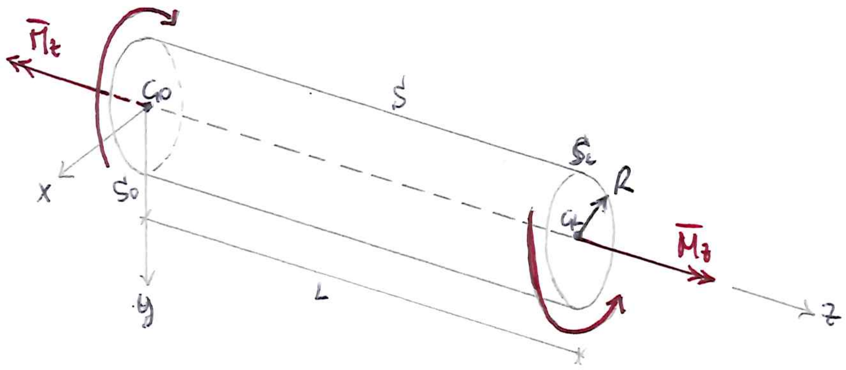
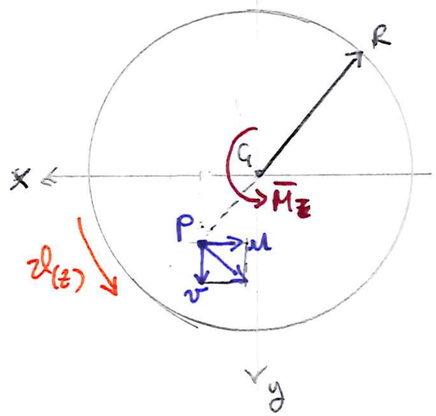
SI CONSIDERI UN PRISMA CILINDRICO DI BASE CIRCOLARE DI RAGGIO R E SOGGETTA SULLE BASI ESTREME ALLA COPPIA TORCENTE $\boxed{\overline{M}_z}$



IL SOLIDO SUBISCE UNA TORSIONE ATTORNO ALL'ASSE z

> RAGIONIAMO SUGLI SPOSTAMENTI: OGNI SEZIONE DELLA TRAVE SUBIRA' UNA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE GEOMETRICO (ASSE z)



$\vartheta_{(z)}$ = ANGOLO DI TORSIONE

$\boxed{\vartheta_{(z)} = \Theta z}$

Θ = ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE

$\frac{d\vartheta(z)}{dz}$ = COSTANTE = Θ

ESSENDO COSTANTE L'AZIONE INTERNA $\overline{M}_z$ TUTTI I PUNTI RUOTANO DEL MEDESIMO ANGOLO Θ, CHE RAPPRESENTA LA ROTAZIONE RELATIVA TRA 2 SEZIONI POSTE A DISTANZA UNITARIA.

UN GENERICO PUNTO P SI SPOSTA RIMANENDO SULLA CONGIUNGENTE CON IL CENTRO. NELL'IPOTESI CHE LA ROTAZIONE ϑ SIA MOLTO PICCOLA LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO HANNO ESPRESSIONE: $\boxed{u = -\vartheta_{(z)} y = -\Theta z y}$ E $\boxed{v = \vartheta_{(z)} x = \Theta z x}$

LE SEZIONI RUOTANO TUTTE NEL LORO PIANO (PER LA SIMMETRIA POLARE DELLA SEZIONE), ALLORA $\boxed{w = 0}$

DEFINITO UNIVOCAMENTE UN CAMPO DI SPOSTAMENTI* CONTINUO POSSIAMO RICAVARE LE DEFORMAZIONI DERIVANDOLO → $\boxed{\text{CONGRUENZA}}$

[c]

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ — $u = -\Theta z y$ → NON CONTIENE x → $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ — $v = \Theta z x$ → NON CONTIENE y → $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ — $w = 0$ — $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\boxed{\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_y = 0 \quad \varepsilon_z = 0}$$

TUTTE LE DILATAZIONI SONO NULLE
L'ASSE z NON SI ALLUNGA / ACCORCIA

*N.B. NON È ANCORA NOTO IL VALORE DI Θ, MA SOLO CHE È COSTANTE

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ — $\frac{\partial u}{\partial y} = -\Theta z$ E $\frac{\partial v}{\partial x} = +\Theta z$ — $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ — $\boxed{\gamma_{xy} = 0}$ → LA SEZIONE RUOTA MA NON SI DISTORCE, LE FIBRE RIMANGONO PERPENDICOLARI AL RAGGIO R (ANGOLO TRA ASSE x E y A DEFORMAZIONE AVVENUTA SI CONSERVA RETTO)

$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ — $\frac{\partial u}{\partial z} = -\Theta y$ E $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ — $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\Theta y$

$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ — $\frac{\partial v}{\partial z} = +\Theta x$ E $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ — $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = +\Theta x$

$$\boxed{\gamma_{xz} = -\Theta y \quad \gamma_{yz} = +\Theta x}$$

→ LE UNICHE DEFORMAZIONI PRESENTI SONO GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ_{xz} E γ_{yz} (DUNQUE L'ANGOLO TRA GLI ASSI x E z E y E z NON SI CONSERVA RETTO!)

È NECESSARIO VERIFICARE CHE, A PARTIRE DALLE IPOTESI FATTE SUGLI SPOSTAMENTI, SIA POSSIBILE DEDURRE UN CAMPO DI TENSIONE CHE SODDISFI L'EQUILIBRIO E CHE SIA STATICAMENTE EQUIVALENTE SULLE BASI ESTREME A UNA COPPIA TORCENTE M_z.

RICAVIAMO LE TENSIONI A PARTIRE DALLE DEFORMAZIONI CON IL $\boxed{\text{LEGAME}}$ COSTITUTIVO: DALLA LEGGE DI HOOKE:

[•]

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z) = 0 \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_z) = 0 \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \rightarrow \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \rightarrow \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{cases}$$

→ SISTEMA LINEARE DI 3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE CON I TERMINI NOTI NULLI: AMMETTE SOLUZIONI NON BANALI SE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È NULLO - TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow$$

UNICA SOLUZIONE È QUELLA BANALE

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned}}$$

TUTTE LE COMPONENTI NORMALI DI TENSIONE SONO NULLE

$$\boxed{\tau_{xy} = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{xz} &= -G\Theta y \\ \tau_{yz} &= G\Theta x \end{aligned}}$$

→ LE UNICHE TENSIONI PRESENTI SONO LE TENSIONI TANGENZIALI τ_{xz} E τ_{yz}

$$\rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

VERIFICHIAMO CHE LA DISTRIBUZIONE DI TENSIONI SODDISFI LE EQUAZIONI DI $\boxed{\text{EQUILIBRIO}}$:

EQUILIBRIO INTERNO [•]

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

τ_{zx} DIPENDE SOLO DA y → LE SUE DERIVATE RISPETTO A z E A x SONO NULLE

τ_{yz} DIPENDE SOLO DA x → LE SUE DERIVATE RISPETTO A z E A y SONO NULLE

L'EQUILIBRIO INTERNO È SODDISFATTO

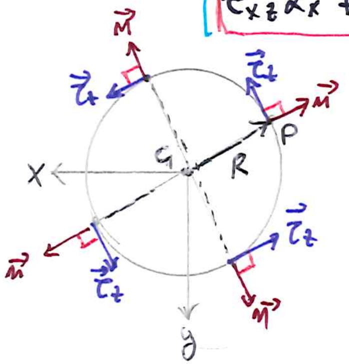
SUL CONTORNO AGISCE SOLO $\vec{M}_t$ SULLE BASI S_0 E S_L E IL MANTELLO S E' SCARICO

SU S, $\vec{n} = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$ $\quad p_x = 0$; $p_y = 0$; $p_z = 0$ PER LA RELAZIONE DI CAUCHY:

EQUILIBRIO ESTERNO [..]

$$\begin{cases} \sigma_x \cancel{\alpha_x} + \tau_{yx} \cancel{\alpha_y} = 0 & \sigma_x = 0 \quad \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{xy} \cancel{\alpha_x} + \sigma_y \cancel{\alpha_y} = 0 & \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = 0 \\ \boxed{\tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y = 0} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ BISOGNA GARANTIRE CHE $\boxed{-G\Theta y \alpha_x + G\Theta x \alpha_y = 0}$



INDIVIDUATO UN VETTORE GENERICO $\boxed{\vec{\tau}_z = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j}}$ [N.B. $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ E $\tau_{yz} = \tau_{zy}$]

INDICANDO CON $\boxed{\vec{n} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j}}$ LA NORMALE AL CONTORNO IN UN PUNTO GENERICO, ALLORA LA COMPONENTE NORMALE DI τ_z SUL CONTORNO DOVRA' ESSERE NULLA: $\tau_{zn} = 0$, OVVERO $\boxed{\vec{\tau}_z \times \vec{n} = 0}$

$\vec{\tau}_z$ DEVE ESSERE ORTOGONALE ALLA NORMALE $\vec{n}$ E QUINDI TANGENTE AL CONTORNO DELLA SEZIONE

IL RAGGIO R HA, IN UN GENERICO PUNTO DEL CONTORNO, COMPONENTE IN x E IN y

L'EQUAZIONE DI UN PUNTO SUL CONTORNO E': $P \sim x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow R = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \alpha_x = \frac{x}{R}$ E $\alpha_y = \frac{y}{R}$

> $-G\Theta y \frac{x}{R} + G\Theta x \frac{y}{R} = 0 \qquad \frac{G\Theta}{R}\left[\cancel{-yx + xy}\right] = 0$ LA CONDIZIONE CHE IL MANTELLO SIA SCARICO E' SODDISFATTA

SU S_0, $\vec{n}_0 = (0, 0, -1)$ [..]

$$\begin{cases} \tau_{zx}\alpha_z = p_x & -\tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy}\alpha_z = p_y & -\tau_{zy} = p_y \\ \cancel{\sigma_z}\alpha_z = p_z & \sigma_z = 0 \quad p_z = 0 \end{cases}$$

[N.B. SE $p_z \neq 0$ AVREMMO AVUTO ANCHE N, M_x E M_y]

SU S_L, $\vec{n}_L = (0, 0, 1)$ [..]

$$\begin{cases} \tau_{zx}\alpha_z = p_x & \tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy}\alpha_z = p_y & \tau_{zy} = p_y \\ \cancel{\sigma_z}\alpha_z = p_z & \sigma_z = 0 \quad p_z = 0 \end{cases}$$

ALLORA SULLE BASI: $\boxed{p_z = 0 ; \quad p_x = \tau_{zx} = -G\Theta y ; \quad p_y = \tau_{zy} = G\Theta x}$

RESTANO DA ESAMINARE ESCLUSIVAMENTE LE CONDIZIONI DI EQUIVALENZA STATICA TRA TENSIONI E MOMENTO APPLICATO, OVVERO CHE p_x E p_y COMPORTINO SOLO $\overline{M_z}$

ESSENDO NULLA p_z È EVIDENTE CHE DEVONO ESSERE NULLE N, M_x E M_y:

$$N = \int_A \cancel{p_z}\, dA = 0 \qquad M_x = \int_A \cancel{p_z}\, y\, dA = 0 \qquad M_y = \int_A \cancel{p_z}\, x\, dA = 0$$

LE COMPONENTI DI TAGLIO DEVONO RISULTARE ANCHE ESSE NULLE:

$$T_x = \int_A p_x\, dA = \int_A -G\Theta y\, dA = -G\Theta \underbrace{\int_A \cancel{y\, dA}}_{S_x} \longrightarrow \underline{T_x = 0}$$

S_x MOMENTO STATICO RISPETTO A $x = 0$ x È ASSE BARICENTRICO

$$T_y = \int_A p_y\, dA = \int_A G\Theta x\, dA = G\Theta \underbrace{\int_A \cancel{x\, dA}}_{S_y} \longrightarrow \underline{T_y = 0}$$

S_y MOMENTO STATICO RISPETTO A $y = 0$ y È ASSE BARICENTRICO

RESTA DA VERIFICARE M_z:

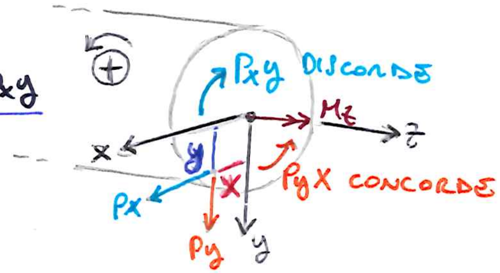
$$M_z = \int_A p_x(-y)\, dA + \int_A p_y(x)\, dA^{*} = \overline{M_z}$$

$$M_z = \int_A [-G\Theta y(-y) + G\Theta x(x)]\, dA = G\Theta \underbrace{\int_A (x^2+y^2)\, dA}_{J_p} \longrightarrow \boxed{M_z = G\Theta J_p = \overline{M_z}}$$

J_p MOMENTO POLARE DI INERZIA

* N.B.

$$\underline{M_z = p_y x - p_x y}$$



ALLORA L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE Θ [COSTANTE] VALE $\boxed{\Theta = \frac{\overline{M_z}}{G J_p}}$ $\longrightarrow$

- DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A $\overline{M_z}$
- INVERSAMENTE PROPORZIONALE A $\boxed{G J_p}$

RIGIDEZZA TORSIONALE

UNISCE UNA CARATTERISTICA DEL MATERIALE, G = MODULO DI TAGLIO, ALLA GEOMETRIA DELLA SEZIONE, J_p = MOMENTO POLARE DI INERZIA

N.B. $\frac{1}{R} = \frac{\overline{M_x}}{E J_x}$ CURVATURA NELLA FLESSIONE $\xleftrightarrow[\text{ANALOGA}]{\text{FORMA}}$ $\Theta = \frac{\overline{M_t}}{G J_p}$

RAPPORTO TRA MOMENTO APPLICATO E RIGIDEZZA

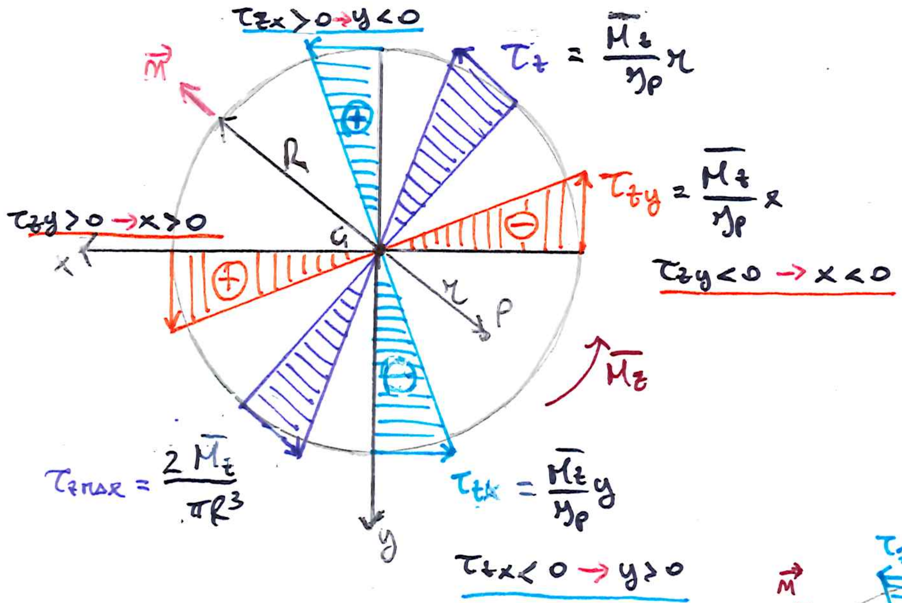
NOTO Θ LA SOLUZIONE COMPLETA DEL PROBLEMA È:

$$\sigma_x = 0 \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \varepsilon_x = 0 \qquad \gamma_{xy} = 0 \qquad u = -\Theta z y = -\frac{\overline{M}_t}{G J_p} z y$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{xz} = -G\Theta y = -\frac{\overline{M}_t}{J_p} y \qquad \varepsilon_y = 0 \qquad \gamma_{xz} = -\Theta y = -\frac{\overline{M}_t}{G J_p} y \qquad v = \Theta z x = \frac{\overline{M}_t}{G J_p} z x$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{yz} = G\Theta x = \frac{\overline{M}_t}{J_p} x \qquad \varepsilon_z = 0 \qquad \gamma_{yz} = \Theta x = \frac{\overline{M}_t}{G J_p} x \qquad w = 0$$

› LE UNICHE COMPONENTI DI TENSIONE NON NULLE SONO τ_{xz} E τ_{yz} CHE DANNO LUOGO A UNA TENSIONE TANGENZIALE GENERICA τ_z, SEMPRE PERPENDICOLARE A $\vec{m}$ E TANGENTE AL BORDO



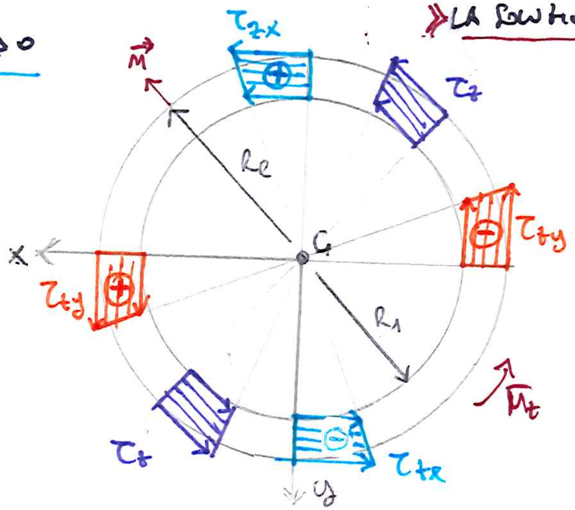
IN UN PUNTO DELLA SEZIONE $\tau_z = \frac{\overline{M}_t}{J_p} r$, CON r CHE INDIVIDUA LA POSIZIONE DEL PUNTO $P = (x, y)$, È $\vec{\tau_z}$ ORTOGONALE AL RAGGIO R

LE TENSIONI TANGENZIALI SONO NULLE AL BARICENTRO, VARIANO LINEARMENTE LUNGO IL RAGGIO E SONO MASSIME AL BORDO;

$$\tau_{zmax} = \frac{\overline{M}_t}{J_p} R$$

ESSENDO $J_p = \frac{\pi R^4}{2}$ $\qquad \tau_{max} = \frac{\overline{M}_t}{\pi R^4/2} R = \boxed{\frac{2\overline{M}_t}{\pi R^3}}$

» LA SOLUZIONE PUÒ ESSERE ESTESA ALLE SEZIONI CIRCOLARI CAVE «



LE TENSIONI VARIANO LINEARMENTE LUNGO R

SONO MASSIME AL BORDO ESTERNO

SONO TANGENTI AL CONTORNO SIA AL BORDO ESTERNO CHE AL BORDO INTERNO

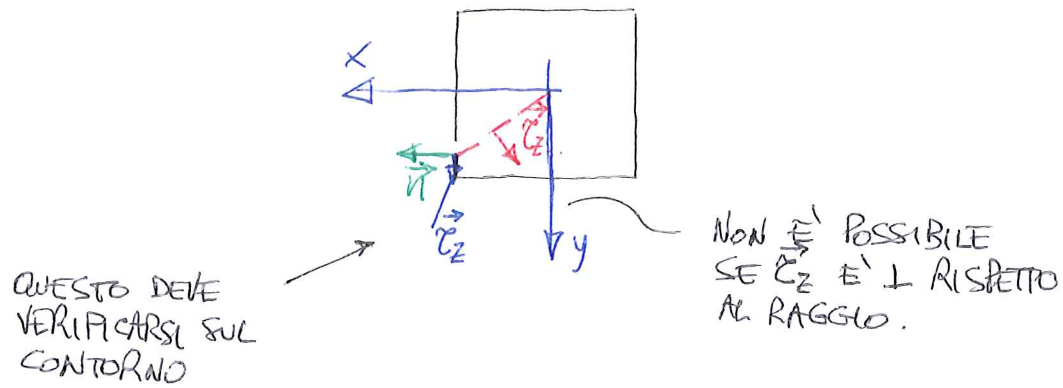
$$\tau_{zmax} = \frac{\overline{M}_t}{J_p} R_e$$

$$J_p = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2} \qquad \boxed{\tau_{max} = \frac{2\overline{M}_t R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)}}$$

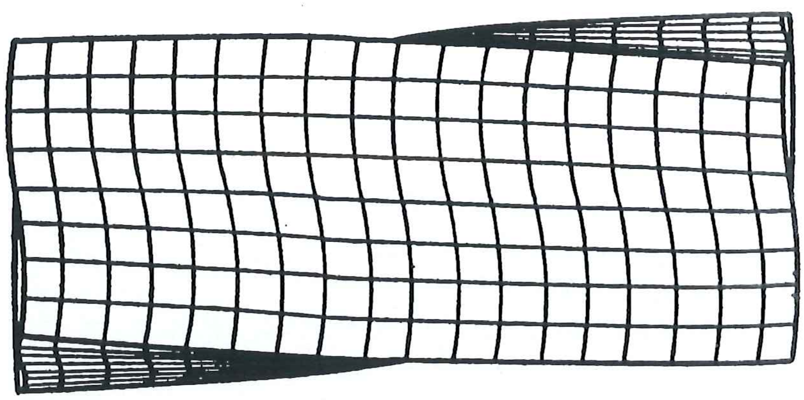
TORSIONE DI SOLIDI A SEZIONE GENERICA (NON CIRCOLARE).

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA TORSIONE OTTENUTA PER SEZIONI CIRCOLARI NON PUÒ ESSERE GENERALIZZATA AL CASO DI SEZIONI DI FORMA QUALSIASI.

INFATTI SOLO SE LA SEZIONE È CIRCOLARE LA CONDIZIONE AL CONTORNO $\vec{\tau} \times \vec{n} = 0$ RISULTA SODDISFATTA FACILMENTE, IN QUANTO LE TENSIONI TANGENZIALI τ_{zx} E τ_{zy} SONO SEMPRE DIRETTE PERPENDICOLARMENTE AL RAGGIO, MENTRE LA NORMALE AL CONTORNO $\vec{n}$ È SEMPRE DIRETTA RADIALMENTE: IN QUESTO MODO $\vec{\tau} \times \vec{n} = 0$ È SEMPRE VERIFICATA.
PER QUALSIASI ALTRA FORMA DELLA SEZIONE LA NORMALE AL CONTORNO $\vec{n}$ NON È PIÙ DIRETTA RADIALMENTE, E LA CONDIZIONE $\vec{\tau} \times \vec{n} = 0$ È VIOLATA SE $\vec{\tau}_z$ È DIRETTA SEMPRE PERPENDICOLARMENTE AL RAGGIO, COME AVVIENE NEL CASO CIRCOLARE.



OCCORRE QUINDI MODIFICARE LA SOLUZIONE, ABBANDONANDO L'IPOTESI CHE NON CI SIANO SPOSTAMENTI IN DIREZIONE LONGITUDINALE (CIOÈ $w = 0$) E CHE LA SEZIONE TRASVERSALE RETTA SI MANTENGA PIANA. SI DEVE QUINDI IMMAGINARE CHE LA SEZIONE TRASVERSALE SI "INGOBBI" IN MODO TUTTAVIA INDIPENDENTE DA z, CIOÈ TALE CHE L'INGOBBAMENTO RISULTI UNIFORME (RISPETTO A z).



SI AMMETTE ALLORA CHE LA SOLUZIONE CINEMATICA ABBIA QUESTA FORMA:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = -\Theta yz \\ v(x,y,z) = +\Theta xz \\ w(x,y,z) = \Theta\,\omega(x,y) \end{cases} \qquad [1]$$

DOVE Θ È L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE (COSTANTE LUNGO L'ASSE DEL SOLIDO: TORSIONE UNIFORME $\Leftrightarrow \frac{d\Theta}{dz} = 0$) E $\omega = \omega(x,y)$ LA <u>FUNZIONE DI INGOBBAMENTO</u>, DA DETERMINARSI.

SI OSSERVI CHE DIMENSIONALMENTE $[w] = [L]$, $[\Theta] = \left[\frac{1}{L}\right] \Rightarrow [\omega] = [L^2]$.

LE DEFORMAZIONI CONSEGUENTI AL CAMPO DI SPOSTAMENTI [1] SONO:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\Theta z + \Theta z = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\Theta y + \Theta \frac{\partial \omega}{\partial x} \qquad [2]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = +\Theta x + \Theta \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

DALLE [2] MEDIANTE IL LEGAME COSTITUTIVO INVERSO SI DETERMINANO LE COMPONENTI DI SFORZO:

$$\sigma_x = 0 \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = +G\Theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y\right) \qquad [3]$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = +G\Theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x\right)$$

DOVE G È IL MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE.

LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA FORNISCONO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 & & 0 = 0 \quad \checkmark \\ \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow & 0 = 0 \quad \checkmark \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 & & G\Theta\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + G\Theta\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \qquad [4]$$

PERTANTO LA FUNZIONE $\omega(x,y)$ DEVE SODDISFARE L'EQUAZIONE $\nabla^2 \omega = 0$ NEI PUNTI INTERNI, DUNQUE IN OGNI SEZIONE TRASVERSALE S_z

W DEVE QUINDI ESSERE FUNZIONE ARMONICA, CIOÈ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE ($\nabla^2 \omega = 0$).

SULLA SUPERFICIE DI CONTORNO S (MANTELLO), PRIVO DI FORZE DI SUPERFICIE E TALE CHE $\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}$ DEVONO ESSERE SODDISFATTE LE RELAZIONI DI CAUCHY:

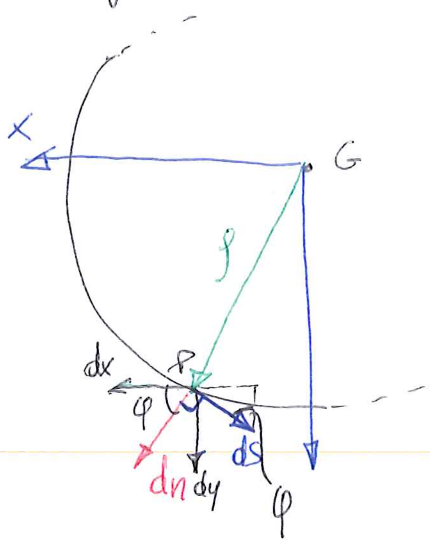
$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \\ G\Theta\left[\frac{\partial \omega}{\partial x} - y\right]\alpha_x + G\Theta\left[\frac{\partial \omega}{\partial y} + x\right]\alpha_y = 0 \end{array} \qquad [5]$$

SI OSSERVI CHE L'ULTIMA DELLE [5], POSTO $\vec{\tau}_z = \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j}$ RICHIEDE CHE

$$\vec{\tau}_z \times \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_z \text{ DEVE ESSERE TANGENTE AL CONTORNO.}$$

LE [5] CHE DEVONO VALERE SU TUTTO IL CONTORNO, PER LA IPOTIZZATA INDIPENDENZA DA Z DEVONO VALERE SULLA FRONTIERA ∂S_z DELLA GENERICA SEZIONE TRASVERSALE S_z, POSSONO ESSERE SCRITTE ANCHE IN QUESTE FORME:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y = y\alpha_x - x\alpha_y \qquad [6]$$



$$\alpha_x = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}$$

$$\alpha_y = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}$$

$$\alpha_x = \cos\varphi \; ; \quad \alpha_y = \sin\varphi$$

DUNQUE

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dn} = y\frac{dy}{ds} - x\left(-\frac{dx}{ds}\right) \qquad [6']$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dn} = y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds}$$

MA $\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dn} = \frac{d\omega}{dn}$; $x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\rho^2)$

E DUNQUE $\frac{d\omega}{dn} = \frac{1}{2}\frac{d(\rho^2)}{ds} = \rho\frac{d\rho}{ds}$ [6''] DOVE ρ È LA DISTANZA FRA IL BARICENTRO G E IL GENERICO PUNTO $P \in$ AL CONTORNO ∂S_z

PER LA [4] E LA [6''] ω È FUNZIONE ARMONICA, LA CUI DERIVATA NORMALE È ASSEGNATA SUL CONTORNO: SI HA UN PROBLEMA DI NEUMANN PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE. 4

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA È GARANTITA (A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA) PURCHÉ RISULTI $\oint_{\partial S_z} \frac{d\omega}{dn}\, ds = 0.$

RESTANO DA VERIFICARE LE CONDIZIONI DI EQUIVALENZA STATICA SULLE BASI S_0 E S_L.
PER LA SECONDA, PER LA QUALE $\vec{n} = \{0,0,1\}$ SI HA:

$$\begin{cases} \tau_{zx} \cdot 1 = G\Theta\left[\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right] = p_x \\ \tau_{zy} \cdot 1 = G\Theta\left[\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right] = p_y \\ \sigma_z \cdot 1 = 0 = p_z \end{cases}$$

RELAZIONI ANALOGHE SI TROVANO SULLA BASE S_0 (PER LA QUALE $\vec{n} = \{0,0,-1\}$).

IN TERMINI DI RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE SI DEVE AVERE:

$$T_x = \int_A p_x\, dA = 0 \Rightarrow G\Theta\int_A \frac{\partial\omega}{\partial x} dA - G\Theta\underbrace{\int_A y\, dA}_{S_x=0} = 0 \Rightarrow \int_A \frac{\partial\omega}{\partial x} dA = 0$$

$$T_y = \int_A p_y\, dA = 0 \Rightarrow G\Theta\int_A \frac{\partial\omega}{\partial y} dA + G\Theta\underbrace{\int_A x\, dA}_{S_y=0} = 0 \Rightarrow \int_A \frac{\partial\omega}{\partial y} dA = 0$$

$$N = \int_A p_z\, dA = 0$$

$$M_{x(0)} = \int_A y\, p_z\, dA = 0$$

$$M_{y(0)} = \int_A -x\, p_z\, dA = 0$$

$$M_{z(0)} = \int_A (-p_x y + p_y x)\, dA = \bar{M}_z \Rightarrow G\Theta\int_A \left[\left(-\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\right)y + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right)x\right] dA = \bar{M}_z$$

OVVERO $\bar{M}_z = G\Theta\int_A \left[x^2 + y^2 - \frac{\partial\omega}{\partial x}y + \frac{\partial\omega}{\partial y}x\right] dA = G\Theta J_t$

$$J_t = \int_A \left[x^2 + y^2 - \frac{\partial\omega}{\partial x}y + \frac{\partial\omega}{\partial y}x\right] dA = \underbrace{\int_A (x^2+y^2)\, dA}_{J_G} + \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y\right) dA$$

$J_t = J_G + \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y\right) dA$; FATTORE DI RIGIDITÀ TORSIONALE.

NOTA 1. SI OSSERVI CHE RISULTA SEMPRE $J_G \geq J_t > 0$

INFATTI LA PRIMA CONDIZIONE $(J_t \leq J_G)$ SI DIMOSTRA AGEVOLMENTE COSÌ:

$$J_t = J_G + \int_A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} x - \frac{\partial \omega}{\partial x} y\right) dA \qquad [a]$$

NELL'ESPRESSIONE [a] SI PUÒ UTILIZZARE QUESTA IDENTITÀ:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = \frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot x + \omega \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial x}{\partial y}}}_{=0} \; ; \; \frac{\partial}{\partial x}(\omega y) = \frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot y + \omega \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}}}_{=0}$$

SICCHÉ SI PUÒ SCRIVERE

$$J_t = J_G + \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega y)\right] dA = J_G - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega y) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega x)\right] dA \qquad [a']$$

A QUESTO PUNTO SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN (TEOREMA DELLA DIVERGENZA), OTTENENDO:

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega y) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega x)\right] dA = \int_{\partial A} (\omega y\, \alpha_x - \omega x\, \alpha_y)\, ds \qquad [b]$$

DOVE ∂A È LA FRONTIERA DELLA SEZIONE TRASVERSALE A (CHE APPARTIENE AL "MANTELLO" S), E α_x, α_y LE COMPONENTI DELLA NORMALE USCENTE $\vec{n}$.

SI OTTIENE POI:

$$\int_{\partial A} \omega (y\alpha_x - x\alpha_y)\, ds = \int_{\partial A} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds \qquad [c]$$

IN QUANTO, PER LA PRECEDENTE EQ. [6] SI HA:

$$y\alpha_x - x\alpha_y = \frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dn} = \frac{d\omega}{dn}$$

SE ORA SI APPLICA NUOVAMENTE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA, SI OTTIENE:

$$\int_{\partial A} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds = \int_{\partial A} \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right] dA$$

OVVERO, SVILUPPANDO

$$\int_{\partial A} \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right] ds = \int_A \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \omega \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right]}_{\nabla^2 \omega}\right] dA = \int_A \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \omega \underbrace{\nabla^2 \omega}_{=0}\right] dA \qquad [d]$$

SI OTTIENE COSÌ PER LA [d], TENUTO CONTO CHE ω È FUNZIONE ARMONICA, CIOÈ TALE CHE $\nabla^2\omega = 0$ IN A:

4 ter

$$J_t = J_G - \int_A \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dA \qquad [e]$$

ORA NELL'INTEGRALE COMPAIONO QUANTITÀ POSITIVE POICHÉ $\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 > 0$; $\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 > 0$ E QUINDI PER LA [e]

$$J_t \leq J_G$$

DOVE IL SEGNO DI EGUALE VALE SOLO NEL CASO CHE $\frac{\partial\omega}{\partial x} \equiv 0$ E $\frac{\partial\omega}{\partial y} \equiv 0$, CIOÈ QUANDO LA FUNZIONE DI INGOBBAMENTO È COSTANTE, NEL QUAL CASO $J_t \equiv J_G$.

PER VERIFICARE CHE $J_t > 0$ SI RISCRIVE LA [a] NELLA FORMA:

$$J_t = \int_A \left[x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dA \quad [f]$$

OTTENUTA SOMMANDO ALLA [a] IL TERMINE $\int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y\right) dA + \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 dA = 0$

LA [f] DIVIENE ALLORA:

$$J_t = \int_A \left[\left(x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(-y + \frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right] dA > 0$$

IN QUANTO GLI INTEGRANDI SONO QUANTITÀ POSITIVE.

QUESTE NON POSSONO MAI ANNULLARSI COMPLETAMENTE: SE INFATTI FOSSE

$\frac{\partial\omega}{\partial y} = -x$ E $\frac{\partial\omega}{\partial x} = y$ SI AVREBBE CHE LE DERIVATE SECONDE MISTE

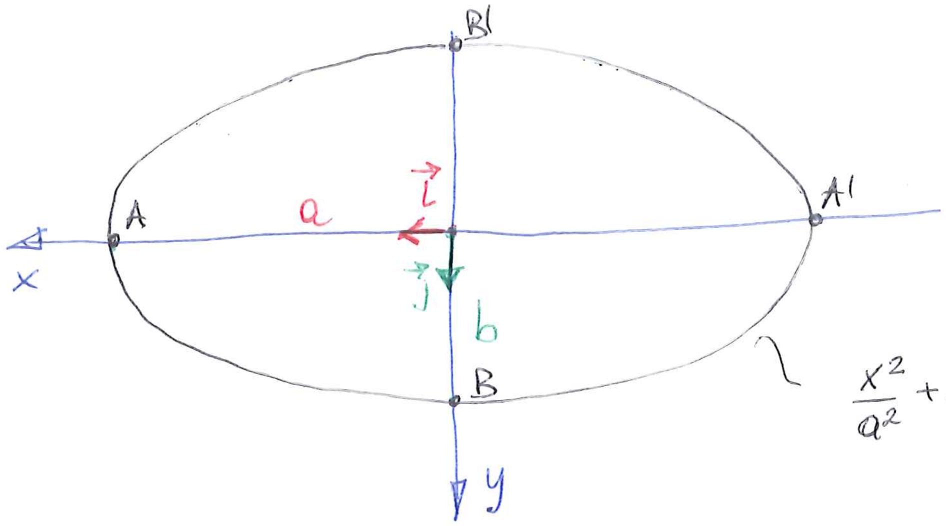
NON SODDISFEREBBERO IL TEOREMA DI SCHWARZ:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x \partial y} = -1 \neq \frac{\partial^2\omega}{\partial y \partial x} = +1$$

E ω NON POTREBBE ESSERE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE,

$\nabla^2\omega = 0$. $\square$

ESEMPIO: SEZIONE ELLITTICA CON SEMIASSE MAGGIORE a E SEMIASSE MINORE b



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

SI ASSUME CHE LA FUNZIONE DI INGOBBAMENTO SIA $\omega = kxy$. , $k=$ CONST. [7]

SI HA:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = ky \;;\quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = kx \;;\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \;;\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \nabla^2 \omega = 0 \qquad [7']$$

E LA EQUAZIONE DI LAPLACE E' SODDISFATTA.

RESTA DA VERIFICARE LA CONDIZIONE [6]: ALLO SCOPO OCCORRE DETERMINARE L'ESPRESSIONE DI α_x, α_y SUL CONTORNO DELLA SEZIONE RETTA ∂S_z.

L'ELLISSE AMMETTE QUESTA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad [8]$$

← NOTA: NON È UNA RAPPRESENTAZIONE IN COORDINATE POLARI (t È ANOMALIA ECCENTRICA)

UN VETTORE TANGENTE $\vec{t}$ ALL'ELLISSE È COSIFFATTO:

$$\vec{t} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{t} = -a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}$$

IL SUO MODULO VALE $|\vec{t}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

IL VERSORE TANGENTE $\vec{T} = \dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|}$ È:

$$\vec{T} = \frac{-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE PER $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$; $t=\pi$; $t=\frac{3\pi}{2}$ SI OTTIENE:

$$\vec{T}\Big|_{t=0} = +\vec{j} \;;\quad \vec{T}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\vec{i} \;;\quad \vec{T}\Big|_{t=\pi} = -\vec{j} \;;\quad \vec{T}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = +\vec{i}$$

SEGUE POI:

$$\vec T' = \frac{d\vec T}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(-a\sin t\,\vec i + b\cos t\,\vec j)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}\right]$$

$$\vec T' = (-a\cos t\,\vec i - b\sin t\,\vec j)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-1/2} + (-a\sin t\,\vec i + b\cos t\,\vec j)\left(\cancel{-\tfrac{1}{2}}\right)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}\cdot(\cancel{2}a^2\sin t\cos t - \cancel{2}b^2\cos t\sin t)$$

SEGUE DI QUI:

$$\vec T' = \left[(-a\cos t\,\vec i - b\sin t\,\vec j)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-1/2} - (-a\sin t\,\vec i + b\cos t\,\vec j)(a^2\sin t\cos t - b^2\cos t\sin t)\cdot(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-3/2}\right.$$

$$\vec T' = \frac{(-a\cos t\,\vec i - b\sin t\,\vec j)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) + (a\sin t\,\vec i - b\cos t\,\vec j)(a^2\sin t\cos t - b^2\cos t\sin t)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$\vec T' = \frac{\left[\cancel{-a^3\cos t\sin^2 t\,\vec i} - ab^2\cos^3 t\,\vec i - a^2 b\sin^3 t\,\vec j \cancel{- b^3\sin t\cos^2 t\,\vec j}\right] \cancel{+ a^3\sin^2 t\cos t\,\vec i} - ab^2\cos t\sin^2 t\,\vec i + {}}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$\frac{- a^2 b\sin t\cos^2 t\,\vec j \cancel{+ b^3\cos^2 t\sin t\,\vec j}}{}$$

$$\vec T' = \frac{-ab^2\cos t\overbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}^{=1}\vec i - a^2 b\sin t\overbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}^{=1}\vec j}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$\vec T' = \frac{-ab\,(b\cos t\,\vec i + a\sin t\,\vec j)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

SI HA POI

$$|\vec T'| = \sqrt{\frac{(ab)^2[(b\cos t)^2 + (a\sin t)^2]}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}} = \sqrt{\frac{a^2b^2\,\cancel{[a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t]}}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\cancel{3}\,2}}}$$

DUNQUE

$$|\vec T'| = \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

IL VERSORE NORMALE $\vec N$ È ALLORA

$$\vec N = \frac{\vec T'}{|\vec T'|} = \frac{-\cancel{ab}\,(b\cos t\,\vec i + a\sin t\,\vec j)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}\;\frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{2/2}}{\cancel{ab}} = -\frac{(b\cos t\,\vec i + a\sin t\,\vec j)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}$$

SI OSSERVA PERÒ CHE $\vec{N}$ È DIRETTO IN OGNI PUNTO VERSO IL CENTRO DI CURVATURA, CIOÈ VERSO L'INTERNO:

$$\vec{N}\Big|_{t=0} = -\vec{i} \; ; \; \vec{N}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\vec{j} \; ; \; \vec{N}\Big|_{t=\pi} = +\vec{i} \; ; \; \vec{N}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = +\vec{j}$$

LA NORMALE "USCENTE" (DI MODULO UNITARIO) È ALLORA $\vec{n} = -\vec{N}$.
PERTANTO

$$\vec{n} = \frac{b\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}} = \underbrace{\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}}_{\alpha_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}}_{\alpha_y}\vec{j}$$

LE COMPONENTI α_x, α_y SONO QUINDI:

$$\alpha_x = \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$$

$$\alpha_y = \frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} \qquad [9]$$

MEDIANTE LE [8], CHE FORNISCONO $\cos t = \frac{x}{a}$; $\sin t = \frac{y}{b}$ SI POSSONO TRASFORMARE LE [9] ELIMINANDO IL PARAMETRO t:

$$\alpha_x = \frac{b\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \; ; \qquad \alpha_y = \frac{a\frac{y}{b}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

DALLE [6] E [7'] SEGUE:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\alpha_y = y\alpha_x - x\alpha_y$$

$$ky\frac{b\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + kx\frac{a\frac{y}{b}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = y\frac{b\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} - x\frac{a\frac{y}{b}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \qquad [10]$$

SI HA POI:

$$\frac{bxy}{a}(k-1) + \frac{axy}{b}(k+1) = 0 \;\Rightarrow\; k\left[\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right] + \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) = 0$$

$$k\frac{b^2+a^2}{\cancel{ab}} + \frac{a^2-b^2}{\cancel{ab}} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{k = \frac{-(a^2-b^2)}{a^2+b^2}} \qquad [10']$$

SI HA COSÌ CHE

$$\omega = \frac{-(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\, xy \qquad [11]$$

NE SEGUE

$$\tau_{zx} = G\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right) = G\Theta\left(-\frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\, y - y\right) \Rightarrow \tau_{zx} = G\Theta\left(\frac{-\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-a^2-\cancel{b^2}}{a^2+b^2}\right) y$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{zx} = -2G\Theta\frac{a^2}{a^2+b^2}\, y} \qquad [12]$$

$$\tau_{zy} = G\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right) = G\Theta\left(-\frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\, x + x\right) \Rightarrow \tau_{zy} = G\Theta\left(\frac{-\cancel{a^2}+b^2+\cancel{a^2}+b^2}{a^2+b^2}\right) x$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{zy} = 2G\Theta\frac{b^2}{a^2+b^2}\, x} \qquad [13]$$

SI HA COSÌ CHE τ_{zx} E τ_{zy} VARIANO LINEARMENTE CON y (o x) E SI ANNULLANO IN G.
LA TENSIONE TANGENZIALE TOTALE, $\tau_{zn} = |\vec{\tau}_z| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$
OVVERO

$$\tau_{zn} = \frac{2G\Theta}{a^2+b^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}$$

SI VUOLE DETERMINARE DOVE τ_{zn} RAGGIUNGE IL VALORE MASSIMO E MINIMO SUL CONTORNO ∂S_z; ALLO SCOPO SI COSTRUISCE LA FUNZIONE

$$\bar{\tau}_{zn} = \frac{2G\Theta}{a^2+b^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2} + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \qquad [14]$$

PER POTERE DETERMINARE MASSIMI E MINIMI VINCOLATI (λ È MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE)

SI TROVA:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\tau}_{zn}}{\partial x} = 0 & \dfrac{2G\Theta}{a^2+b^2}\cdot\cancel{\dfrac{1}{2}}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{-1/2}\cdot\cancel{2}b^4x + 2\dfrac{\lambda x}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial\bar{\tau}_{zn}}{\partial y} = 0 & \dfrac{2G\Theta}{a^2+b^2}\cdot\cancel{\dfrac{1}{2}}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{-1/2}\cdot\cancel{2}a^4y + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial\bar{\tau}_{zn}}{\partial \lambda} = 0 & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 = 0 \end{cases} \qquad [15]$$

IL SISTEMA FORNISCE:

$$\begin{cases} 2x\left\{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b^4 G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}\right\}=0 \\[2ex] 2y\left\{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{a^4 G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}\right\}=0 \qquad [15'] \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases}$$

SE $x\neq 0$ E $y\neq 0$ LA PRIMA DELLE [15'] FORNISCE $\lambda=\dfrac{-a^2b^4G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}$
CHE SOSTITUITA NELLA SECONDA DÀ LUOGO, CON QUALCHE SEMPLIFICAZIONE, ALLA CONDIZIONE $a^4-a^2b^2=0 \Rightarrow a^2-b^2=0$, IMPOSSIBILE.

DEVE PERTANTO ESSERE $X=0$ O $Y=0$.

SE $X=0$ $\quad \dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad y=\pm b \quad \lambda=\dfrac{-a^4b^2G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{a^4b^2}}$

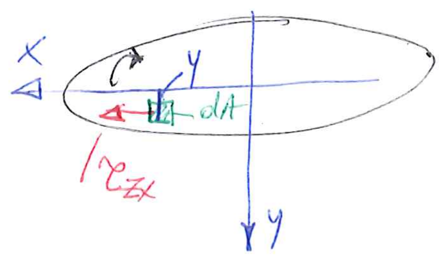
SE $y=0$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2}=1 \quad x=\pm a \quad \lambda=-\dfrac{b^4a^2G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4a^2}}$

E QUINDI I MASSIMI/MINIMI SI TROVANO IN CORRISPONDENZA DEI PUNTI $A=(a,0)$; $A'=(-a,0)$; $B=(0,b)$; $B'=(0,-b)$ IN CUI I SEMIASSI INTERSECANO IL CONTORNO DELL'ELLISSE.

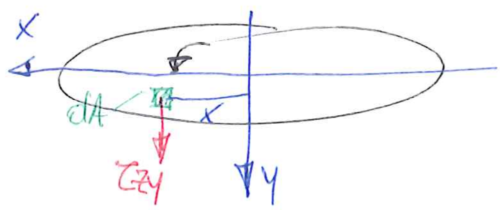
IL CALCOLO DELLE DERIVATE SECONDE PERMETTONO DI CONCLUDERE CHE I PUNTI A E A' CORRISPONDONO AI MINIMI DI τ_{zn}, MENTRE I PUNTI B E B' CORRISPONDONO AI MASSIMI.

SI PASSA A VALUTARE $\bar{M}_z$. SI RICONOSCE CHE

$$\bar{M}_z=\int_A -\tau_{zx}\,y\,dA+\int_A \tau_{zy}\,x\,dA$$



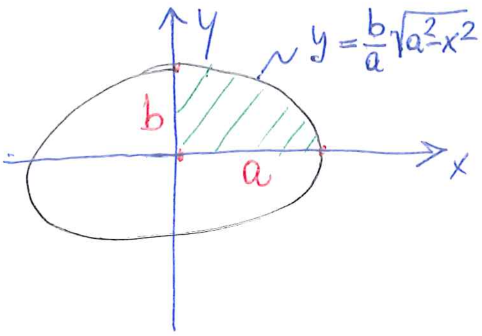
$$\bar{M}_z=\int_A 2G\Theta\frac{a^2}{a^2+b^2}y^2dA+\int_A 2G\Theta\frac{b^2}{a^2+b^2}x^2dA$$



$$\bar{M}_z=2G\Theta\left\{\frac{a^2}{a^2+b}\underbrace{\int_A y^2dA}_{J_x}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\underbrace{\int_A x^2dA}_{J_y}\right\}$$

$$\bar{M}_z=2G\Theta\left\{\frac{a^2}{a^2+b^2}J_x+\frac{b^2}{a^2+b^2}J_y\right\}=G\Theta J_t \quad [16], \quad J_t=2\left\{\frac{a^2}{a^2+b^2}J_x+\frac{b^2}{a^2+b^2}J_y\right\}$$

PER VALUTARE I MOMENTI D'INERZIA J_x, J_y SI SFRUTTA LA PRESENZA DI 2 ASSI DI SIMMETRIA, LIMITANDOSI A CONSIDERARE IL CONTRIBUTO DELL'AREA A TRATTEGGIO E MOLTIPLICANDO IL RISULTATO PER 4.



SI OSSERVA POI CHE L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ PUÒ ESSERE ESPLICITATA QUANDO SI OPERA NEL PRIMO QUADRANTE, OTTENENDO

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

SI HA QUINDI:

$$J_x = \int_A y^2\,dA = 4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy$$

$$J_x = 4\int_0^a dx\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = 4\int_0^a \frac{b^3}{3a^3}(a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{4b^3}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}dx$$

ORA $\displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}dx = \left[\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4}+\frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{3}{8}a^4\underbrace{\arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}}$

$$J_x = \frac{\cancel{4}\,b^3}{\cancel{3}\,\cancel{a^3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_2}a^{\cancel{4}}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{J_x = \frac{\pi a b^3}{4}}$$

ANALOGAMENTE

$$J_y = \int_A x^2\,dA = 4\int_0^a x^2 dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

$$J_y = 4\int_0^a x^2\left[y\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ORA $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4}+\frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{a^4}{8}\underbrace{\arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}}$

$$J_y = \frac{\cancel{4}b}{\cancel{a}}\,\frac{a^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{8}_2}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}}$$

$$J_G = \int_A (x^2+y^2)\,dA = J_x+J_y = \frac{\pi}{4}ab(b^2+a^2) = \frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$$

$$J_T = 2\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\,\frac{\pi a b^3}{4}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\,\frac{\pi a^3 b}{4}\right] = 2\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,\frac{\pi a b}{4}+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,\frac{\pi a b}{4}\right] = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\,\frac{\pi a b}{4} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$$

DUNQUE $\boxed{J_t = \dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}}$ [17]

È UTILE VERIFICARE SE $J_G > J_t$ O VICEVERSA. A QUESTO SCOPO SI PUÒ SCRIVERE

$$J_t = \frac{\pi}{4} ab \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}, \quad \text{MENTRE} \quad J_G = \frac{\pi}{4} ab(a^2+b^2).$$

SE $J_G > J_t \Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{4}ab}(a^2+b^2) > \cancel{\frac{\pi}{4}ab}\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2 > \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

NE SEGUE, POICHÉ $a^2+b^2>0$:

$$(a^2+b^2)^2 > 4a^2b^2 \Rightarrow a^4+b^4+2a^2b^2 > 4a^2b^2 \Rightarrow a^4+b^4+\underbrace{2a^2b^2-4a^2b^2}_{-2a^2b^2}>0$$

MA $a^4+b^4-2a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 > 0$, SEMPRE VERIFICATO.

PERTANTO $J_t < J_G$: IL FATTO CHE LA SEZIONE SI INGOBBI RIDUCE LA RIGIDEZZA TORSIONALE.

DALLA [16] E DALLA [17] SEGUE INFINE

$$\bar{M}_z = G\Theta J_t$$

OVVERO L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE VALE

$$\Theta = \frac{\bar{M}_z}{GJ_t} = \frac{\bar{M}_z}{G\pi \frac{a^3b^3}{a^2+b^2}} \Rightarrow \boxed{\Theta = \frac{\bar{M}_z(a^2+b^2)}{G\pi a^3 b^3}} \quad [18]$$

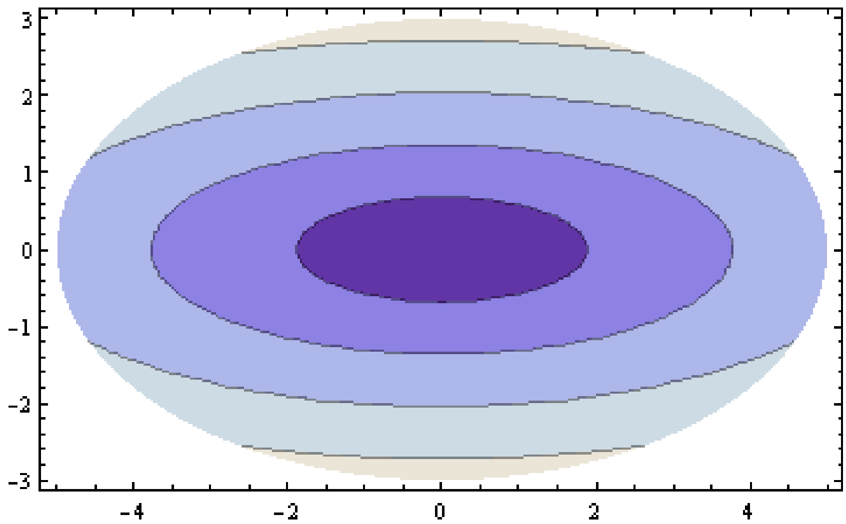
SULLA BASE DEL VALORE [18] SI OTTIENE INFINE

$$\tau_{zx} = -\frac{2\bar{M}_z a^2}{\pi a^3 b^3} y \Rightarrow T_x = \int_A \tau_{zx}\, dA = -\frac{2\bar{M}_z a^2}{\pi a^3 b^3}\overbrace{\int_A y\, dA}^{S_x=0} = 0$$

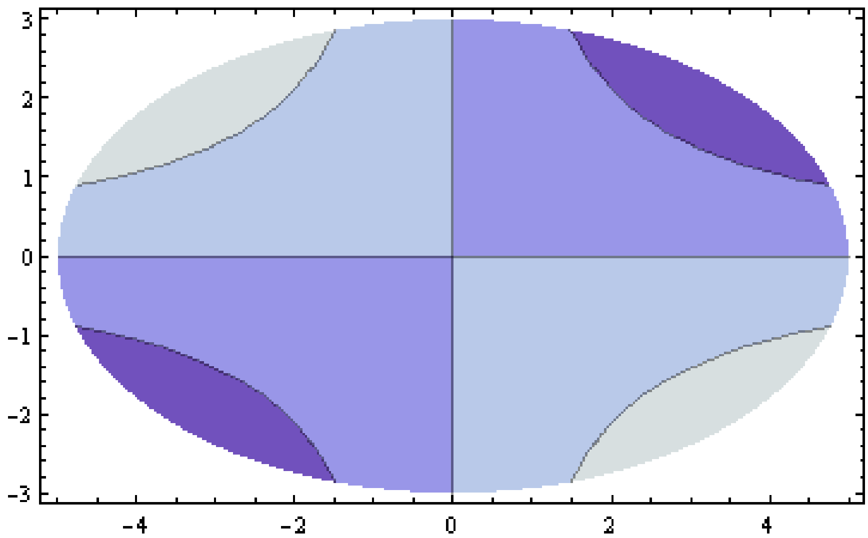
$$\tau_{zy} = +\frac{2\bar{M}_z b^2}{\pi a^3 b^3} x \Rightarrow T_y = \int_A \tau_{zy}\, dA = \frac{2\bar{M}_z b^2}{\pi a^3 b^3}\underbrace{\int_A x\, dA}_{S_y=0} = 0$$

$$w = \frac{\bar{M}_z \cancel{(a^2+b^2)}}{G\pi a^3b^3} \cdot \frac{-(a^2-b^2)}{\cancel{(a^2+b^2)}} xy \Rightarrow w = -\frac{\bar{M}_z}{G\pi}\frac{a^2-b^2}{a^3b^3} xy$$

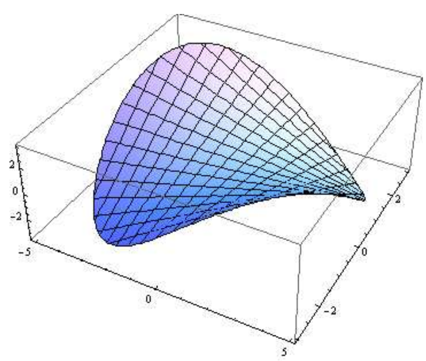
SI OSSERVI CHE $\int_A w\, dA = -\frac{\bar{M}_z}{G\pi}\frac{a^2-b^2}{a^3b^3}\underbrace{\int_A xy\, dA}_{J_{xy}} = 0$ IN QUANTO X E Y SONO ASSI PRINCIPALI D'INERZIA; IL VALORE MEDIO DI w SULLA SEZIONE È QUINDI NULLO.



Curve di livello della funzione τ_{zn} per una sezione ellittica con a = 5, b = 3.

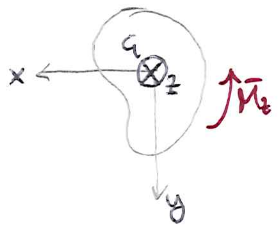


Curve di livello della funzione di ingobbamento ω(*x, y*) per una sezione ellittica con a = 5, b = 3.



Funzione di ingobbamento ω(*x, y*) per una sezione ellittica con a = 5, b = 3.

LA SOLUZIONE OTTENUTA PER LE SEZIONI CIRCOLARI, PIENE O CAVE, NON È VALIDA PER SEZIONI DI FORMA GENERICA, PERCHÉ NON RISULTA SODDISFATTA SUL MANTELLO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO $\tau_{zx}dx + \tau_{zy}dy = 0$ CHE EQUIVALE A PORRE CHE LA COMPONENTE NORMALE DELLA TENSIONE TANGENZIALE SUL MANTELLO SIA NULLA: $\tau_{zn} = 0$



LA SOLUZIONE DEVE ESSERE CORRETTA TENENDO CONTO CHE, NON ESISTENDO PIÙ SIMMETRIA POLARE, A DEFORMAZIONE AVVENUTA LA SEZIONE TRASVERSALE NON SI MANTIENE PIÙ PIANA MA SI INGOBBA

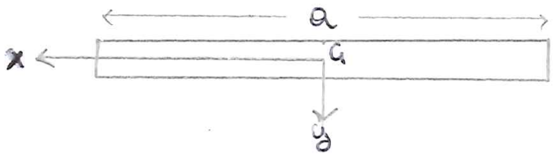
$w \neq 0 \rightarrow w = \Theta\,\omega(x,y,z)$, CON $\omega(x,y,z)$ = FUNZIONE DI INGOBBAMENTO

N.B. $\frac{\partial w}{\partial x} = \Theta \frac{\partial \omega}{\partial x}$ E $\frac{\partial w}{\partial y} = \Theta \frac{\partial \omega}{\partial y}$ ⇝ SI MODIFICANO ANCHE LE TENSIONI TANGENZIALI CHE HANNO COMPONENTI IN x E y τ_{zx} E τ_{zy}; E $\tau_{xy} \neq 0$

LA SOLUZIONE È MOLTO COMPLICATA... → CASI PARTICOLARI RISOLVIBILI CON SOLUZIONI APPROSSIMATE $\boxed{\text{SEZIONI SOTTILI}}$

$\boxed{\text{I}}$ SEZIONE RETTANGOLARE SOTTILE

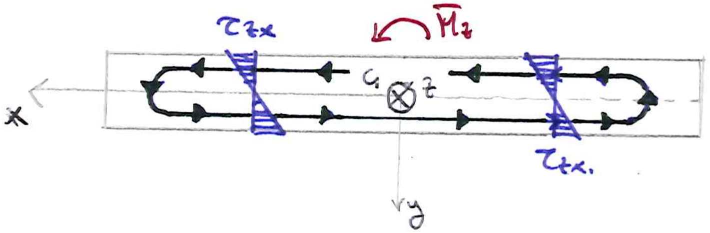
IL PROFILO DELLA SEZIONE TRASVERSALE È UN RETTANGOLO CON a, LATO PARALLELO A x, MOLTO MAGGIORE DI b, LATO PARALLELO A y



$a \gg b$

$\boxed{\text{ANALOGIA IDRODINAMICA}}$ LE TENSIONI TANGENZIALI SCORRONO ALL'INTERNO DELLA SEZIONE COME UN FLUIDO ALL'INTERNO DI UN RECIPIENTE CHE VIENE FATTO RUOTARE ATTORNO AL PROPRIO ASSE CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE

LINEE DI FLUSSO: CURVA CARATTERIZZATA DAL FATTO CHE, IN OGNI SUO PUNTO IL VETTORE $\vec{\tau}_z$ È TANGENTE ALLA CURVA STESSA → DESCRIVONO L'ANDAMENTO DELLE $\vec{\tau}_z$ ALL'INTERNO DELLA SEZIONE



$$\boxed{\Theta = \frac{\overline{M}_t}{G\,J_t}}$$

J_t = FATTORE DI RIGIDITÀ TORSIONALE → $\boxed{J_t = \alpha a b^3}$

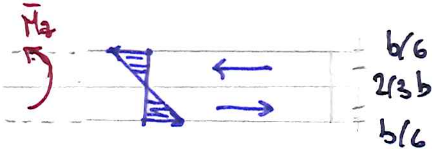
N.B. J_t È SFAVOREVOLE → SULLA RESISTENZA A TORSIONE PER QUESTI PROFILI

N.B. b PICCOLO, ALLORA È MOLTO PICCOLO ANCHE IL BRACCIO DELLA COPPIA → τ_{zx} MOLTO GRANDI

$$\boxed{\tau_{zx1} = \frac{2\overline{M}_z}{\alpha a b^3}\,y}$$

LE TENSIONI TANGENZIALI HANNO UN ANDAMENTO "A FARFALLA", COME NELLA SEZIONE CIRCOLARE; NULLE NELLA LINEA MEDIA E MASSIME AL BORDO [TANGENTI AL BORDO]

$$\boxed{\tau_{zx\,max} = \frac{\beta \overline{M}_t}{a b^2}}$$

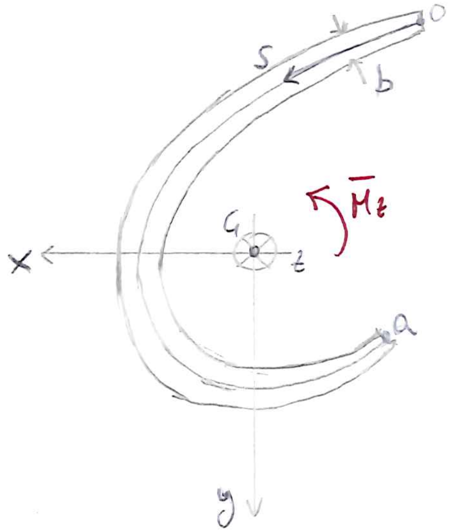


α E β COEFFICIENTI CHE DIPENDONO DAL RAPPORTO TRA I LATI a E b

	$a/b = \infty$ ⟷	$a/b = 1$
α	0,333	0,141
β	3,000	4,800

II SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO

È POSSIBILE GENERALIZZARE LA SOLUZIONE PER LE SEZIONI RETTANGOLARI SOTTILI: IMMAGINIAMO DI 'PIEGARE' LA SEZIONE RETTANGOLARE SOTTILE → LA SEZIONE TRASVERSALE DELLA TRAVE È COSTITUITA DA UNA STRISCIA SOTTILE DI MATERIALE DI SPESSORE b, EVENTUALMENTE VARIABILE



OQ : LINEA MEDIA DELLA SEZIONE → N.B. LA LINEA MEDIA NON FORMA CIRCUITI CHIUSI (SEZIONE APERTA)

S = ASCISSA LOCALE CHE PERCORRE LA LINEA MEDIA

b = SPESSORE - VARIABILE - LUNGO OQ

$b(s) = b$ FUNZIONE DI S

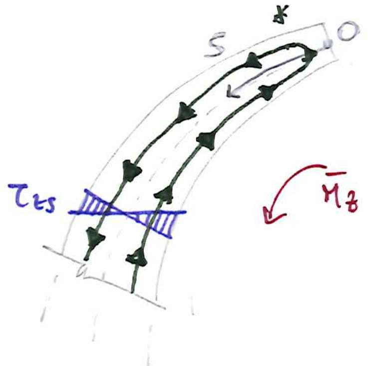
* NOTA: $\tau_{zs\,max} = \frac{2\bar{M}_t}{J_t}\frac{b(s)}{2} = \frac{\bar{M}_t}{J_t}b(s)$

CONSIDERANDO UN RAPPORTO $a/b \to \infty$ $\quad \alpha = 0{,}333$ E $\beta = 3{,}000$

$$J_t = \alpha a b^3 = \frac{1}{3}ab^3 \to J_t = \frac{1}{3}\int_0^a b^3(s)\,ds$$

$\tau_{zs} = \frac{\bar{M}_t}{J_t}b(s)$ * $\quad \tau_{zs\,max}$ DOVE LO SPESSORE b È MAGGIORE $\quad \tau_{zs\,max} = \frac{\bar{M}_t}{J_t}b_{max}$

$\boxed{\tau_{zs}(s)}$ → τ_{zs} È FUNZIONE DI S E VARIA LUNGO b: ANDAMENTO A FARFALLA, LE τ_{zs} SONO NULLE IN CORRISPONDENZA DELLA LINEA MEDIA E MASSIME AL BORDO E TANGENTI AL CONTORNO



N.B. ANCHE IN QUESTO CASO J_t È SFAVOREVOLE → SCARSA RESISTENZA A TORSIONE PER QUESTI PROFILI

INTEGRANDO LE τ_{zs} SI OTTIENE LA COPPIA INTERNA CHE DEVE EQUILIBRARE IL MOMENTO TORCENTE $\bar{M}_t$. IL BRACCIO È DELL'ORDINE DI GRANDEZZA DELLO SPESSORE b → b PICCOLO ↔ τ_{zs} MOLTO GRANDI

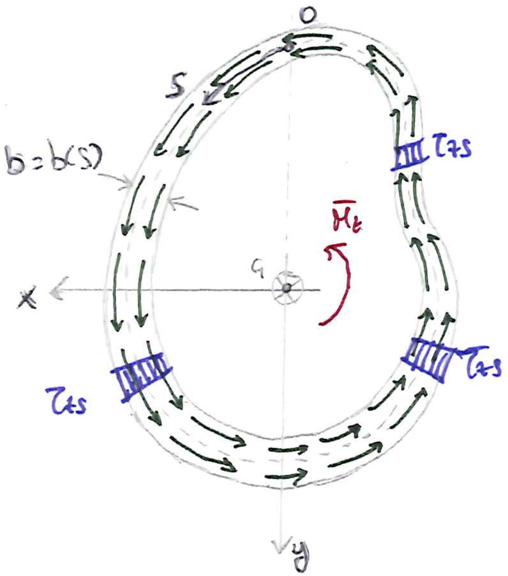
* N.B. ANCHE IN QUESTO CASO LINEE DI FLUSSO 'CHIUSE' NELLO SPESSORE → $\boxed{\text{ANALOGIA IDRODINAMICA}}$

E DI VERSO DISCORDE RISPETTO ALLA LINEA MEDIA

III SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO CHIUSO

BEN DIVERSO È QUELLO CHE SUCCEDE SE LA SEZIONE HA INVECE UN PROFILO CHIUSO → SE LA LINEA MEDIA DELLA SEZIONE FORMA UN CIRCUITO CHIUSO, NON ESISTENDO PIÙ ELEMENTI TERMINALI, LE **LINEE DI FLUSSO** SCORRONO ALL'INTERNO DELLA SEZIONE E HANNO VERSO CONCORDE NELLE BANDE OPPOSTE RISPETTO ALLA LINEA MEDIA

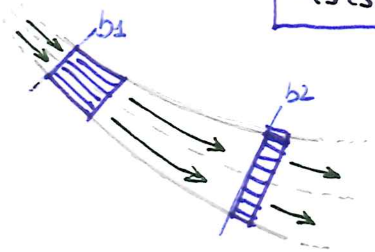
LE TENSIONI TANGENZIALI τ_{zs} RELATIVE A UN GENERICO SPESSORE b HANNO TUTTE LO STESSO VERSO E, ESSENDO PER IPOTESI LO SPESSORE MOLTO PICCOLO, È POSSIBILE RITENERLE UNIFORMI NELLO SPESSORE STESSO



ANALOGIA IDRODINAMICA

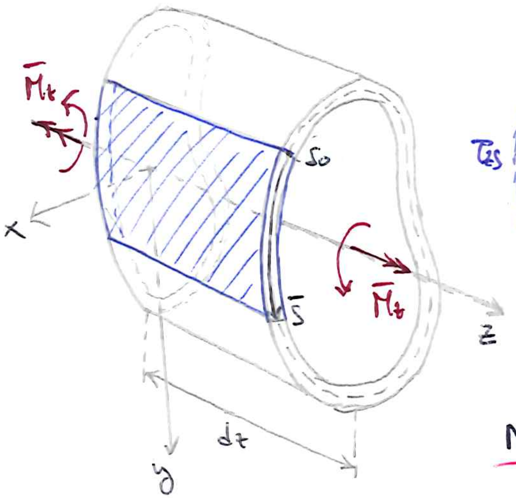
IL FLUIDO SCORRE LUNGO S, TANGENTE IN OGNI PUNTO ALLA LINEA MEDIA.
IL LIQUIDO CIRCOLA DENTRO LA SEZIONE → LA PORTATA È COSTANTE

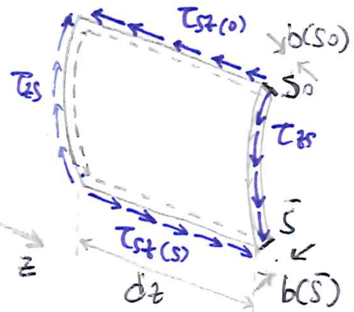
$$\boxed{\tau_{zs}(s) \cdot b(s) = \text{COSTANTE}}$$



LE τ_{zs} SONO MAGGIORI DOVE b È PIÙ PICCOLO E VICEVERSA

$$\tau_{zs}\, b_1 = \tau_{zs}\, b_2 = \text{COSTANTE}$$





N.B. $\tau_{zs} = \tau_{sz}$

→ CONSIDERIAMO UN CONCIO INFINITESIMO DI TRAVE DI LUNGHEZZA dz E NE TAGLIAMO UN PEZZO COMPRESO TRA L'ORIGINE DELLA ASCISSA CURVILINEA S - S_0 - E UNA ASCISSA GENERICA - $\bar{S}$

τ_{zs} SONO LE TENSIONI TANGENZIALI CHE AGISCONO SULLA FACCIA DI NORMALE z NELLO SPESSORE LUNGO L'ASCISSA s (TRA S_0 E $\bar{S}$)

ALLORA PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI SI SVILUPPANO SULLE FACCE PIANE TRONCATE DAI TAGLI LE FORZE:

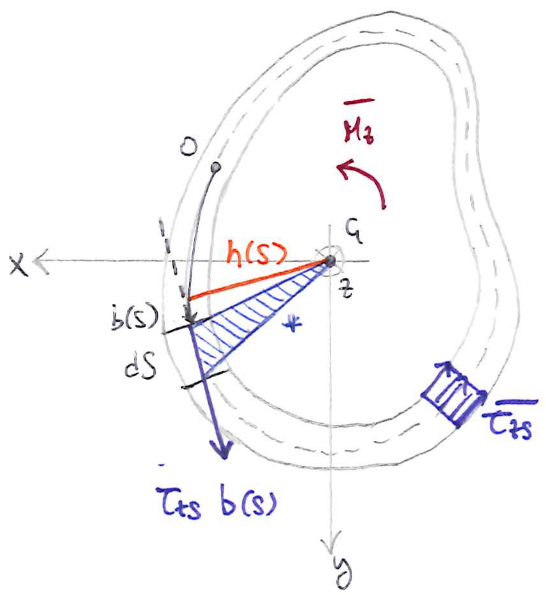
$\tau_{sz(0)}$ → SULLO SPESSORE $b(0)$
$\tau_{sz}(\bar{s})$ → SULLO SPESSORE $b(\bar{s})$

PER L'EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE IN DIREZIONE z:

$$\tau_{sz(0)}\, b(0)\, dz = \tau_{sz}(\bar{s})\, b(\bar{s})\, dz$$

$\forall s$ → DEVE VALERE QUALUNQUE SIA S
LA SCELTA DEL TAGLIO È ARBITRARIA!

$$\boxed{\tau_{sz}(0)\, b(0) = \text{COSTANTE}}$$ FLUSSO DELLA TENSIONE TANGENZIALE



→ LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI TANGENZIALI DEVE DARE LUOGO A UN MOMENTO TORCENTE PARI A $\overline{M}_z$

- SU UNA CORDA $b(s)$ ORTOGONALE A S LA τ_{zs} (COMPONENTE DI τ_z RISPETTO A S) È PERPENDICOLARE ALLA CORDA STESSA
- PER SPESSORI SOTTILI LA DISTRIBUZIONE DI τ_{zs} PUO' ESSERE CONSIDERATA UNIFORME (VALORE MEDIO)
- SU UN TRATTO DI SEZIONE ds $\quad \tau_{zs}(s)\, b(s) = \text{cost}$
- SCEGLIENDO COME POLO G (MA LA SCELTA È ARBITRARIA E SI PUÒ SCEGLIERE QUALSIASI PUNTO ALL'INTERNO DEL CONTORNO), $h(s)$ È LA DISTANZA TRA G E LA TANGENTE ALLA LINEA MEDIA DI ASCISSA CURVILINEA S

ALLORA:

$$\overline{M}_t = \oint \tau_{zs}(s)\, b(s)\, h(s)\, ds$$

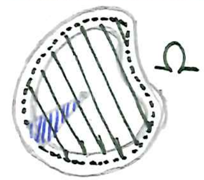
[N.B. $\oint$ INDICA: INTEGRALE SU TUTTO LO SVILUPPO DI S]

$$\overline{M}_t = \underbrace{\tau_{zs}(s)\, b(s)}_{\text{COSTANTE}} \oint \boxed{h(s)\, ds} \rightarrow$$

PARI AL DOPPIO DELL'AREA DEL TRIANGOLO *

$$\boxed{\oint h(s)\, ds = 2\Omega}$$

Ω = AREA RACCHIUSA DALLA LINEA MEDIA



QUINDI:

$$\overline{M}_t = \tau_{zs}(s)\, b(s)\, 2\Omega \rightarrow \boxed{\tau_{zs} = \frac{\overline{M}_t}{2\Omega\, b(s)}}$$

FORMULA DI BREDT

τ_{zs} È INVERSAMENTE PROPORZIONALE A $b(s)$ → $\tau_{zs\,max} = \dfrac{\overline{M}_t}{2\Omega\, b(s)_{MIN}}$ [D'ALTRONDE $\tau_{zs}\, b(s) = \text{cost}$]

N.B. LA FORMULA DI BREDT È BASATA SULL'EQUILIBRIO, MA NON GARANTISCE COMPATIBILITÀ CON SPOSTAMENTI E DEFORMAZIONI

IN GENERALE $\Theta = \dfrac{\overline{M}_t}{G J_t}$ E LA ROTAZIONE TRA LE 2 SEZIONI DI ESTREMITÀ VALE $\Theta L = \dfrac{\overline{M}_t}{G J_t} L$

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE VALE: $\boxed{\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \overline{M}_z\, \Theta L} \rightarrow \mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \overline{M}_z \frac{\overline{M}_z}{G J_t} L = \frac{1}{2} \frac{\overline{M}_z^2}{G J_t} L$

POSSIAMO RICAVARE J_t: $\boxed{\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \int_V \tau_{zs}(s)\, \gamma_{zs}(s)\, dV}$

$$\rightarrow \mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \int_0^L dt \oint \tau_{zs} \frac{\tau_{zs}}{G} b(s)\, ds = \frac{1}{2} L \frac{1}{G} \oint \tau_{zs}^2\, b(s)\, ds = \frac{1}{2} L \frac{1}{G} \oint \frac{(\tau_{zs}\, b(s))^2}{b(s)} ds =$$

$$= \frac{1}{2} L \frac{1}{G} (\tau_{zs}\, b(s))^2 \underbrace{\oint \frac{1}{b(s)} ds}_{\rho}$$

$$\overline{M}_z = \tau_{zs}\, b(s)\, 2\Omega \leftrightarrow (\tau_{zs}\, b(s))^2 = \left(\frac{\overline{M}_t}{2\Omega}\right)^2$$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

ALLORA: $\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\frac{\overline{M}_t^2}{4\Omega^2}\frac{L}{G}\rho$

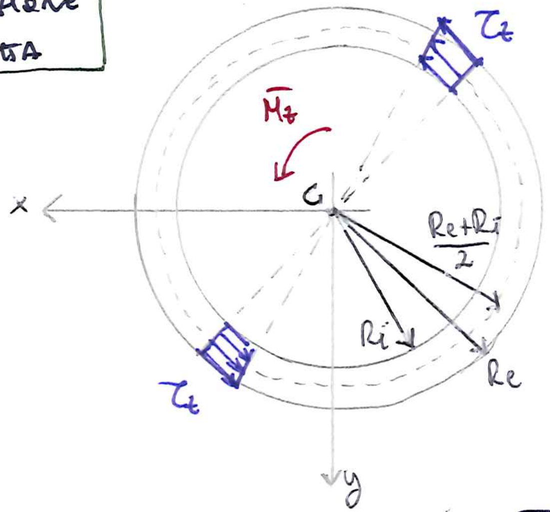
$$\boxed{\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_e} \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\frac{\overline{M}_t^2}{4\Omega^2}\frac{\cancel{L}}{\cancel{G}}\rho = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{\cancel{\overline{M}_t^2}}{\cancel{G}J_t}\cancel{L} \rightarrow \frac{\rho}{4\Omega^2} = \frac{1}{J_t} \qquad \boxed{J_t = \frac{4\Omega^2}{\rho}}$$

FATTORE DI RIGIDITA' TORSIONALE PER PROFILI CHIUSI

NB ASSUMERE CHE LE τ_{zs} SIANO UNIFORMI È UN'APPROSSIMAZIONE NECESSARIA PER CALCOLARE LE TENSIONI TANGENZIALI IN UNA SEZIONE SOTTILE CHIUSA GENERICA. QUANTO VALE L'APPROSSIMAZIONE?

VEDIAMO PER IL CASO PIÙ SEMPLICE: CORONA CIRCOLARE

SOLUZIONE ESATTA

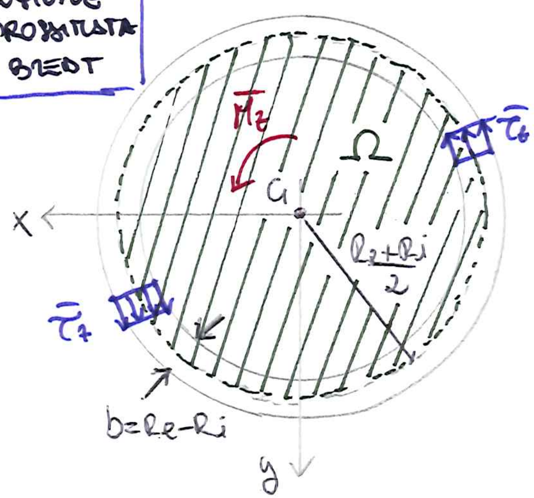


$$\tau_t = \frac{\overline{M}_t}{J_p} r$$

$$J_p = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$$

$\tau_{zs} = \overline{\tau}_{zs}$ PER $r = \frac{R_e+R_i}{2}$

SOLUZIONE APPROSSIMATA DI BREDT



$$\Omega = \pi\left(\frac{R_e+R_i}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(R_e+R_i)^2$$

$$\overline{\tau}_{zs} = \frac{\overline{M}_t}{2\Omega b}$$

$$\overline{\tau}_{zs} = \frac{\overline{M}_t}{2\left[\frac{\pi}{4}(R_e+R_i)^2\right](R_e-R_i)} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\cdot\frac{2}{(R_e+R_i)^2(R_e-R_i)}$$

$$\overline{\tau}_t = \frac{2\overline{M}_t}{\pi(R_e^4-R_i^4)}\left(\frac{R_e+R_i}{2}\right) = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\frac{(R_e+R_i)}{(R_e^4-R_i^4)}$$

$R_i = 0{,}8 R_e$ $\quad \overline{\tau}_{zs} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\frac{2}{(1+0{,}8)^2(0{,}2R_e)} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\cdot\frac{3{,}09}{R_e^3}$

SE AD ESEMPIO $R_i = 0{,}8R_e \rightarrow \overline{\tau}_t = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\frac{1{,}8R_e}{(1-0{,}8^4)R_e^4} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\frac{3{,}05}{R_e^3}$

$$\boxed{\text{ERRORE \%} = \frac{\overline{\tau}_t - \overline{\tau}_{zs}}{\overline{\tau}_t} = 1{,}3\%}$$

L'ERRORE AUMENTA GUARDANDO LE τ_{max}:

$$\tau_{t\,max} = \frac{\overline{M}_t}{J_p}R_e = \frac{2\overline{M}_t R_e}{\pi(R_e^4-R_i^4)} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\cdot\frac{2R_e}{R_e^4-R_i^4}$$

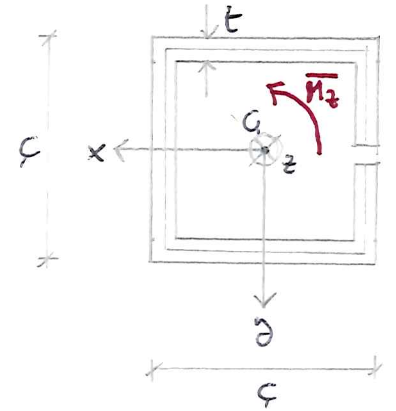
$R_i = 0{,}8R_e$ $\quad \tau_{t\,max} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\frac{2R_e}{(1-0{,}8^4)R_e^4} = \frac{\overline{M}_t}{\pi}\frac{3{,}39}{R_e^3}$

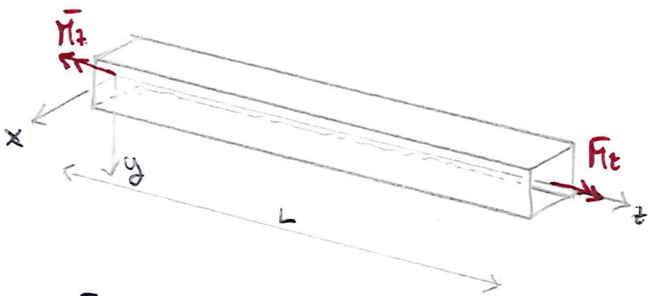
8,8 % IN PIÙ RISPETTO A BREDT!

ESEMPIO APPLICATIVO

LAVORANO MEGLIO A TORSIONE I PROFILI APERTI O I PROFILI CHIUSI?

(A) SEZIONE IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO



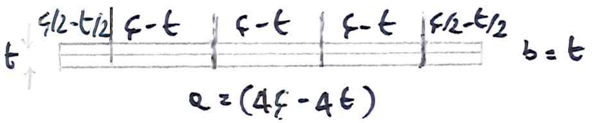


$\bar{M}_z = 500\ \text{Nm} = 500'000\ \text{Nmm}$

$L = 1\ \text{m} = 1'000\ \text{mm}$

$G = 77\ \text{GPa} = 77 \cdot 10^3\ \text{N/mm}^2$

$\varsigma = 100\ \text{mm} \qquad t = 2\ \text{mm}$



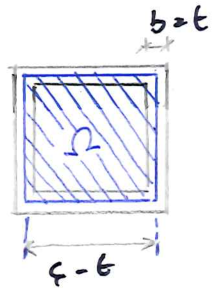
$$J_t^A = \frac{1}{3} a b^3 = \frac{1}{3} 4(\varsigma - t) t^3 = \frac{4}{3}(\varsigma - t) t^3 \qquad 1045,333\ \text{mm}^4$$

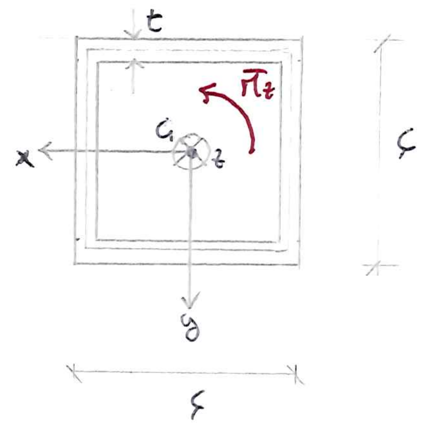
$$\tau^A_{zs\,max} = \frac{M_t}{J_t} t = \frac{\bar{M}_t}{4/3(\varsigma - t) t^3} t = \frac{3 \bar{M}_t}{4(\varsigma - t) t^2} \qquad 956,633\ \text{N/mm}^2$$

$$\Theta^A = \frac{M_t}{G J_t} = \frac{M_t}{G\, 4/3 (\varsigma - t) t^3} = \frac{3 \bar{M}_t}{4 G (\varsigma - t) t^3} \qquad 0,00621\ \text{rad/mm}$$

$$\vartheta^A = \Theta L = \frac{3 \bar{M}_t}{4 G (\varsigma - t) t^3} L \qquad 6,210\ \text{rad} \simeq 356°$$

(B) SEZIONE IN PARETE SOTTILE A PROFILO CHIUSO





$$\Omega^B = (\varsigma - t)(\varsigma - t) = (\varsigma - t)^2 \qquad 9604,000\ \text{mm}^2$$

$$\tau^B_{zs} = \frac{\bar{M}_t}{2 \Omega b} = \frac{\bar{M}_t}{2(\varsigma - t)^2 t} = \tau^B_{zs\,max} \qquad 13,015\ \text{N/mm}^2$$

$$J_t^B = \frac{4\Omega^2}{\rho} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{1}{b(s)} ds} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{1}{t} ds} = \frac{4\Omega^2}{\frac{4(\varsigma - t)}{t}} = \frac{4(\varsigma - t)^4}{4\frac{(\varsigma - t)}{t}} =$$

$$= \frac{(\varsigma - t)^3}{1/t} = (\varsigma - t)^3 t \qquad 1,882 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$$

$$\Theta^B = \frac{\bar{M}_t}{G J_t} = \frac{\bar{M}_t}{G (\varsigma - t)^3 t} \qquad 3,449 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/mm}$$

$$\vartheta^B = \Theta L = \frac{\bar{M}_t}{G(\varsigma - t)^3 t} L \qquad 0,0034\ \text{rad} \simeq 0,632°$$