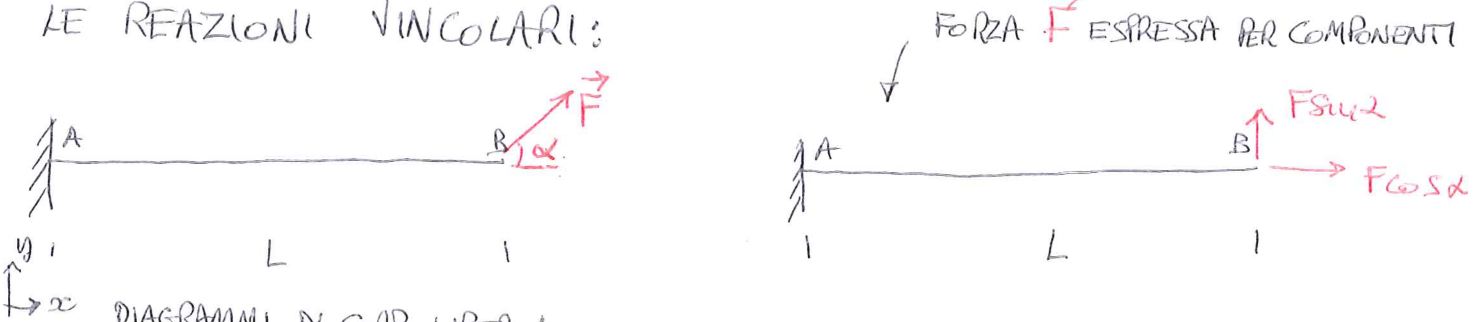
INTRODUZIONE ALLE COMPONENTI DELL'AZIONE INTERNA (IN BREVE, AZIONI INTERNE)

1

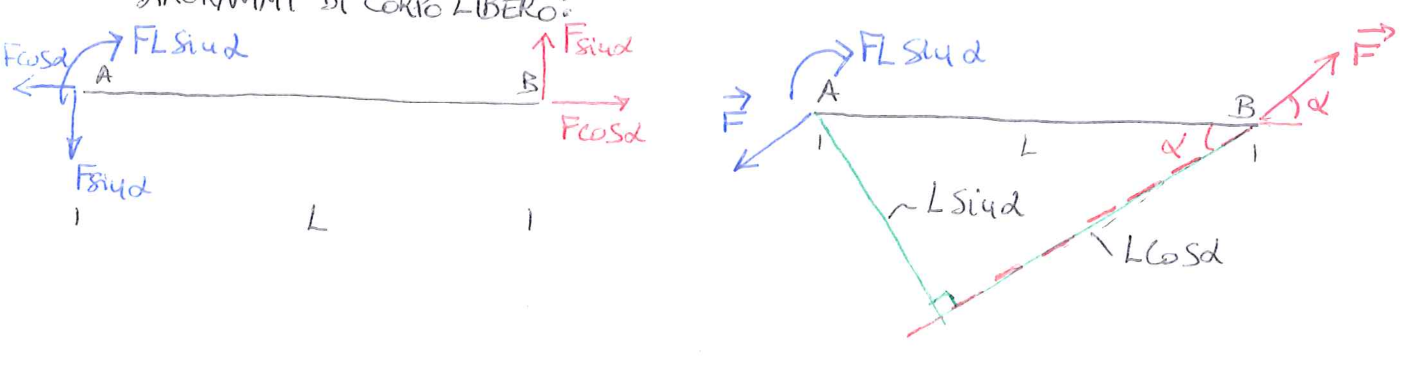
SI È VISTO CHE UNA TRAVE ISOSTATICA BEN VINCOLATA (NON LABILE) PUÒ STARE IN EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE DI QUALSIASI SISTEMA DI CARICHI, IN QUANTO LE REAZIONI VINCOLARI, CHE IN QUESTO CASO SI POSSONO DETERMINARE UNIVOCAMENTE, SI "ADATTANO" ALLA CONDIZIONE DI CARICO, GARANTENDO SEMPRE CHE SUSSISTA L'EQUILIBRIO.
QUESTO RISULTATO SI PUÒ GENERALIZZARE A STRUTTURE ISOSTATICHE, OTTENUTE MEDIANTE ASSEMBLAGGIO DI TRAVI.

PER VALUTARE SE UNA DATA TRAVE (O STRUTTURA) ISOSTATICA È IN GRADO DI "RESISTERE" AI CARICHI APPLICATI OCCORRE DETERMINARE LO STATO DI SOLLECITAZIONE IN OGNI PUNTO DELL'ASSE DELLA TRAVE. QUESTO PORTA A INDIVIDUARE IL FLUSSO DELLE FORZE CHE "PERCORRONO" INTERNAMENTE LA TRAVE E CHE "TRASMETTONO" I CARICHI DAI LORO PUNTI DI APPLICAZIONE AI VINCOLI A TERRA, I QUALI GARANTISCONO LA "FISSITÀ" DELLA TRAVE, IMPEDENDOLE DI SPOSTARSI.

PER COMPRENDERE CONCETTUALMENTE CHE COSA SIA QUESTO FLUSSO DI FORZE CHE SI "INCANALANO" LUNGO LA TRAVE SI RIPRENDE IN ESAME UN CASO GIÀ CONSIDERATO, PER IL QUALE SI SONO GIÀ DETERMINATE LE REAZIONI VINCOLARI:



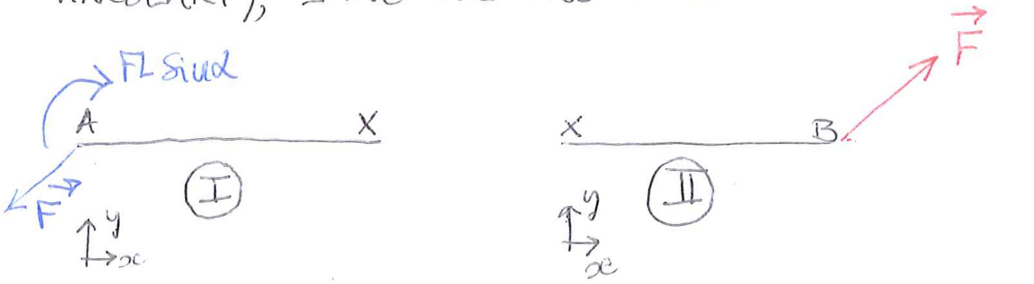
DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO:



NELL'ULTIMO GRAFICO LE COMPONENTI DELLA REAZIONE VINCOLARE H_A E V_A SONO STATE RICOMPOSTE, ED EVIDENZIANO CHE LA LORO RISULTANTE EQUILIBRA LA FORZA $\vec{F}$; SI VEDE ANCHE CHE LA RETTA D'AZIONE DELLA FORZA $\vec{F}$ APPLICATA IN B HA DISTANZA DA A, DOVE SI È VALUTATO $M_{z(A)}$, PARI A $L\sin\alpha$, E QUESTO SPIEGA PERCHÉ

LA COPPIA D'INCASTRO M_A ABBIA VALORE $FL\sin\alpha$ (SI RAMMENTA CHE $F = |\vec{F}|$, CIOÈ F EGUAGLIA IL MODULO $|F|$ DELLA FORZA $\vec{F}$): $L\sin\alpha$ È IL BRACCIO DI $\vec{F}$ RISPETTO A (A) IN PRATICA LA TRAVE È SOGGETTA ALL'AZIONE DI 2 FORZE $\vec{F}$ (APPLICATA IN (B)) E $-\vec{F}$ (APPLICATA IN (A); IL SEGNO (−) È STATO COMPENSATO DALL'AVERE DISEGNATO LA FORZA IN VERSO OPPOSTO RISPETTO A QUELLA PRESENTE IN (B): $\overrightarrow{-F} \nearrow = \vec{F} \swarrow$); POICHÉ LE 2 FORZE, EGUALI E OPPOSTE NON SONO ALLINEATE, PER SODDISFARE L'EQUILIBRIO DEVE ESSERE PRESENTE UNA COPPIA ORARIA ? DI VALORE (ASSOLUTO) $FL\sin\alpha$.

SE ORA SI IMMAGINA DI SPEZZARE LA TRAVE IN UN PUNTO X, SI HA CHE LE 2 PARTI (I) E (II), DISEGNATE IN ESPLOSO, NON SONO PIÙ IN EQUILIBRIO SOTTO IL SOLO EFFETTO DELLE FORZE ESTERNE (CARICHI E REAZIONI VINCOLARI), SALVO NEL CASO IN CUI $F = 0$.

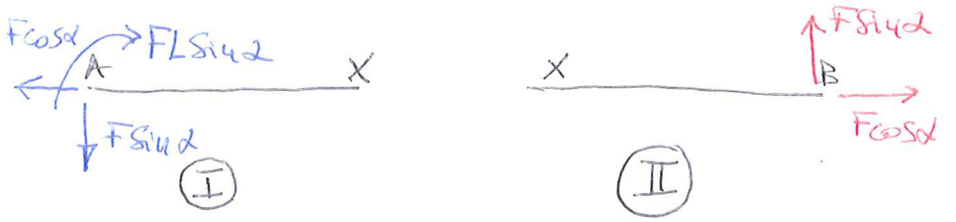


(I)

$\rightarrow R_x^{(I)} = -F\cos\alpha \neq 0$

$\uparrow R_y^{(I)} = -F\sin\alpha \neq 0$

$\circlearrowright M_{z(A)}^{(I)} = -FL\sin\alpha \neq 0$



(II)

$\rightarrow R_x^{(II)} = +F\cos\alpha \neq 0$

$\uparrow R_y^{(II)} = +F\sin\alpha \neq 0$

$\circlearrowright M_{z(B)}^{(II)} = 0$.

OCCORRE QUINDI AMMETTERE CHE OLTRE ALLE FORZE ESTERNE (CARICHI E REAZIONI) ESISTANO ANCHE DELLE FORZE INTERNE, CHE LE 2 PARTI SI SCAMBIANO E CHE, RISPETTANDO IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE, NON INTERVENGONO QUANDO SI CONSIDERA LA TRAVE COMPLETA (CIOÈ LA SOMMA DELLE PARTI (I) E (II)) IN QUANTO <u>NON</u> CONTRIBUISCONO ALL'EQUILIBRIO GLOBALE.

SI INTRODUCE QUINDI IL SEGUENTE <u>POSTULATO RIDOTTO DELLE TENSIONI INTERNE</u>:

SE UN CORPO RIGIDO È GLOBALMENTE IN EQUILIBRIO, LO È ANCHE OGNI SUA PARTE, SOGGETTA ALLE <u>FORZE ESTERNE</u> CHE DIRETTAMENTE LE COMPETONO E ALLE <u>FORZE INTERNE</u> CHE LE RIMANENTI PARTI TRASMETTONO ALLA PARTE CONSIDERATA.

IL POSTULATO AMMETTE CHE UN CORPO RIGIDO POSSA ESSERE SUDDIVISO IN N ($N>1$) PARTI; NEL CASO PRESENTE, $N=2$ E LA FORMULAZIONE SI SEMPLIFICA COSÌ: SI AMMETTE CHE 3

- LA PARTE (I) SIA IN EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI APPLICATE IN (A) (H_A, V_A, M_A) CHE COSTITUISCONO FORZE ESTERNE E DI UNA FORZA INTERNA $\vec{Z}$ CHE È TRASMESSA DALLA PARTE (II).
- LA PARTE (II) STA IN EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE DEL CARICO ESTERNO $\vec{F}$ E DI UNA FORZA INTERNA $-\vec{Z}$, CHE È TRASMESSA DALLA PARTE (I).

IN QUESTO MODO LE 2 FORZE INTERNE $\vec{Z}$ E $-\vec{Z}$ CHE SONO APPLICATE A PARTI DIVERSE GARANTISCONO CHE, QUANDO SI CONSIDERA L'EQUILIBRIO COMPLESSIVO, IL LORO CONTRIBUTO GLOBALE SIA NULLO: $+\vec{Z}-\vec{Z}=\vec{0}$.

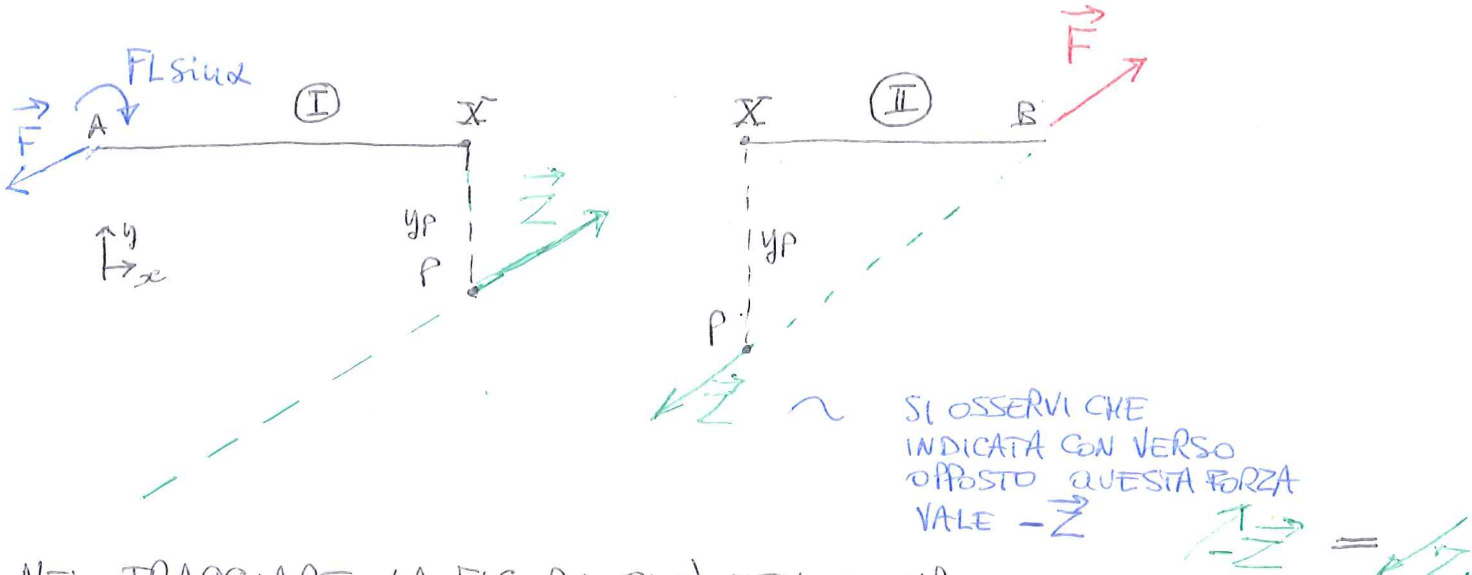
PERALTRO LA FORZA INTERNA $\vec{Z}$ (o $-\vec{Z}$) PUÒ ESSERE DETERMINATA IMPONENDO, IN VIRTÙ DEL SUDDETTO POSTULATO, CHE LA PARTE (I) (o LA PARTE (II)) SIA IN EQUILIBRIO, FACENDO USO DELLE EQUAZIONI CARDINALI.

SI OSSERVI INFATTI CHE LA FORZA $\vec{Z}$ PRESENTA 3 INCOGNITE UNA VOLTA FISSATO IL PUNTO X DOVE LA TRAVE VIENE SPEZZATA IN 2 PARTI:

- LA COMPONENTE x, Z_x
- LA COMPONENTE y, Z_y
- LA COORDINATA y DEL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE P, y_P [LA COORDINATA x_P È INVECE NOTA PERCHÉ COINCIDE CON QUELLA DEL PUNTO X]

E QUESTE 3 INCOGNITE POSSONO ESSERE DETERMINATE SE SI DISPONE DI 3 EQUAZIONI.

GRAFICAMENTE LA SITUAZIONE È QUESTA:

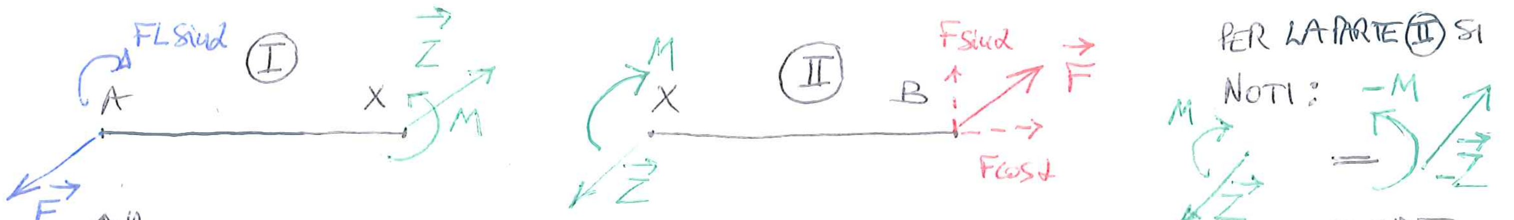


NEL TRACCIARE LA FIGURA SI È TENUTO IMPLICITAMENTE CONTO DEL FATTO CHE PER EQUILIBRARE IL CARICO $\vec{F}$ NELLA PARTE (II) $-\vec{Z}$ DEVE RISULTARE

ALLINEATO CON $\vec{F}$.

IL PASSO SUCCESSIVO È QUELLO DI RIPORTARE $\vec{Z}$ (E $-\vec{Z}$) AL PUNTO X, CIOÈ ALL'ASSE DELLA TRAVE: CIÒ RICHIEDE L'INTRODUZIONE DI 2 COPPIE, $\vec{M}$ E $-\vec{M}$ CHE TENGONO CONTO DEL MOMENTO DI TRASPORTO.

[SI OSSERVI CHE IL MOMENTO DELLE 2 COPPIE HA COMPONENTE SOLO SECONDO LA DIREZIONE z, SICCHÉ SI PUÒ RAPPRESENTARE SENZA IL SEGNO DI VETTORE]:



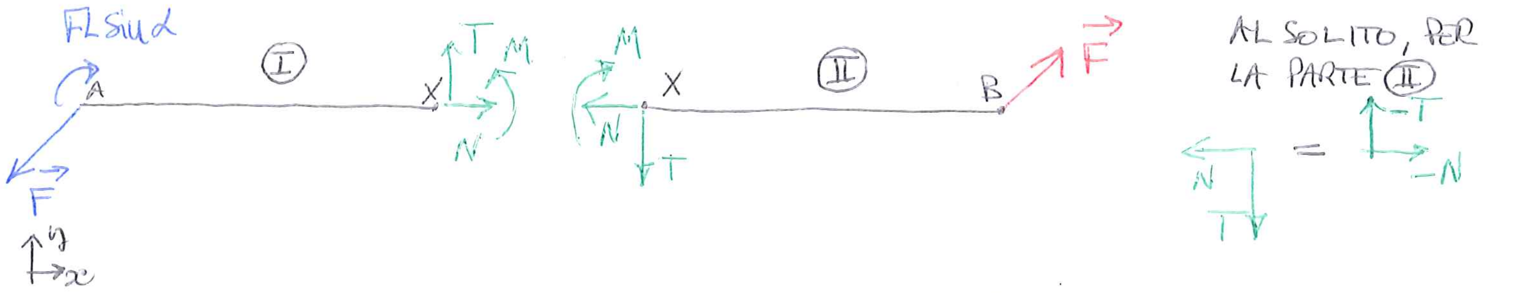
M PRENDE IL NOME DI MOMENTO FLETTENTE, IN QUANTO TENDE A PIEGARE (FLETTERE) LA TRAVE.

DAL GRAFICO APPARE CHIARO CHE SE SI CONSIDERANO INSIEME LE PARTI (I) E (II), COSÌ DA RICOSTRUIRE LA TRAVE INTERA, I CONTRIBUTI DI $+\vec{Z}$ $-\vec{Z}$ E DI $+M$ $-M$ SI ELIDONO:

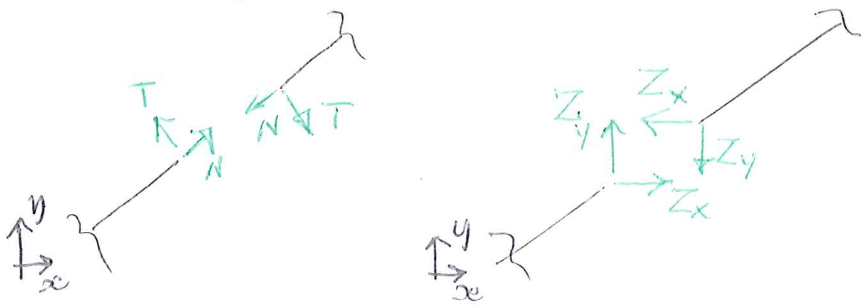
$$\vec{R}^{(I)+(II)} = \underbrace{\left[-\vec{F}+\cancel{\vec{Z}}\right]}_{(I)} + \underbrace{\left[\cancel{-\vec{Z}}+\vec{F}\right]}_{(II)} = \vec{0}$$

$$\Sigma M_{(A)z} = \underbrace{\left[-FL\sin\alpha+\cancel{M}\right]}_{(I)} + \underbrace{\left[\cancel{-M}+F\sin\alpha\, L\right]}_{(II)} = 0$$

A QUESTO PUNTO CONVIENE EFFETTUARE UN'ULTIMA ELABORAZIONE, SCOMPONENDO LA FORZA INTERNA $\vec{Z}$ SECONDO 2 DIREZIONI FRA LORO ORTOGONALI: QUELLA TANGENTE ALL'ASSE DELLA TRAVE, E QUELLA PERPENDICOLARE ALL'ASSE DELLA TRAVE. LE DUE COMPONENTI SI DENOTANO RISPETTIVAMENTE CON N (AZIONE ASSIALE O FORZA NORMALE) E T (AZIONE TAGLIANTE O TAGLIO)



PER LA SITUAZIONE PRESENTE (TRAVE AD ASSE RETTILINEO E DISPOSTO ORIZZONTALMENTE) N E T VENGONO A COINCIDERE CON LE COMPONENTI Z_x E Z_y; IN GENERALE, PERÒ NON È COSÌ:



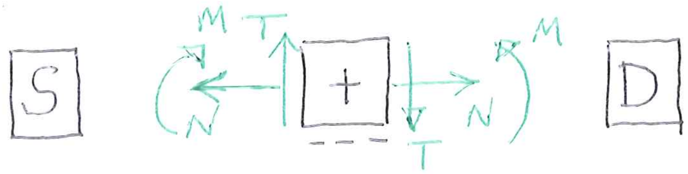
LA SCELTA DI COMPONENTI INTRINSECHE È LEGATA AL FATTO CHE IL COMPORTAMENTO DI UNA TRAVE COME SOLIDO È DESCRITTA MEGLIO RISPETTO A QUESTO RIFERIMENTO PREFERENZIALE (INTRINSECO) CHE RISPETTO A UN GENERICO SISTEMA CARTESIANO $x-y$.

CON LA RIELABORAZIONE ORA INDICATA LE COMPONENTI DELLA AZIONE INTERNA (N, T, M) SI POSSONO DETERMINARE UTILIZZANDO LE EQ. CARDINALI PER UNA DELLE 2 PARTI DELLA TRAVE.

PER SEMPLICITA' OPERATIVA CONVIENE PERÒ PROCEDERE IN QUESTO MODO (CI SI RIFERISCE IN PARTICOLARE A UNA TRAVE CARICATA SOLO ALLE ESTREMITA')

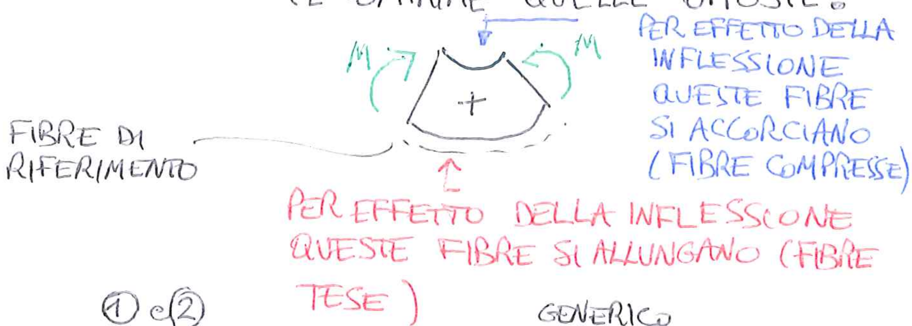
- SI IDENTIFICANO, MEDIANTE TRATTEGGIO LE "FIBRE DI RIFERIMENTO" DELLA TRAVE: QUESTE (SUPERIORI O INFERIORI RISPETTO ALLA LINEA D'ASSE) CONSENTONO DI INDIVIDUARE UNIVOCAMENTE L'ORIENTAZIONE DELLA TRAVE

- SI DISPONE, ORIENTANDOLO CON LE FIBRE DI RIFERIMENTO, IL "CONCIO ELEMENTARE DI RIFERIMENTO" CHE INDIVIDUA LA CONVENZIONE POSITIVA DEI SEGNI DELLE AZIONI INTERNE:



IN SINTESI SI ASSUMONO POSITIVI:

* L'AZIONE ASSIALE DI TRAZIONE
* IL TAGLIO "ORARIO" (CIOÈ QUELLO CHE PRODUCE ROTAZIONE IN SENSO ORARIO DEL CONCIO
* IL MOMENTO FLETTENTE CHE TENDE LE FIBRE DI RIFERIMENTO (E COMPRIME QUELLE OPPOSTE:



- SI SPEZZA LA TRAVE IN DUE PARTI, ① e ② INDICANDO CON X IL GENERICO PUNTO DOVE SI È TAGLIATA LA TRAVE; IL PUNTO VIENE INDIVIDUATO MEDIANTE UNA ASCISSA (PER ESEMPIO x_1) MISURATA A PARTIRE DA UNA DELLE ESTREMITA'.

- SI RIPORTANO ORDINATAMENTE SUI DUE LEMBI LASCIATI ESPOSTI DALLA ROTTURA LE AZIONI INTERNE: SUL LEMBO CHE GUARDA VERSO <u>DESTRA</u> QUELLE INDICATE CON $\boxed{D}$; SUL LEMBO CHE GUARDA

VERSO SINISTRA QUELLE INDICATE CON $\boxed{S}$

- SI PROCEDE A CONSIDERARE UNA DELLE 2 PARTI, IN ALTERNATIVA ① o ② E SI PROCEDE A SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI.

  IN PARTICOLARE PER OTTENERE IL SISTEMA DI EQUAZIONI PIÙ SEMPLICE, DISACCOPPIATO, SI SCRIVE:

  $R_{/\!/} = 0$ ← RISULTANTE DELLE FORZE PARALLELE (//) ALL'ASSE DELLA TRAVE: FORNISCE N

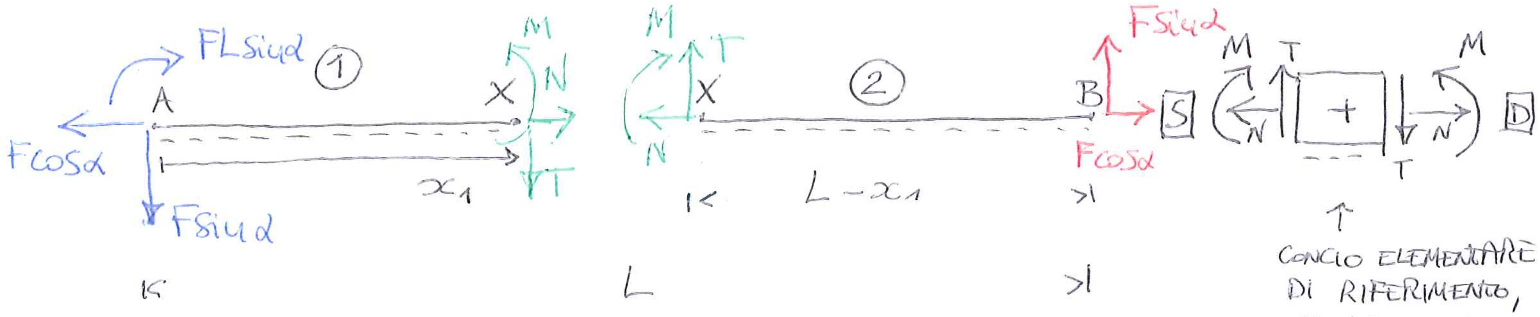
  $R_{\perp} = 0$ ← RISULTANTE DELLE FORZE PERPENDICOLARI (⊥) ALL'ASSE DELLA TRAVE: FORNISCE T

  $M_{z(x)} = 0$ ← MOMENTO RISULTANTE (COMPONENTE z) VALUTATO RISPETTO AL PUNTO X DOVE LA TRAVE È STATA SPEZZATA: FORNISCE M.

- NATURALMENTE LE AZIONI INTERNE DIPENDONO, IN GENERALE, DAL PUNTO IN CUI LA TRAVE È STATA SPEZZATA, CIOÈ DALLA COORDINATA x_1 DEL PUNTO STESSO. NE SEGUE CHE $N = N(x_1)$; $T = T(x_1)$; $M = M(x_1)$ CIOÈ LE AZIONI INTERNE RISULTANO FUNZIONI DELLA ASCISSA x_1

  PER EVITARE EQUIVOCI NEL SEGUITO SI UTILIZZERÀ LA NOTAZIONE CON PARENTESI TONDE "(..)" PER INDICARE LE FUNZIONI, E LE PARENTESI QUADRE "[..]" PER RACCOGLIERE TERMINI FATTORIZZATI.

SI SVOLGE COME ESEMPIO IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE PER LA TRAVE GIÀ CONSIDERATA:



↑ CONCIO ELEMENTARE DI RIFERIMENTO, ORIENTATO COME LA TRAVE IN BASE ALLE FIBRE DI RIFERIMENTO

CONSIDERANDO LA PARTE ① SI TROVA:

$$\left.\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ 0 < x_1 < L \end{array}\right\}$$
QUESTA NOTAZIONE INDICA CHE LE AZIONI INTERNE VENGONO CALCOLATE NEL TRATTO CHE VA DA Ⓐ, DOVE $x_1 = 0$ VERSO Ⓑ, DOVE $x_1 = L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{/\!/} = 0 \quad -F\cos\alpha + N(x_1) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \quad -F\sin\alpha - T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad \underbrace{-FL\sin\alpha + F\sin\alpha\, x_1}_{-F\sin\alpha[L-x_1]} + M(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_1) = F\cos\alpha \\ T(x_1) = -F\sin\alpha \\ M(x_1) = F\sin\alpha[L - x_1] \end{cases}$$

IN ALTERNATIVA SI POTREBBE CONSIDERARE LA PARTE ②: IN TAL CASO RISULTA:

② A → B

$0 < x_1 < L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & -N(x_1) + F\cos\alpha = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & T(x_1) + F\sin\alpha = 0 \\ \circlearrowleft M_{Z(x)} = 0 & -M(x_1) + F\sin\alpha\,[L - x_1] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_1) = F\cos\alpha \\ T(x_1) = -F\sin\alpha \\ M(x_1) = F\sin\alpha\,[L - x_1] \end{cases}$$

SI NOTI CHE, RISPETTO A X IL BRACCIO ↑ DELLA FORZA VERTICALE $F\sin\alpha$ È PROPRIO EGUALE A $L - x_1$

NOTA 1.

LE EQUAZIONI CHE SI OTTENGONO OPERANDO SULLA PARTE ① O SULLA PARTE ② SONO EGUALI: CIÒ È CONSEGUENZA DEL FATTO CHE LE AZIONI INTERNE RISPETTANO IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE; IN PARTICOLARE SE CI SI RIFERISCE AL "CONCIO ELEMENTARE DI RIFERIMENTO" LE AZIONI INTERNE VENGONO RIPORTATE SUI 2 LEMBI LASCIATI ESPOSTI DALLA "ROTTURA" CON I SEGNI CORRETTI.
È QUINDI INDIFFERENTE, AL FINE DI DETERMINARE LE AZIONI INTERNE, OPERARE SU ① O SU ②: CIÒ CONSENTE DI SCEGLIERE LA PARTE PIÙ SEMPLICE O AGEVOLE DA TRATTARE □

NOTA 2.

IN PRESENZA DI SOLE FORZE / COPPIE CONCENTRATE SI OSSERVA CHE $N(x_1)$ E $T(x_1)$ SONO FUNZIONI COSTANTI (IN CASI PIÙ GENERALI, IN PRESENZA DI CARICHI IN CAMPATA RISULTANO COSTANTI A TRATTI); $M(x_1)$ È INVECE UNA FUNZIONE LINEARE. □

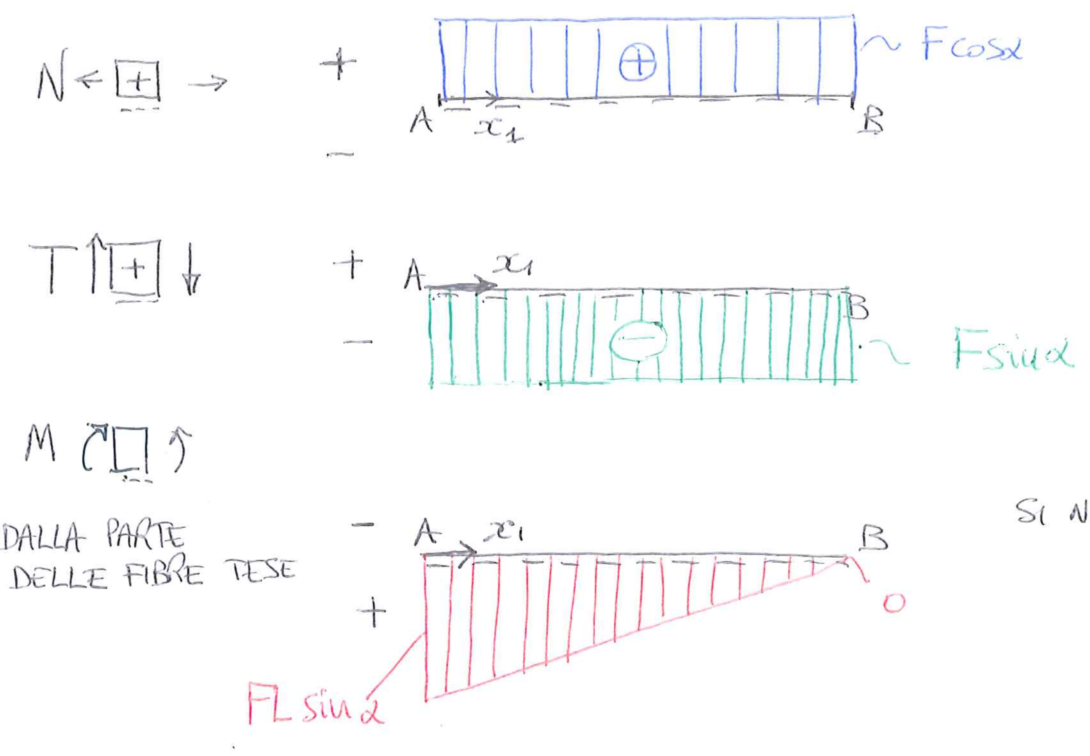
UNA VOLTA DETERMINATE LE FUNZIONI DI AZIONE INTERNA HA SENSO DARNE UNA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA (DIAGRAMMI DI AZIONE INTERNA) IN PARTICOLARE, $N(x_1)$ E $T(x_1)$ VENGONO RIPORTATI IN GRAFICO COME FUNZIONI DELLA VARIABILE INDIPENDENTE x_1, CHE VIENE MATERIALIZZATA DALLA LINEA D'ASSE DELLA TRAVE.
SE LA FUNZIONE È POSITIVA, LA SI RIPORTA AL DI SOPRA DELLA LINEA D'ASSE, SE È NEGATIVA AL DI SOTTO. PER RENDERE PIÙ LEGGIBILE IL DIAGRAMMA, DA COSTRUIRE IN UN'OPPORTUNA SCALA, SI PUÒ PENSARE DI RIEMPIRLO A TRATTEGGIO, INDICANDO, EVENTUALMENTE IL SEGNO (CON ⊕ O ⊖); I VALORI SIGNIFICATIVI SI RIPORTANO SOLO IN VALORE ASSOLUTO.

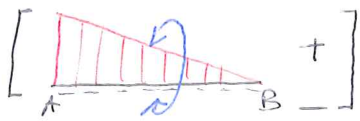
IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE SEGUE UNA PARTICOLARE CONVENZIONE: SI RIPORTA INFATTI DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE; COME SI VEDRÀ PIÙ AVANTI QUESTA SCELTA PORTA A UNA RAPPRESENTAZIONE ASSOLUTA, CHE NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE FIBRE DI RIFERIMENTO.

IN SOSTANZA, LADDOVE $M(x_1)$ RISULTA >0 LO SI RIPORTA DALLA PARTE DELLE FIBRE DI RIFERIMENTO (CHE IN TALE CONDIZIONE RISULTANO ESSERE LE FIBRE TESE); LADDOVE $M(x_1)$ RISULTA <0 LO SI RIPORTA DALLA PARTE OPPOSTA ALLE FIBRE DI RIFERIMENTO (CHE IN QUESTA SITUAZIONE RISULTANO ESSERE COMPRESSE)

SI PUÒ VEDERE CHE SE LE FIBRE DI RIFERIMENTO SONO QUELLE INFERIORI ALLORA IL DIAGRAMMA DI $M(x_1)$ PUÒ ESSERE COSTRUITO COME UN NORMALE DIAGRAMMA DI FUNZIONE (POSITIVA/NEGATIVA) E POI "RIBALTATO" RISPETTO ALL'ASSE DELLA TRAVE.

PER LA TRAVE APPENA RISOLTA QUESTI SONO I RELATIVI DIAGRAMMI





SI NOTI CHE $M|_A = M(x_1=0) = FL\sin\alpha$

$M|_B = M(x_1=L) = 0$

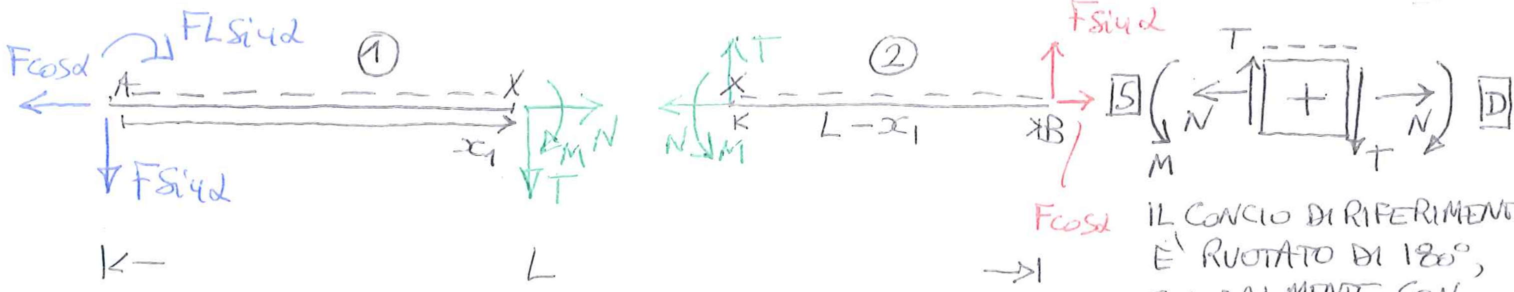
IL FATTO CHE IL MOMENTO FLETTENTE SI ANNULLI A UN ESTREMO LIBERO (COME B) È CIRCOSTANZA DEL TUTTO GENERALE.

NEL DIAGRAMMA DEL MOMENTO NON SI RIPORTANO SEGNI: IL DIAGRAMMA STESSO INDICA QUALI SONO LE FIBRE TESE (DOVE SI DOVREBBERO DISPORRE LE BARRE DI ARMATURA, SE LA TRAVE DOVESSE ESSERE REALIZZATA IN CALCESTRUZZO ARMATO).

NOTA 3

SI MOSTRA CHE UNA SCELTA OPPOSTA DELLE FIBRE DI RIFERIMENTO PRODUCE IL MEDESIMO DIAGRAMMA DI $M(x_1)$, ANCHE SE LE EQUAZIONI OTTENUTE HANNO SEGNO OPPOSTO.

LA SITUAZIONE CHE SI PRESENTA SAREBBE QUESTA:



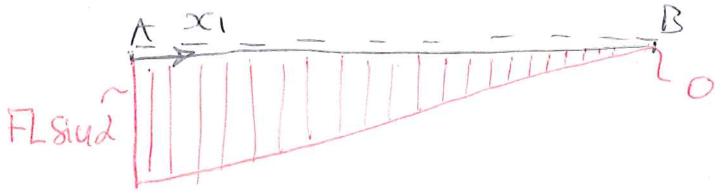
IL CONCIO DI RIFERIMENTO È RUOTATO DI 180°, SOLIDALMENTE CON LE AZIONI POSITIVE

OPERANDO SULLA PARTE ① SI HA: $\quad A \to B$, $0 < x_1 < L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & -F\cos\alpha + N(x_1) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & -F\sin\alpha - T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_{Z(x)} = 0 & \underbrace{-FL\sin\alpha + F\sin\alpha\, x_1}_{-F\sin\alpha\,[L-x_1]} - M(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_1) = +F\cos\alpha \\ T(x_1) = -F\sin\alpha \\ M(x_1) = -F\sin\alpha\,[L-x_1] \end{cases}$$

SI VEDE CHE LE ESPRESSIONI DI $N(x_1)$ E $T(x_1)$ SONO LE MEDESIME E DANNO QUINDI LUOGO AGLI STESSI DIAGRAMMI; PER QUANTO RIGUARDA $M(x_1)$ L'EQUAZIONE OTTENUTA DIFFERISCE DALLA PRECEDENTE PER IL SEGNO.

A LIVELLO DI DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE, SI VERIFICA CHE $M(x_1) < 0$ PER $0 < x_1 < L$; CIÒ SIGNIFICA CHE LE FIBRE DI RIFERIMENTO (SUPERIORI) SONO QUESTA VOLTA COMPRESSE; LE FIBRE TESE SONO QUELLE INFERIORI E QUI VA RIPORTATO IL DIAGRAMMA:

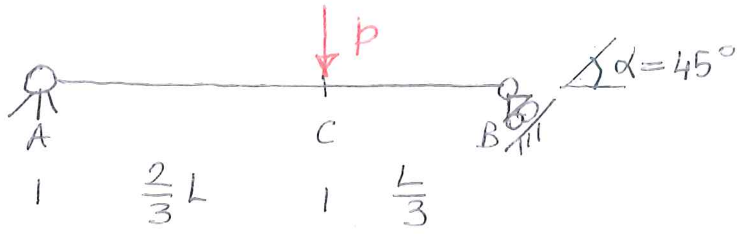


IL DIAGRAMMA OTTENUTO È QUINDI LO STESSO DEL CASO PRECEDENTE $\square$

AZIONI INTERNE DI TRAVI DOVE SONO PRESENTI CARICHI (O VINCOLI) IN CAMPATA.

IN QUESTO CASO, A DIFFERENZA DEL PRECEDENTE, LE SINGOLE AZIONI INTERNE NON POSSONO ESSERE DETERMINATE CON UN'UNICA EQUAZIONE, PERCHÉ LE ESPRESSIONI DIFFERISCONO PER OGNUNO DEI CAMPI DEFINITI DALLE SUCCESSIVE FORZE: SI AVRANNO QUINDI TANTE ESPRESSIONI QUANTI SONO I CAMPI DISTINTI, OGNI ESPRESSIONE RISULTANDO VALIDA IN UN OPPORTUNO INTERVALLO DI DEFINIZIONE.

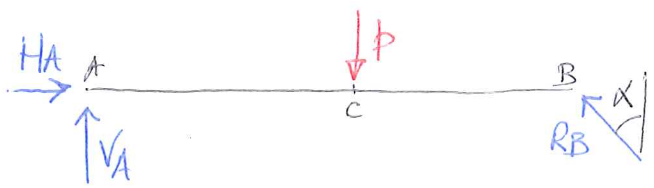
ESEMPIO:

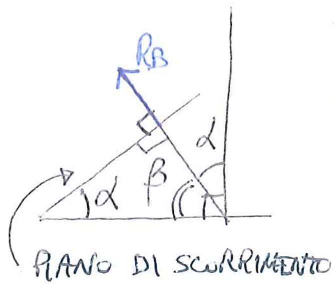


TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA CON CARRELLO AVENTE PIANO DI SCORRIMENTO INCLINATO, SOGGETTA A UNA FORZA APPLICATA IN CAMPATA.

$$\left.\begin{aligned} GDV &= 2(A) + 1(B) = 3 \\ GDL &= 3 \end{aligned}\right\} \quad GDV = GDL \Rightarrow \text{STRUTTURA ISOSTATICA, NON LABILE.}$$

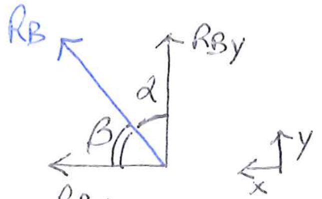
DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO





SI OSSERVA CHE LA REAZIONE R_B È PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO E FORMA UN ANGOLO α CON LA VERTICALE

PER COMODITA' OPERATIVA CONVIENE PROIETTARE LA REAZIONE R_B SECONDO LE DIREZIONI ORIZZONTALE E VERTICALE. CON CONSIDERAZIONI DI TRIGONOMETRIA PIANA SI TROVA FACILMENTE:



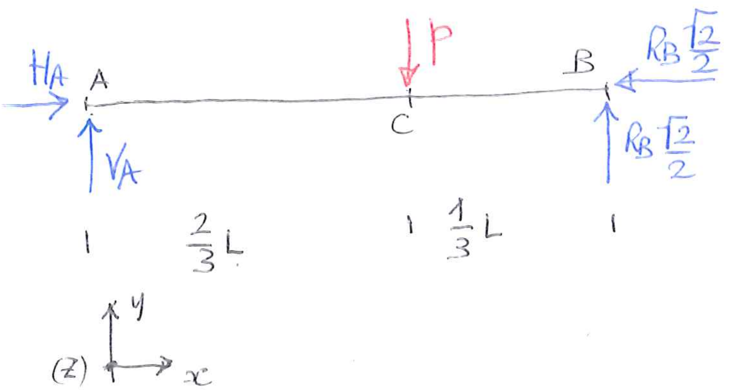
$$R_{By} = R_B \cos\alpha$$
$$R_{Bx} = R_B \cos\beta$$

TUTTAVIA, POICHÉ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

NE SEGUE $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}\cos\alpha + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\sin\alpha = \sin\alpha$ (*).

PERTANTO $R_{Bx} = R_B \sin\alpha$; $R_{By} = R_B \cos\alpha$; NEL CASO IN ESAME ($\alpha = 45°$)
TUTTAVIA $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ E QUINDI $R_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_B$; $R_{By} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_B$

CON QUESTA SOSTITUZIONE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DIVIENE:



SI OSSERVI CHE LE FORZE INCOGNITE SONO SEMPRE E SOLO 3: H_A, V_A, R_B. A DIFFERENZA DI H_A E V_A CHE, ESSENDO <u>INDIPENDENTI</u> DANNO LUOGO, COMBINANDOSI A UNA RISULTANTE DI DIREZIONE IMPRECISATA, LE 2 COMPONENTI APPLICATE IN (B) PRODUCONO SEMPRE UNA RISULTANTE ORIENTATA COME R_B.

(*) SI RICORDA CHE $\sin(\gamma \pm \delta) = \sin\gamma\cos\delta \pm \sin\delta\cos\gamma$
$$\cos(\gamma \pm \delta) = \cos\gamma\cos\delta \mp \sin\gamma\sin\delta$$

SI PROCEDE A SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A - R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & [1] \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A - p + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & [2] \\ \circlearrowright M_{z(A)} = 0 \quad -p\frac{2}{3}L + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} L = 0 & [3] \end{cases}$$

IL SISTEMA È ACCOPPIATO (LE EQUAZIONI [1] E [2] SONO CONCATENATE): SI RISOLVE LA [3] OTTENENDO:

$$+p \cdot \frac{2}{3}\cancel{L} = R_B \frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{L} \Rightarrow R_B = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}p \Rightarrow \underline{R_B = \frac{2\sqrt{2}}{3}p}$$

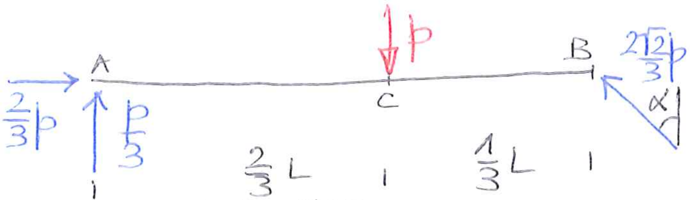
SI SOSTITUISCE POI NELLA [1]:

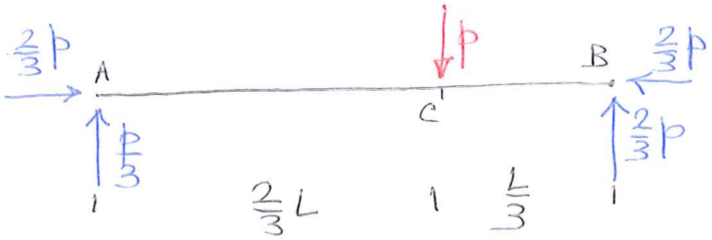
$$H_A - \left(\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{3}p\right)\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow \underline{H_A = \frac{2}{3}p}$$

E INFINE NELLA [2]

$$V_A = p - \left(\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{3}p\right) \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \Rightarrow V_A = p - \frac{2}{3}p \Rightarrow \underline{V_A = \frac{1}{3}p}.$$

IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO QUESTE SONO LE FORZE APPLICATE ALLA TRAVE:



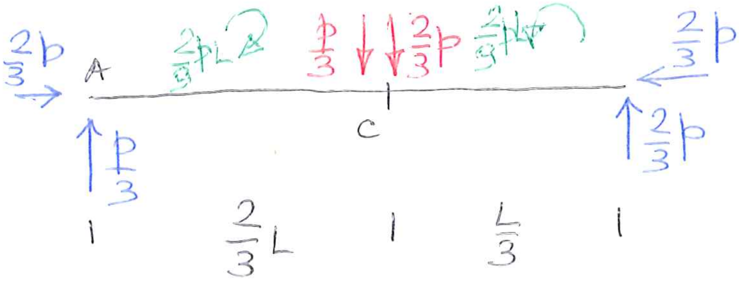


SI OSSERVA CHE

1) ANCHE SE IL CARICO p È VERTICALE, NASCONO REAZIONI ORIZZONTALI PER LA PRESENZA DEL VINCOLO CON PIANO DI SCORRIMENTO INCLINATO

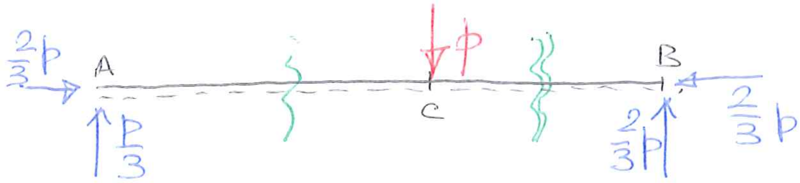
2) POICHÉ LA FORZA p NON È APPLICATA IN MEZZERIA, LE REAZIONI VERTICALI IN (A) E (B) SONO DIVERSE; IN PARTICOLARE, LA REAZIONE "PIÙ VICINA" AL CARICO È DI VALORE PIÙ ELEVATO DI QUELLA "PIÙ LONTANA".

3) PER LA VERIFICA GRAFICA DELL'EQUILIBRIO, SI SOSTITUISCE LA FORZA p APPLICATA IN (C) CON UN SISTEMA EQUIVALENTE COSTITUITO DA 2 FORZE, $\frac{p}{3}$ E $\frac{2}{3}p$ E SI PROCEDE COME GIÀ VISTO IN PRECEDENZA:



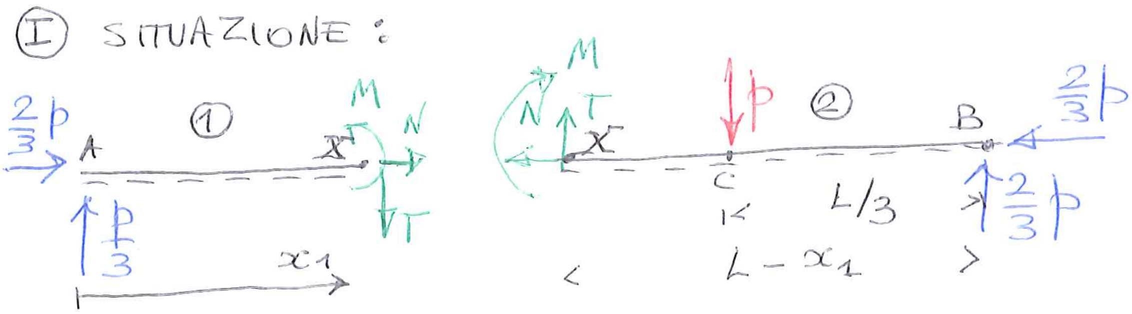
PER VERIFICARE CHE È SODDISFATTO L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI, SI OSSERVA CHE LE 2 FORZE $\frac{p}{3}, -\frac{p}{3}$ PRODUCONO UNA COPPIA ORARIA DI VALORE $\frac{p}{3} \cdot \frac{2}{3}L = \frac{2}{9}pL \circlearrowright$; LE 2 FORZE $-\frac{2}{3}p, +\frac{2}{3}p$ UNA COPPIA ANTIORARIA DI VALORE $\frac{2}{3}p \cdot \frac{L}{3} = \frac{2}{9}pL \circlearrowleft$.

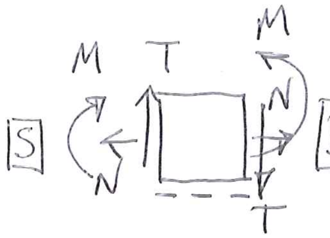
SI TRATTA ORA DI DETERMINARE LE AZIONI INTERNE. TUTTAVIA OCCORRE CONSIDERARE 2 DIVERSE SITUAZIONI, A SECONDA CHE SI SPEZZI LA TRAVE A SINISTRA O A DESTRA DEL PUNTO C



NEL PRIMO CASO, p RISULTA APPLICATA ALLA PARTE ②; NEL SECONDO ALLA PARTE ①; CAMBIANDO IL SISTEMA DI FORZE APPLICATE ALLA SINGOLA PARTE, LE AZIONI INTERNE AVRANNO ESPRESSIONI DIVERSE.

Ⅰ SITUAZIONE:





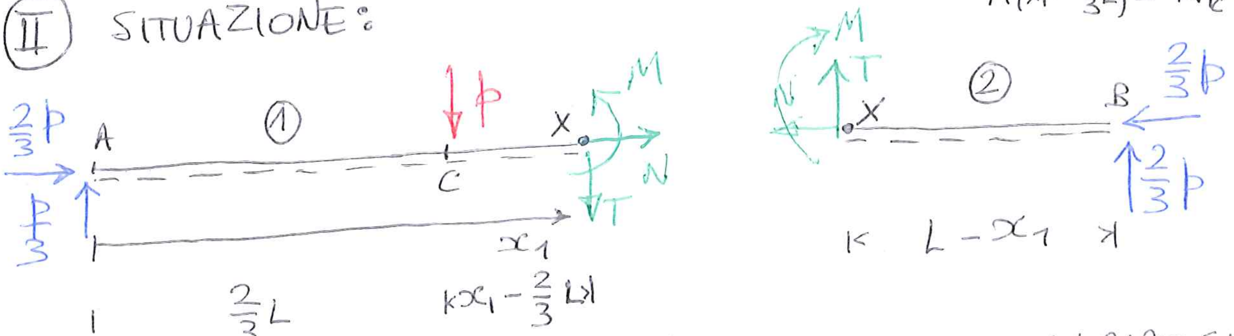
A → C
$0 < x_1 < \frac{2}{3}L$

SI LAVORA SUL TRATTO ①; PER VERIFICA SI PROVI A COSTRUIRE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO PER TRATTO ②

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & \frac{2}{3}p + N(x_1) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{p}{3} - T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(X)} = 0 & -\frac{p}{3}x_1 + M(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_1) = -\frac{2}{3}p \\ T(x_1) = +\frac{1}{3}p \\ M(x_1) = +\frac{1}{3}p x_1 \end{cases} \quad [4]$$

N.B. $M(x_1=0) = M|_A = 0$
$M(x_1=\frac{2}{3}L) = M|_{C^-} = \frac{2}{9}pL$

Ⅱ SITUAZIONE:



C → B
$\frac{2}{3}L < x_1 < L$

SI E' SCELTO ANCORA DI LAVORARE SUL TRATTO ①; SI VERIFICHI CHE LE STESSE EQUAZIONI SI OTTENGONO OPERANDO SUL TRATTO ②.

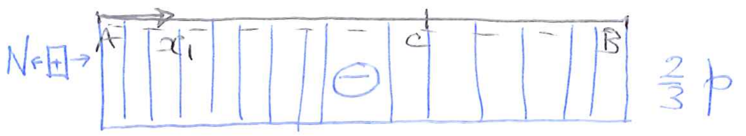
$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & \frac{2}{3}p + N(x_1) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{p}{3} \boxed{-p} - T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(X)} = 0 & -\frac{p}{3}x_1 \boxed{+p\left[x_1 - \frac{2}{3}L\right]} + M(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_1) = -\frac{2}{3}p \\ T(x_1) = -\frac{2}{3}p \\ M(x_1) = \frac{2}{3}p\left[L - x_1\right] \end{cases} \quad [5]$$

$$M(x_1) = \underbrace{\frac{p}{3}x_1 - p x_1}_{-\frac{2}{3}p x_1} + p \cdot \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}p\left[L - x_1\right]$$

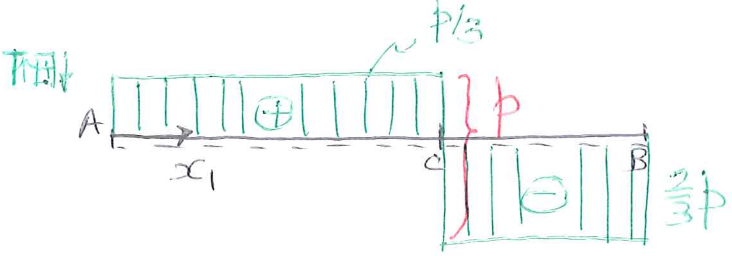
NB. $M(x_1=\frac{2}{3}L) = M|_{C^+} = \frac{2}{9}pL$
$M(x_1=L) = M|_B = 0$

I TERMINI NEL RIQUADRO SONO DOVUTI AL CARICO p CHE ORA È APPLICATO AL TRATTO ①

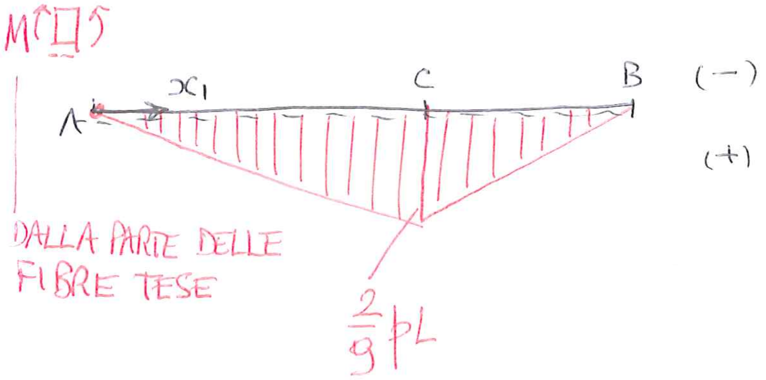
PER TRACCIARE I DIAGRAMMI SI FA USO DELLE EQ. [4], VALIDE SOLO NELL'INTERVALLO $0 < x_1 < \frac{2}{3}L$, E [5], VALIDE SOLO NELL'INTERVALLO $\frac{2}{3}L < x_1 < L$



IL DIAGRAMMA DI $N(x_1)$ È CONTINUO IN C: NON CI SONO FORZE // ALL'ASSE DELLA TRAVE



IL DIAGRAMMA DI $T(x_1)$ HA UNA DISCONTINUITA' (SALTO) IN C, DI VALORE p: È DOVUTA ALLA PRESENZA DI UNA FORZA (DI VALORE p) $\perp$ ALL'ASSE DELLA TRAVE.

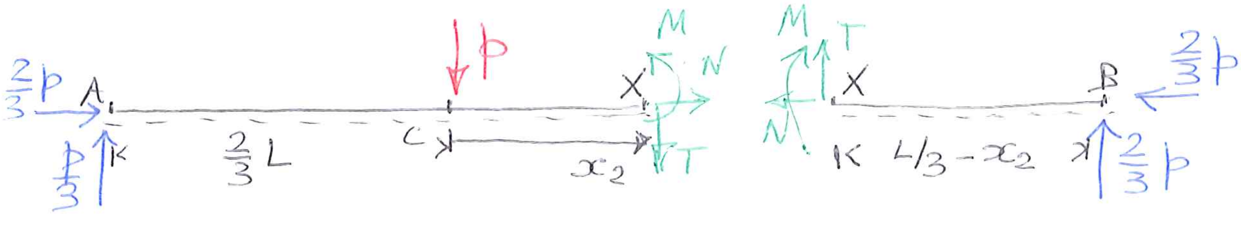


IL DIAGRAMMA DI $M(x_1)$ SI ANNULLA IN CORRISPONDENZA DI CERNIERA E APPOGGIO; HA ANDAMENTO DIVERSO SUL TRATTO AC E CB, MA IN C È CONTINUO, MENTRE C'È UN PUNTO ANGOLOSO (CAMBIAMENTO DI PENDENZA)

NOTA 4.

INVECE DI USARE SEMPRE LA STESSA ASCISSA x_1 SUL TRATTO $A \to C$ $(0 < x_1 < \frac{2}{3}L)$ E SUL TRATTO $C \to B$ $(\frac{2}{3}L < x_1 < L)$ SI POTREBBE USARE PER IL SECONDO TRATTO UNA DIVERSA ASCISSA, x_2, PER ESEMPIO CON ORIGINE IN C.
LA SITUAZIONE SAREBBE QUESTA:

II SITUAZIONE



$C \to B$

$0 < x_2 < \frac{L}{3}$

SI VERIFICHINO I RISULTATI OPERANDO SUL TRATTO (2)

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & \frac{2}{3}p + N(x_2) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{p}{3} - p - T(x_2) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(X)} = 0 & -\frac{p}{3}\left[\frac{2}{3}L + x_2\right] + p x_2 + M(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_2) = -\frac{2}{3}p \\ T(x_2) = -\frac{2}{3}p \\ M(x_2) = \frac{2}{3}p\left[\frac{1}{3}L - x_2\right] \end{cases} \quad [6]$$

(in quanto $M(x_2) = \frac{2}{3}pL - \frac{2}{3}px_2$)

OCCORRE FARE ATTENZIONE A NON "DIMENTICARE" PORZIONI DI STRUTTURA: PER CALCOLARE LE AZIONI INTERNE SI <u>DEVE</u> ROMPERE IN 2 PARTI LA TRAVE E POI SCRIVERE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UNA DELLE 2 PORZIONI.

È FACILE VERIFICARE CHE L'EQUAZIONE DEL MOMENTO SUL TRATTO $C \to B$ RIFERITA ALLA ASCISSA x_2 (ULTIMA DELLE [6]) È DIFFERENTE DA QUELLA RELATIVA ALLO STESSO TRATTO RIFERITA ALL'ASCISSA x_1.

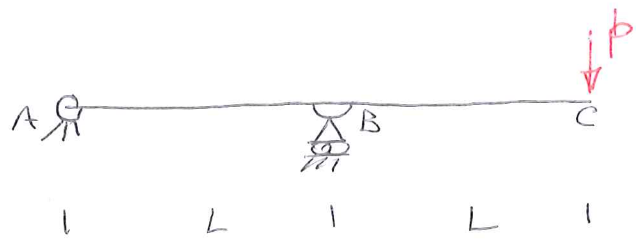
TUTTAVIA, ENTRAMBE LE EQUAZIONI <u>RAPPRESENTANO LA MEDESIMA FUNZIONE</u>:

INFATTI $M|_{C^+} = M(x_1 = \frac{2}{3}L) = \frac{2}{3}p\,[\underbrace{L - \frac{2}{3}L}_{L/3}] = \frac{2}{9}pL$

MA $M|_{C^+} = M(x_2 = 0) = \frac{2}{3}p\,[\frac{1}{3}L] = \frac{2}{9}pL$.

ANALOGAMENTE $M|_B = M(x_1 = L) = \frac{2}{3}p\,[L - L] = 0$ E $M|_B = M(x_2 = \frac{L}{3}) =$
$= \frac{2}{3}p\,[\frac{1}{3}L - \frac{1}{3}L] = 0$. □

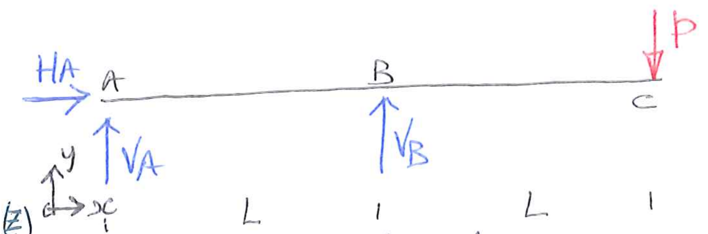
UN ALTRO ESEMPIO: TRAVE APPOGGIATA CON SBALZO



$GDV = 2(A) + 1(B) = 3$
$GDL = 3$
$\Big\}\ GDV = GDL$

TRAVE ISOSTATICA NON LABILE, COME GIA' VERIFICATO

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:

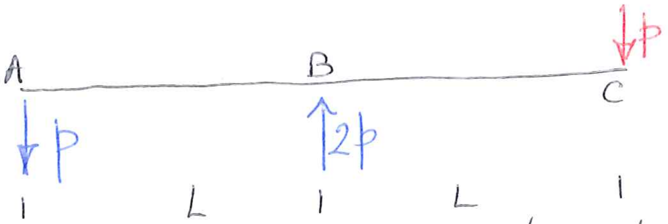


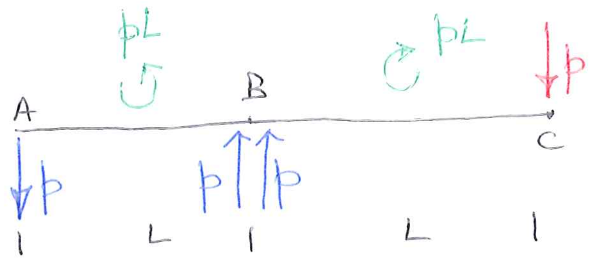
SI NOTI CHE L'APPOGGIO B NON INTERROMPE LA CONTINUITA' DELLA TRAVE

EQUAZIONI CARDINALI:

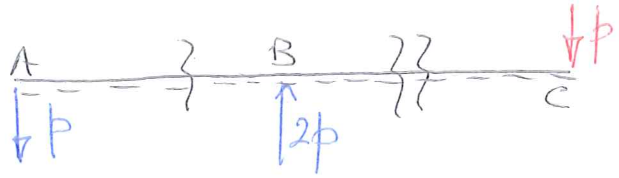
$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad & V_A + V_B - p = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad & V_B \cdot L - p\,2L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -p \\ V_B = 2p \end{cases}$$

CONDIZIONI GRAFICHE DI EQUILIBRIO:





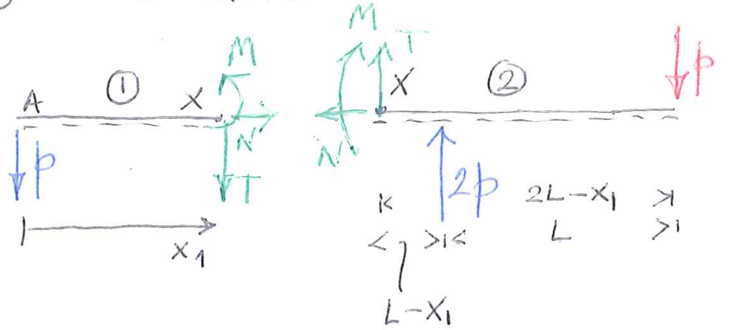
SI NOTI CHE LA REAZIONE VA DEVE IMPEDIRE IL SOLLEVAMENTO DEL PUNTO A



OCCORRE CONSIDERARE 2 CONDIZIONI:

15

I SITUAZIONE:



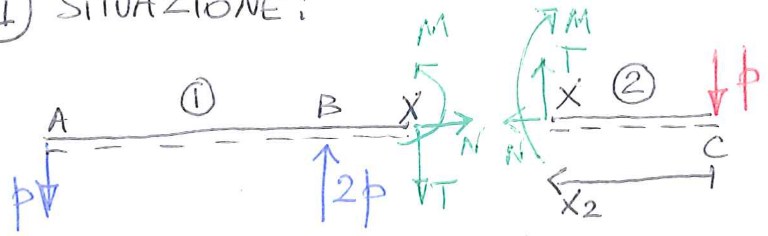
$A \rightarrow B$

$0 < x_1 < L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{/\!/} = 0 & N(x_1) = 0 & N(x_1) = 0 \\ \uparrow R_\perp = 0 & -p - T(x_1) = 0 & T(x_1) = -p \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & p x_1 + M(x_1) = 0 & M(x_1) = -p x_1 \end{cases}$$

NB: $M|_A = M(x_1 = 0) = 0$; $M|_{B^-} = M(x_1 = L) = -pL$

II SITUAZIONE:



$C \rightarrow B$

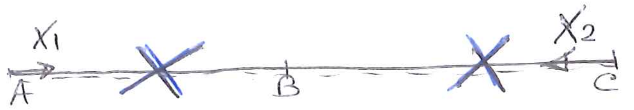
$0 < x_2 < L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{/\!/} = 0 & -N(x_2) = 0 & N(x_2) = 0 \\ \uparrow R_\perp = 0 & -p + T(x_2) = 0 & T(x_2) = +p \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & -p x_2 - M(x_2) = 0 & M(x_2) = -p x_2 \end{cases}$$

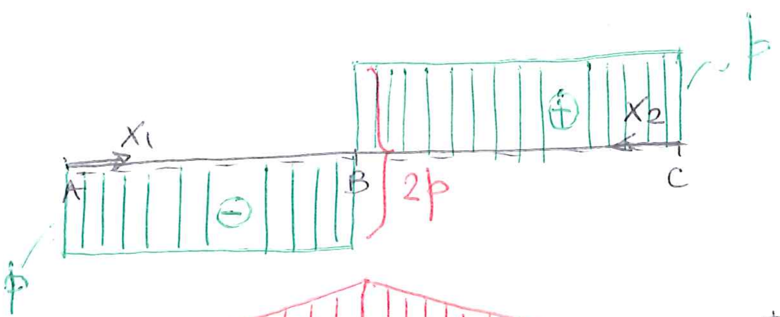
NB: $M|_C = M(x_2 = 0) = 0$; $M|_{B^+} = M(x_2 = L) = -pL$

SI PROVI A DETERMINARE LA SOLUZIONE USANDO ANCORA LA COORDINATA x_1 SUL TRATTO $B \rightarrow C$ $(L < x_1 < 2L)$.

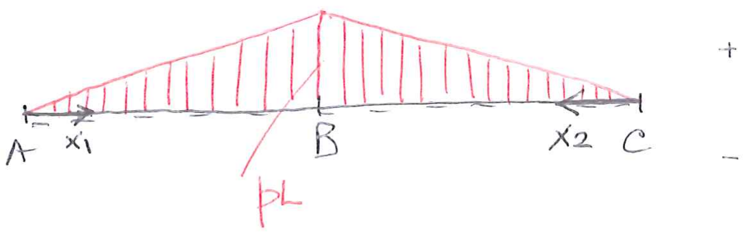
DIAGRAMMI:



$N \leftarrow \boxed{+} \rightarrow$



$T \uparrow \boxed{+} \downarrow$

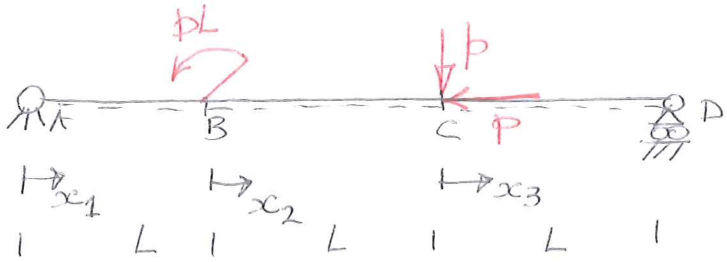


SI OSSERVI CHE • IN B C'È "SALTO" NEL DIAGRAMMA DEL TAGLIO PARI A $2p$, CIOÈ AL VALORE DI V_B, FORZA $\perp$ ALL'ASSE DELLA TRAVE

• IN B M NON SI ANNULLA: B È APPOGGIO DI CONTINUITÀ, NON DI ESTREMITÀ (COME C) DOVE IL MOMENTO SI DEVE ANNULLARE (COME IN A E C)

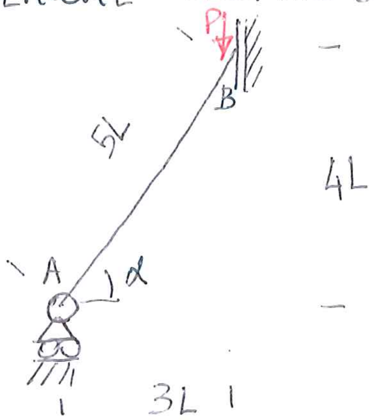
• ATTENZIONE A DOVE SONO COLLOCATE LE ORIGINI DEI 2 SISTEMI DI COORDINATE

ALTRO ESEMPIO DA SVOLGERE NEL FINE SETTIMANA:



OCCORRE, OVVIAMENTE, ROMPERE 3 VOLTE: FRA A E B, I; FRA B E C, II; FRA C E D, III.

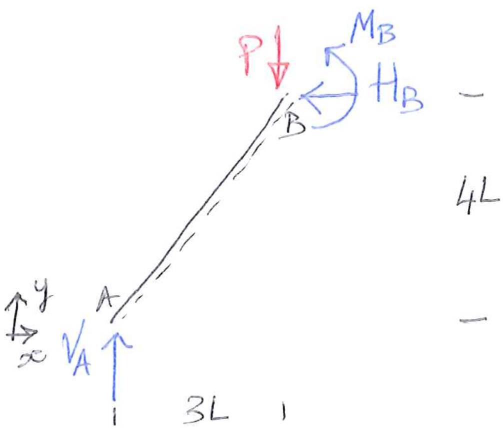
ULTERIORE ESEMPIO: TRAVE INCLINATA (SCALA)



$$\left.\begin{array}{l} GDV = 1(A) + 2(B) = 3 \\ GDL = 3 \end{array}\right\} GDV = GDL$$

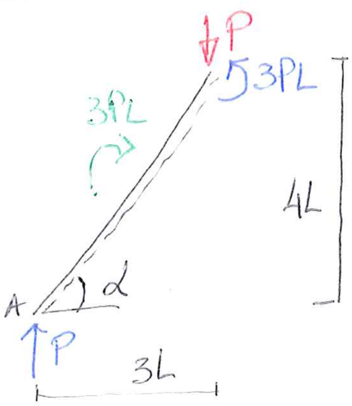
STRUTTURA ISOSTATICA; I VINCOLI SONO BEN DISPOSTI: IL PATTINO IN B CONSENTE SOLO UNO SPOSTAMENTO VERTICALE, v, CHE È PERÒ IMPEDITO DAL CARRELLO IN A.

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & -H_B = 0 & H_B = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - P = 0 & V_A = P \\ \circlearrowleft M_{z(B)} = 0 & -V_A \cdot 3L + M_B = 0 & M_B = 3PL \end{cases}$$

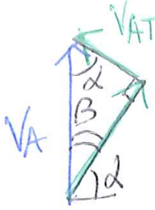
CONDIZIONI GRAFICHE DI EQUILIBRIO: LE DUE FORZE P (APPLICATA IN A) E −P (APPLICATA IN B) SI BILANCIANO MA PRODUCONO COPPIA ORARIA (3PL) CHE BILANCIA LA REAZIONE M_B.



PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE, CHE SONO ORIENTATE IN MODO OBLIQUO, CONVIENE SCOMPORRE LA REAZIONE V_A SECONDO LA DIREZIONE // E SECONDO LA DIREZIONE ⊥ ALLA TRAVE. SI OSSERVA PRELIMINARMENTE CHE LA TRAVE E LE SUE PROIEZIONI ORIZZONTALE E VERTICALE FORMANO UN TRIANGOLO RETTANGOLO.

SI HA $5L \cos\alpha = 3L \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$5L \sin\alpha = 4L \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5}$



V_{AT} ~ COMPONENTE PERPENDICOLARE ALLA TRAVE

V_{AN} ~ COMPONENTE PARALLELA ALLA TRAVE

DA CONSIDERAZIONI TRIGONOMETRICHE SI OTTIENE, DATO CHE $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

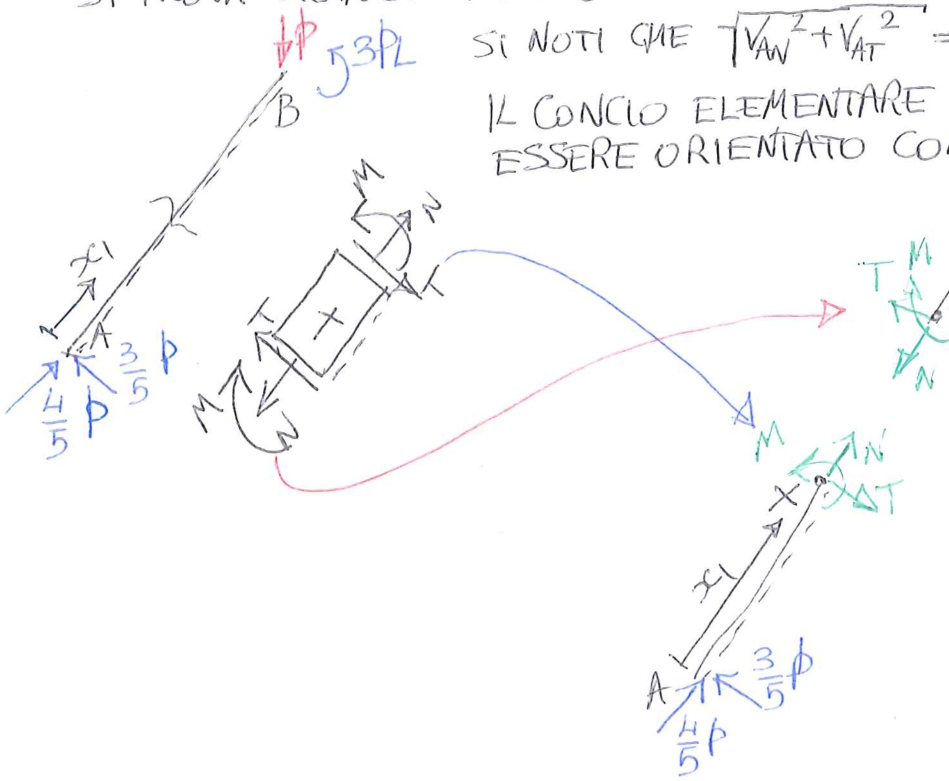
$$V_{AN} = V_A \cos\beta = V_A \sin\alpha = \frac{4}{5}V_A = \frac{4}{5}p$$

$$V_{AT} = V_A \sin\beta = V_A \cos\alpha = \frac{3}{5}V_A = \frac{3}{5}p$$

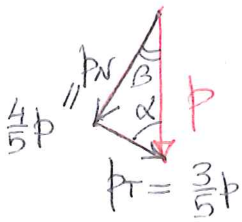
SI TROVA QUINDI QUESTO SISTEMA DI FORZE EQUIVALENTI.

SI NOTI CHE $\sqrt{V_{AN}^2+V_{AT}^2} = V_A$.

IL CONCIO ELEMENTARE DI RIFERIMENTO DEVE ESSERE ORIENTATO COME LA TRAVE!



NB: ANCHE IN (B) LA FORZA p PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA 2 COMPONENTI, UNA // E UNA ⊥ ALLA TRAVE!



SI TROVA DUNQUE:

A → B

$0 < x_1 < 5L$

$$\begin{cases} \nearrow R_{//} = 0 & \frac{4}{5}p + N(x_1) = 0 \\ \nwarrow R_{\perp} = 0 & \frac{3}{5}p - T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(X)} = 0 & -\frac{3}{5}px_1 + M(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_1) = -\frac{4}{5}p \\ T(x_1) = \frac{3}{5}p \\ M(x_1) = \frac{3}{5}px_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M|_A = M(x_1=0) = 0 \\ M|_B = M(x_1=5L) = 3pL \end{cases}$$

DIAGRAMMI: