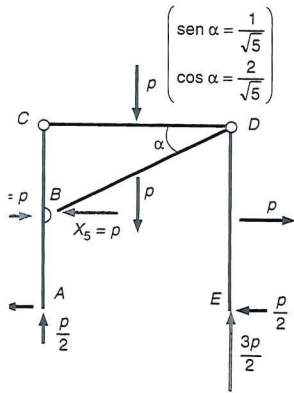
Tale forza  $X_4$  è azione assiale per l'asta  $AB$  (Figura 3.72c):

■ la trazione esercitata dalla catena  $AB$  sull'arco  $ACB$  sostituisce il contenimento della spinta necessario all'arco a tre cerniere.

Le azioni interne danno luogo agli stessi diagrammi dell'arco a tre cerniere (Figure 3.69) a cui si aggiunge la trazione nell'asta  $AB$  (Figura 3.72d).



ra 3.72d



a 3.73a

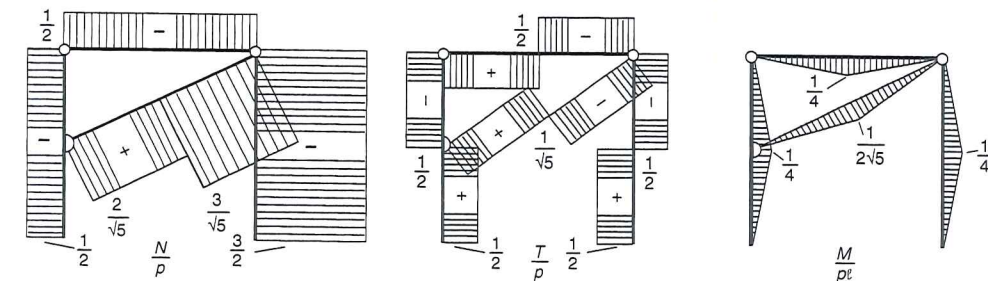
**Esempio 3.27**

Calcolo delle azioni interne nella struttura dell'Esempio 3.21.

Per il calcolo delle azioni interne occorre preventivamente ridurre ad albero la struttura. A tal fine si "apra" in  $B$  e cioè si calcolino le componenti  $X_5, X_6$ , rispettivamente orizzontale e verticale in  $B$  (Figura 3.73a):

$$\begin{cases} M_A^{(AC)} = 0 \\ M_D^{(BD)} = 0 \end{cases} \begin{cases} X_5 \frac{l}{2} = \frac{l}{2} p \\ \frac{l}{2} p + X_6 l = \frac{l}{2} p \end{cases} \begin{cases} X_5 = p \\ X_6 = 0 \end{cases}$$

"Percorrendo" ora la struttura e risolvendo (mentalmente) le (3.32) si ottengono i diagrammi riportati nella Figura 3.73b.



a 3.73b

**Esempio 3.28**

Calcolo delle azioni interne nella struttura dell'Esempio 3.22.

La struttura, raffigurata come nell'Esempio 3.22, è pronta per il calcolo delle azioni interne. Il calcolo viene esplicitato solo per il momento flettente nelle aste  $GC, BD$  (Figura 3.74a e b).

asta  $GC$ :

$$M(x) = \frac{3}{2} p \frac{1}{\sqrt{10}} x \quad \text{per } x \leq \frac{l\sqrt{10}}{2 \cdot 3}$$

$$M(x) = \frac{3}{2\sqrt{10}} px - p \frac{3}{\sqrt{10}} \left( x - \frac{l\sqrt{10}}{2 \cdot 3} \right) \quad \text{per } x \geq \frac{l\sqrt{10}}{2 \cdot 3}$$

con  $M(x_H) = M\left(\frac{l\sqrt{10}}{2 \cdot 3}\right) = \frac{1}{4} pl$

$M(x_C) = M\left(l \frac{\sqrt{10}}{3}\right) = 0$

asta  $BD$ :

$$M(x) = px \quad \text{per } x \leq \frac{l}{6}$$

$$M(x) = px - p \frac{3}{2} \left( x + \frac{l}{6} \right) + p \frac{l}{2} \quad \text{per } x \geq \frac{l}{6}$$

con  $M(x_C) = M\left(\frac{l}{6}\right) = \frac{1}{6} pl$

$M(x_D) = M\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

I diagrammi sono riportati nella Figura 3.74c.

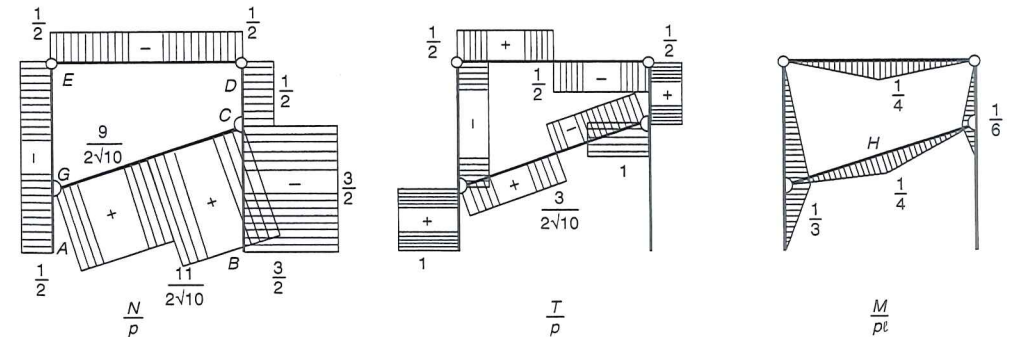


Figura 3.74c

**Esempio 3.29 La travatura reticolare**

È un esempio cospicuo di struttura: consta di anelli isostatici le cui aste componenti sono esclusivamente bielle e cioè aste vincolate (fra loro e con l'esterno) da cerniere sulle quali sono concentrati i carichi (e non altrove). Il comportamento statico della travatura reticolare riveste perciò grande interesse: sono abolite le

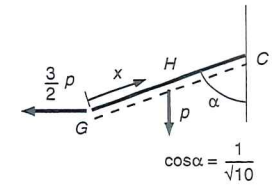


Figura 3.74a

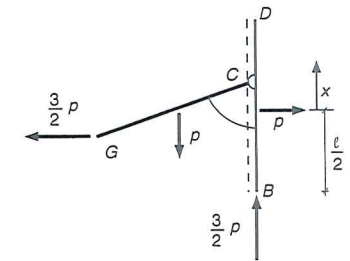


Figura 3.74b

aste sono curve nascono T ed M  
roblema 40) anche in assenza di  
hi sulle aste

azioni di taglio e di momento flettente. Il calcolo delle azioni interne (solo assiali) si riduce alla verifica dell'equilibrio ai nodi.

Nella travatura isostatica di Figura 3.75a le misure assegnate comportano che i triangoli (escluso quello di bordo) siano equilateri.

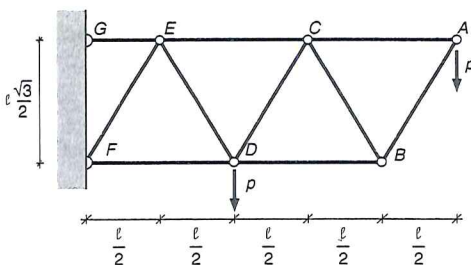


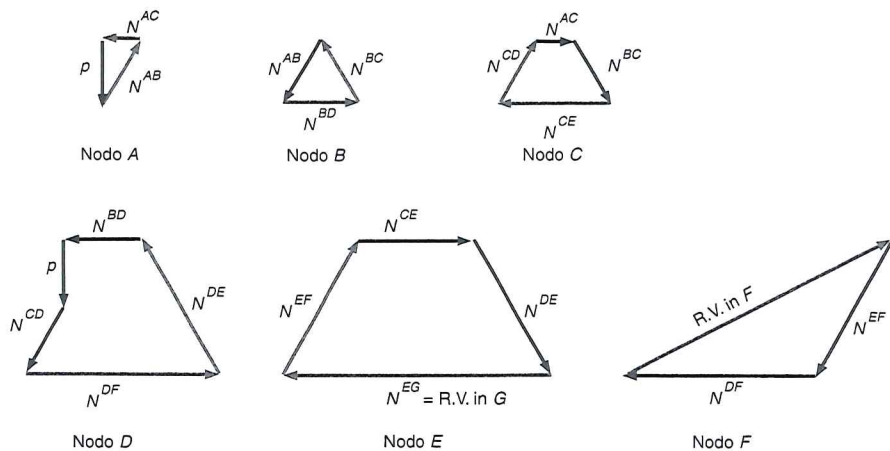
Figura 3.75a

La soluzione grafica è semplicissima: si tratta, in ogni nodo, di equilibrare forze note con due forze di direzione nota; è importante procedere in ordine opportuno: nella figura, da A a F (Figura 3.75b).

☞ Occorre esaminare i nodi in un ordine tale che ogni volta le incognite implicate siano due.

Le due forze che ogni asta porta ai suoi nodi estremi sono opposte. Il diagramma delle azioni assiali si usa rappresentare disegnando la struttura con i puntoni a tratto pesante e i tiranti a tratto leggero e riportando accanto i valori di N. Questi si possono trovare o per via trigonometrica ragionando sulla soluzione grafica o imponendo l'equilibrio ai nodi. In questo esempio sono puntoni le aste AB, BD, CD, DF, EF; sono tiranti le aste AC, BC, CE, DE, EG.

La soluzione analitica (adottando l'ipotesi dei versi delle forze già trovati graficamente) è:



a 3.75b

Nodo A

$$\begin{cases} [R_x = 0] \\ [R_y = 0] \end{cases} \begin{cases} N^{AC} = N^{AB} \frac{1}{2} & N^{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} p \\ N^{AB} \frac{\sqrt{3}}{2} = p & N^{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} p \end{cases}$$

L'equilibrio del nodo A mostra che la biella AB è puntone e la biella AC è tirante. Le loro azioni (ora note) si trasferiscono ai nodi B e C (Figura 3.75b).

Nodo B

$$\begin{cases} [R_x = 0] \\ [R_y = 0] \end{cases} \begin{cases} N^{BC} \frac{1}{2} + N^{AB} \frac{1}{2} = N^{BD} & N^{BD} = \frac{2}{\sqrt{3}} p \\ N^{AB} \frac{\sqrt{3}}{2} = N^{BC} \frac{\sqrt{3}}{2} & N^{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}} p \end{cases}$$

La biella BC è tirante, la biella BD è puntone.

Nodo C

$$\begin{cases} [R_x = 0] \\ [R_y = 0] \end{cases} \begin{cases} N^{AC} + N^{BC} \frac{1}{2} + N^{CD} \frac{1}{2} = N^{CE} & N^{CE} = \frac{3}{\sqrt{3}} p \\ N^{CD} \frac{\sqrt{3}}{2} = N^{BC} \frac{\sqrt{3}}{2} & N^{CD} = \frac{2}{\sqrt{3}} p \end{cases}$$

La biella EC è tirante, la biella CD è puntone.

Nodo D

$$\begin{cases} [R_x = 0] \\ [R_y = 0] \end{cases} \begin{cases} N^{BD} + N^{CD} \frac{1}{2} + N^{DE} \frac{1}{2} = N^{DF} & N^{DF} = \frac{5}{\sqrt{3}} p \\ N^{DE} \frac{\sqrt{3}}{2} = p + N^{CD} \frac{\sqrt{3}}{2} & N^{DE} = \frac{4}{\sqrt{3}} p \end{cases}$$

La biella DE è tirante, la biella DF è puntone.

Nodo E

$$\begin{cases} [R_x = 0] \\ [R_y = 0] \end{cases} \begin{cases} N^{CE} + N^{DE} \frac{1}{2} + N^{EF} \frac{1}{2} = N^{EG} & N^{EG} = \frac{7}{\sqrt{3}} p \\ N^{EF} \frac{\sqrt{3}}{2} = N^{DE} \frac{\sqrt{3}}{2} & N^{EF} = \frac{4}{\sqrt{3}} p \end{cases}$$

La biella EG è tirante, la biella EF è puntone;  $N^{EG}$  è la reazione vincolare in G.

Nodo F

$$\begin{cases} [R_x = 0] \\ [R_y = 0] \end{cases} \begin{cases} N^{EF} \frac{1}{2} + N^{DF} = H_F & H_F = \frac{7}{\sqrt{3}} p \\ N^{EF} \frac{\sqrt{3}}{2} = V_F & V_F = 2p \end{cases}$$