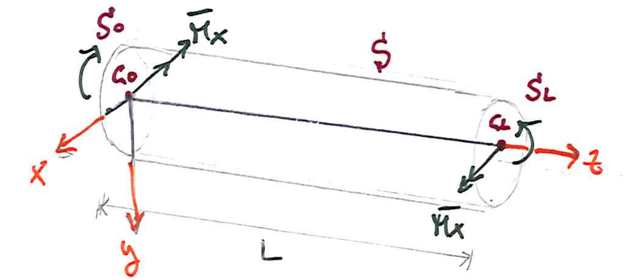
ANCHE PER IL 2° CASO INDIPENDENTE SI PUO' RICAVARE LA SOLUZIONE COMPLETA: $\boxed{\text{FLESSIONE RETTA}}$ $M_x \neq 0$ (o $M_y \neq 0$)



BISOGNA TROVARE UNA DISTRIBUZIONE DI FORZE SULLE BASI S_0 E S_L TALE CHE:

$$N=0 \quad T_x=0 \quad T_y=0 \quad \rightarrow \vec{R}=\vec{0}$$

$$M_{x(o)}=\bar{M}_x \quad M_{y(o)}=0 \quad M_{z(o)}=0 \quad \rightarrow \vec{M}=\bar{M}_x \vec{i}$$

IPOTESI: $S_0 \rightarrow p_x=0$; $p_y=0$; $p_z=-(a+bx+cy)$ $\quad \vec{M}_0=(0,0,-1)$

$S_L \rightarrow p_x=0$; $p_y=0$; $p_z=(a+bx+cy)$ $\quad \vec{M}_L=(0,0,+1)$

p_x E p_y NULLI , p_z VARIA LINEARMENTE IN x E y

CON RIFERIMENTO A S_L:

$$N=\int_A p_z dA=\int_A (a+bx+cy)dA = a\underbrace{\int_A dA}_{A} + b\underbrace{\int_A \cancel{x dA}}_{S_y=0} + c\underbrace{\int_A \cancel{y dA}}_{S_x=0} = aA$$

PER AVERE $N=0 \rightarrow a=0$

$\downarrow$

$p_z = bx+cy$

*[X E y ASSI CENTRALI DI INERZIA]

$$T_x=\int_A p_x dA = 0 \quad \text{E} \quad T_y=\int_A p_y dA=0$$

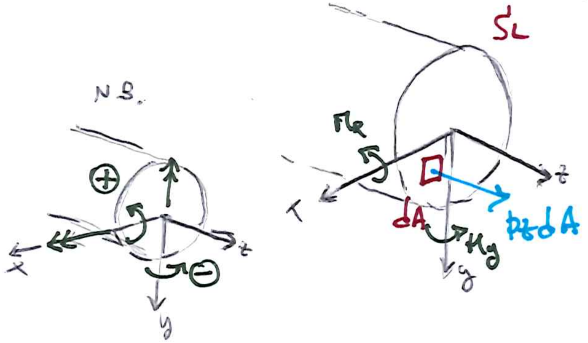
$$M_{z(o)}=\int_A -(p_x y)+(p_y x)dA = 0 \qquad p_x=p_y=0$$

$$M_{x(o)}=\int_A p_z y dA=\int_A (bx+cy)y dA = b\underbrace{\int_A \cancel{xy dA}}_{J_{xy}=0^*} + c\underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_x} = cJ_x=\bar{M}_x \rightarrow c=\frac{\bar{M}_x}{J_x}$$

$$M_{y(o)}=\int_A -p_z x dA=\int_A -(bx+cy)x dA = -b\underbrace{\int_A x^2 dA}_{J_y} - c\underbrace{\int_A \cancel{xy dA}}_{J_{xy}=0^*} = -bJ_y=0 \rightarrow b=0$$

ALLORA : $\boxed{p_z = \cancel{a}+\cancel{bx}+cy=\frac{\bar{M}_x}{J_x}y}$ $\quad p_z$ VARIA LINEARMENTE IN y

N.B.



ANALOGHE CONCLUSIONI SI RAGGIUNGONO OPERANDO SU S_0

SU S_0 $\quad p_x = 0$; $p_y = 0$; $p_z = -\frac{\bar{M}_x}{J_x} y$ $\quad \vec{m}_0 = (0,0,-1)$ $\rightarrow$ RELAZIONE DI CAUCHY $\rightarrow$ [oo]

$$\begin{cases} -\tau_{zx} = p_x = 0 \\ -\tau_{zy} = p_y = 0 \\ -\sigma_z = p_z = -\frac{\bar{M}_x}{J_x} y \end{cases} \quad \boxed{\tau_{zx} = 0 = \tau_{xz}} \quad \boxed{\tau_{zy} = 0 = \tau_{yz}} \quad \Rightarrow \sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y$$

SU S_L $\quad p_x = 0$; $p_y = 0$; $p_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y$ $\quad \vec{m}_L = (0,0,1)$

$\boxed{\text{EQUILIBRIO ESTERNO}}$

SU S $\quad \vec{m} = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$ $\quad \vec{p} = 0$

[oo]
$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = p_x = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = p_y = 0 \\ \underbrace{\cancel{\tau_{xz}}}_{\tau_{xz}=0} \alpha_x + \underbrace{\cancel{\tau_{yz}}}_{\tau_{yz}=0} \alpha_y = p_z = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} \sigma_x = 0 & \tau_{yx} = 0 \\ \sigma_y = 0 & \tau_{xy} = 0 \end{matrix}} \quad \rightarrow p_z = 0 \quad \vec{p} = 0 \text{ su } S$$

$\rightarrow$ RELAZIONE DI CAUCHY $\rightarrow$ [o•]

$$\begin{cases} \tau_{zx} = p_x = 0 \\ \tau_{zy} = p_y = 0 \\ \sigma_z = p_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y \end{cases} \quad \boxed{\tau_{zx} = 0 = \tau_{xz}} \quad \boxed{\tau_{zy} = 0 = \tau_{yz}} \quad \Rightarrow \sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y$$

ALLORA NEL CASO DELLA FLESSIONE RETTA LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI È: $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ E $\boxed{\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

VERIFICHIAMO L' $\boxed{\text{EQUILIBRIO INTERNO}}$

[o]
$$\begin{cases} \frac{\partial \cancel{\sigma_x}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{\tau_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{\tau_{zx}}}{\partial z} = 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \cancel{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{\sigma_y}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{\tau_{zy}}}{\partial z} = 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightarrow 0 + 0 + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$\left[\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y \rightarrow \sigma_z \text{ DIPENDE DA } y \rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \right]$

NOTI GLI SFORZI, È POSSIBILE RICAVARE LE DEFORMAZIONI: $\boxed{\text{LEGAME COSTITUTIVO}}$

[•] $\quad \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E J_x} y$; $\quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E J_x} y$; $\quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{E J_x} y$; $\quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = 0$; $\gamma_{xz} = 0$; $\gamma_{yz} = 0$

A PARTIRE DA UN'IPOTESI SULLA DISTRIBUZIONE DELLE FORZE : $p_x=0;\ p_y=0;\ p_z=a+bx+cy=\frac{\bar{M}_x}{J_x}y$

ABBIAMO DEDOTTO LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI : $\boxed{\sigma_z=\frac{\bar{M}_x}{J_x}y}$ E $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$

E RICAVATO CON IL LEGAME COSTITUTIVO LE DEFORMAZIONI: $\varepsilon_x=\varepsilon_y=-\frac{\nu\bar{M}_x}{EJ_x}y$; $\varepsilon_z=\frac{\bar{M}_x}{EJ_x}y$; $\gamma_{xy}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$

BISOGNA VERIFICARE CHE SIA POSSIBILE DEFINIRE UN CAMPO DI SPOSTAMENTI CONTINUO ⇝ $\boxed{\text{CONGRUENZA}}$

[*]

[1] $\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x=-\frac{\nu\bar{M}_x}{EJ_x}y$

[2] $\frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_y=-\frac{\nu\bar{M}_x}{EJ_x}y$

[3] $\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_z=\frac{\bar{M}_x}{EJ_x}y$ ⇝ PER INTEGRAZIONE $w(x,y,z)=\frac{\bar{M}_x}{EJ_x}yz+w_0(x,y)$ [3']

[IL PRIMO TERMINE NON DIPENDE DA x]

[4] $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$

[5] $\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0$ ⇝ $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x}$ ⇝ INSERENDO LA [3'] ⇝ $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$ ⇝ PER INTEGRAZIONE ⇝ $u(x,y,z)=-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}z+u_0(x,y)$ [5']

[6] $\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$ ⇝ $\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y}$ ⇝ INSERENDO LA [3'] ⇝ $\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\bar{M}_x}{EJ_x}z-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$

⇝ PER INTEGRAZIONE ⇝ $v(x,y,z)=-\frac{\bar{M}_x z^2}{2EJ_x}-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}z+v_0(x,y)$ [6']

QUESTO TERMINE DIPENDE SOLO DA x,y

INSERENDO LA [5'] NELLA [1] ⇝ $\frac{\partial u}{\partial x}=-\boxed{\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}}z+\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}=\boxed{-\frac{\nu\bar{M}_x}{EJ_x}y}$ IL TERMINE NOTO NON CONTIENE z

DEVE ESSERE = 0 CONTIENE z

⇝ PER INTEGRAZIONE ⇝ $u_0(x,y)=-\frac{\nu\bar{M}_x}{EJ_x}yx+f_1(y)$ [7]

[IL PRIMO TERMINE DELLA [6'] NON CONTIENE y] MA SOLO z, E DERIVATO RISPETTO A y SVANISCE

INSERENDO LA [6'] NELLA [2] ⇝ $$\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{\cancel{-\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} z}} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = \boxed{-\frac{\nu M_x}{E J_x} y}$$

IL TERMINE NOTO NON CONTIENE z

DEVE ESSERE = 0 CONTIENE z

⇝ PER INTEGRAZIONE ⇝ $$v_0(x,y) = -\frac{\nu M_x}{2 E J_x} y^2 + f_2(x) \quad [8]$$

ABBIAMO SODDISFATTO 5 EQUAZIONI SU 6, RIMANE LA [4], MA NOTIAMO CHE:

INSERENDO LA [7] NELLA [5'] ⇝ $$u(x,y,z) = -\frac{\nu M_x}{E J_x} y x - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + f_1(y) \quad [9]$$

INSERENDO LA [8] NELLA [6'] ⇝ $$v(x,y,z) = -\frac{\nu M_x}{2 E J_x} y^2 - \frac{\nu M_x}{2 E J_x} z^2 - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + f_2(x) \quad [10]$$

QUINDI LA [4] ⇝ $$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \overbrace{-\frac{\nu M_x}{E J_x} x - \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y \partial x} z + \underbrace{\frac{d f_1(y)}{dy}}_{\text{DERIVATA TOTALE FUNZIONE IN } y}}^{[9]} \overbrace{- \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z + \underbrace{\frac{d f_2(x)}{dx}}_{\text{DERIVATA TOTALE FUNZIONE IN } x}}^{[10]} = 0$$

N.B. $$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y \partial x}$$

LA SOMMA DEI 5 TERMINI DEVE ESSERE = 0 ⇝ $$-\frac{\nu M_x}{E J_x} x - \boxed{\cancel{2 \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z}} + \frac{d f_1(y)}{dy} + \frac{d f_2(x)}{dx} = 0$$

DEVE ESSERE = 0 [È L'UNICO TERMINE CHE CONTIENE z!]

SEPARANDO LE VARIABILI DEI TERMINI RIMANENTI: $$\underbrace{-\frac{\nu M_x}{E J_x} x + \frac{d f_2(x)}{dx} = -\frac{d f_1(y)}{dy}}_{= \alpha = \text{COSTANTE}} \quad [11]$$

AFFINCHÉ 2 FUNZIONI DIPENDENTI DA 2 VARIABILI DIVERSE (x E y) SIANO UGUALI DEVONO ESSERE COSTANTI

RICAPITOLANDO:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}\right\}$$

w_0 DIPENDE DA x E y $\boxed{w_0(x,y)}$ E NON DA z ⇝ TUTTE LE SUE DERIVATE SECONDE SONO = 0 IN X E Y

ALLORA w_0 HA LA FORMA DI UN POLINOMIO COMPLETO: $\boxed{w_0(x,y) = a + bx + cy}$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = b \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad E \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = c \rightarrow \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \;;\; \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\alpha \leadsto f_1(y) = -\alpha y + d \quad [12]$$ [FORMA GENERALE DI $f_1(y)$]

$$\frac{df_2(x)}{dx} - \frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x = \alpha \leadsto \frac{df_2(x)}{dx} = \alpha + \frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x \leadsto f_2(x) = \alpha x + \frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x}\frac{x^2}{2} + e \quad [13]$$ [FORMA GENERALE DI $f_2(x)$]

QUINDI LE ESPRESSIONI COMPLETE DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO SONO:

$$[14] \quad u(x,y,z) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} xy \underbrace{- bz - \alpha y + d}_{u_1(y,z)} \leadsto u(x,y,z) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} xy + u_1(y,z)^* \quad [14']$$

$$[15] \quad v(x,y,z) = \frac{\bar{M}_x}{2EJ_x}(-z^2 - \nu y^2 + \nu x^2) \underbrace{- cz + \alpha x + e}_{v_1(x,z)} \leadsto v(x,y,z) = -\frac{\bar{M}_x}{2EJ_x}\left[z^2 + \nu(y^2 - x^2)\right] + v_1(x,z)^* \quad [15']$$

$$[16] \quad w(x,y,z) = \frac{\bar{M}_x}{EJ_x} yz + \underbrace{a + bx + cy}_{w_0(x,y)} \leadsto w(x,y,z) = \frac{\bar{M}_x}{EJ_x} yz + w_0(x,y)^* \quad [16']$$

* u_1, v_1, w_0 DANNO LUOGO SOLO A 1 $\boxed{\text{MOTO RIGIDO}}$: $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$

E $\gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\alpha + \alpha = 0$; $\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = -b + b = 0$; $\gamma_{yz} = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = -c + c = 0$

[u_1, v_1, w_1 POSSONO ESSERE TRASCURATI → CORPO IN EQUILIBRIO
MOTI RIGIDI ANNULLATI DAI VINCOLI]

FLESSIONE RETTA

SOLUZIONE DEL PROBLEMA:

STATO DI SFORZO

$$\sigma_x = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$
$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{xz} = 0$$
$$\sigma_z = \frac{\overline{M}_x}{J_x} y \qquad \tau_{yz} = 0$$

DEFORMAZIONI

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu \overline{M}_x}{E J_x} y \qquad \gamma_{xy} = 0$$
$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \overline{M}_x}{E J_x} y \qquad \gamma_{xz} = 0$$
$$\varepsilon_z = \frac{\overline{M}_x}{E J_x} y \qquad \gamma_{yz} = 0$$

SPOSTAMENTI

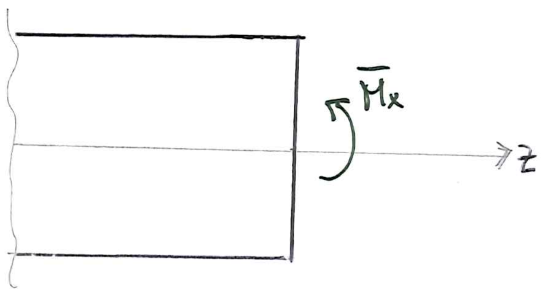
$$u = -\frac{\nu \overline{M}_x}{E J_x} x y$$
$$v = -\frac{\overline{M}_x}{2 E J_x}\left[z^2 + \nu (y^2 - x^2)\right]$$
$$w = \frac{\overline{M}_x}{E J_x} y z$$

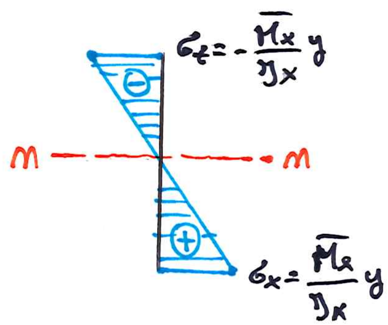
LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI (σ_z) È A 'FARFALLA' - OVVERO VARIA LINEARMENTE CON y E HA VALORI MASSIMI ALLA MASSIMA DISTANZA DALL' ASSE NEUTRO → LUOGO GEOMETRICO INDIVIDUATO DA $\sigma_z = 0$

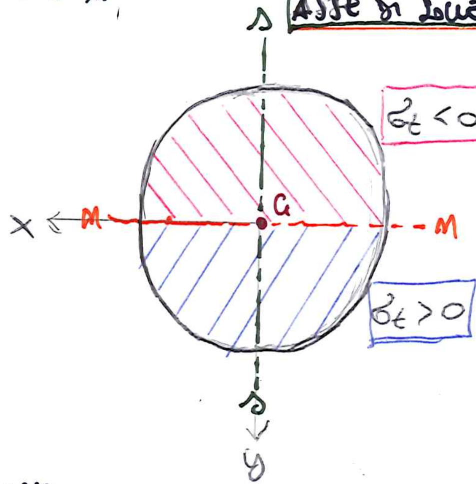
N.B. $\sigma_z = \frac{\overline{M}_x}{J_x} y$ ALLORA $\sigma_z = 0$ PER $y = 0$ → L'ASSE NEUTRO, NEL CASO DELLA FLESSIONE RETTA, COINCIDE CON L'ASSE DEL VETTORE MOMENTO, ASSE X,

ASSE DI SOLLECITAZIONE $\perp$ ASSE NEUTRO

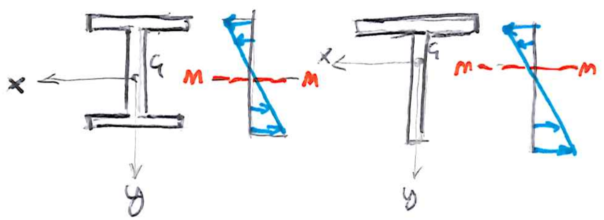
$ss \perp mm$



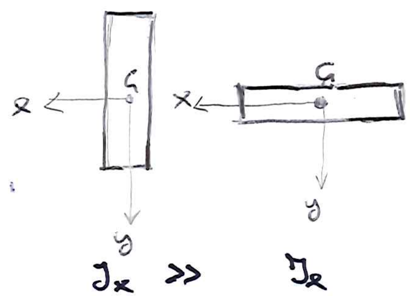




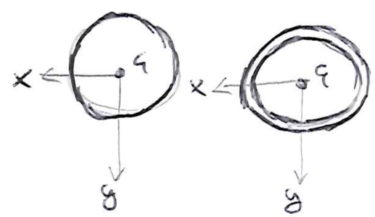
N.B. I PUNTI PIÙ SOLLECITATI SONO AI LEMBI PIÙ DISTANTI DALL'ASSE NEUTRO:



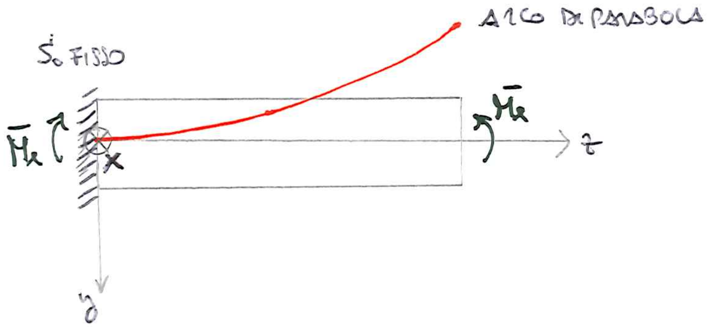
PER UN FUNZIONAMENTO OTTIMALE DELLA SEZIONE OCCORRE DISPORRE PIÙ MATERIALE DOVE LE σ_z SONO MAGGIORI



MEGLIO TRAVI DISPOSTE A COLTELLO CHE IN SPESSORE



PIÙ CONVENIENTE UTILIZZARE PROFILI TUBOLARI



I PUNTI COLLOCATI SULL'ASSE z HANNO COORDINATE (0, 0, z) E SUBISCONO QUESTI SPOSTAMENTI:

$u = 0$ NON SI SPOSTANO IN DIREZIONE x

* $\boxed{v = -\dfrac{\bar{M}_x}{2EJ_x} z^2}$ → SPOSTAMENTI SOLO IN DIREZIONE y

$w = 0$ NON SI SPOSTANO IN DIREZIONE z

→ L'ASSE BARICENTRICO DELLA TRAVE, ASSE z, PER EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE, SI CURVA SENZA ALLUNGARSI ($w=0$) E RIMANE NEL PIANO y-z ($u=0$)

IL PIANO yz → PIANO DI FLESSIONE

A DEFORMAZIONE AVVENUTA, L'ASSE z SI ATTEGGIA SECONDO UNA CURVA PARABOLICA* CON RAGGIO DI CURVATURA R, TALE CHE:

A DEFORMAZIONE AVVENUTA LE COORDINATE SONO:

$\xi = x + u \rightarrow \xi = 0$

$\eta = y + v \rightarrow \eta = -\dfrac{\bar{M}_x}{2EJ_x} z^2$

$\zeta = z + w \rightarrow \zeta = z$

EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA PARABOLA

CURVATURA (INVERSO DI R)

$$\frac{1}{R} = \frac{\dfrac{d^2\eta}{d\zeta^2}}{\left[1+\left(\dfrac{d\eta}{d\zeta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

PER PICCOLI SPOSTAMENTI $\dfrac{d\eta}{d\zeta} \ll 1$ SI PUÒ TRASCURARE

$= \dfrac{d^2 v}{dz^2}$

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{d^2\eta}{d\zeta^2} \qquad \zeta = z \ (w=0) \qquad \frac{1}{R} = \frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{\bar{M}_x}{EJ_x}$$

RIGIDEZZA FLESSIONALE

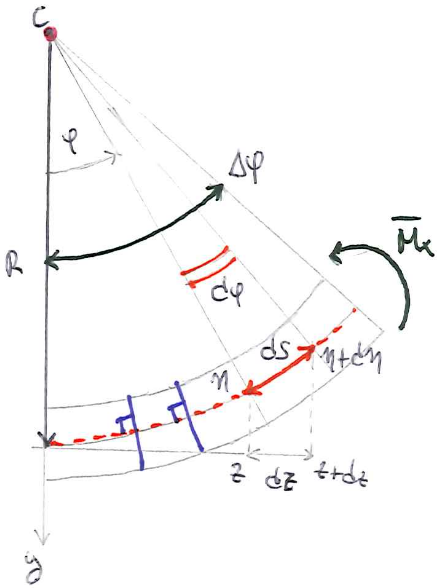
$$\frac{1}{R} = -\frac{\bar{M}_x}{EJ_x} \qquad R = \text{COSTANTE}$$

L'UNICA CURVA IL CUI RAGGIO DI CURVATURA È COSTANTE È LA CIRCONFERENZA ⇒ NELL'IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI → CURVATURA DELL'ASSE BARICENTRICO PUÒ ESSERE CONSIDERATA COME UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO $R = \dfrac{EJ_x}{\bar{M}_x}$

CURVATURA $\dfrac{1}{R}$:
- DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A $\bar{M}_x$
- INVERSAMENTE PROPORZIONALE A EJ_x

[UNISCE UNA CARATTERISTICA DEL MATERIALE, E = MODULO DI YOUNG E UNA DELLA GEOMETRIA, J_x = MODULO DI INERZIA DELLA SEZIONE RISPETTO A x]

[N.B. $\dfrac{\partial \eta}{\partial \zeta} = -\dfrac{\bar{M}_x}{2EJ_x} 2z \qquad \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} = -\dfrac{\bar{M}_x}{EJ_x}$]



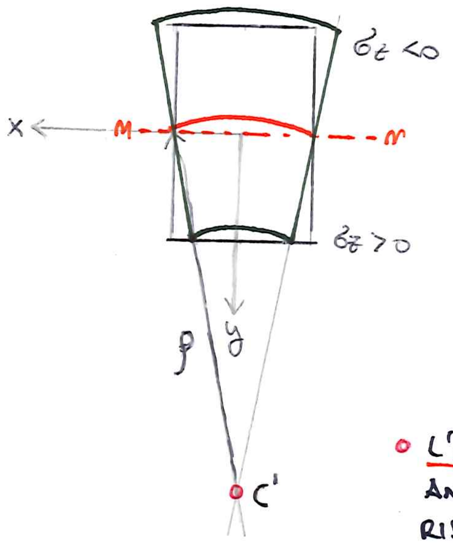
- **w = 0** A DEFORMAZIONE AVVENUTA L'ASSE DELLA TRAVE NON SUBISCE ALLUNGAMENTI / SPOSTAMENTI

$$ds = \sqrt{dz^2 + d\eta^2} = dz\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2} \simeq dz \qquad \text{POICHÉ ANCORA } \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \ll 1$$

- I PUNTI CHE APPARTENGONO A UNA SEZIONE RETTA PERPENDICOLARE A z HANNO EQUAZIONE $z = \varsigma$
LA COORDINATA ζ A DEFORMAZIONE AVVENUTA DIVENTA: $\zeta = z + w = \varsigma + \frac{\bar M_x}{EJ_x} y \varsigma =$
$= \varsigma\left(1 + \frac{\bar M_x}{EJ_x} y\right) = \varsigma\left(1 - \frac{y}{R}\right)$ ALLORA $\zeta = \varsigma\left(1 - \frac{y}{R}\right)$ È L'EQUAZIONE DI UN PIANO PERPENDICOLARE ALL'ASSE DELLA TRAVE A DEFORMAZIONE AVVENUTA
QUINDI LE SEZIONI DELLA TRAVE SI MANTENGONO PIANE E RUOTANO MANTENENDOSI PERPENDICOLARI ALL'ASSE DEFORMATO → È CONFERMATA L'IPOTESI DI EULERO-BERNOULLI CHE VA SOTTO IL NOME DI "CONSERVAZIONE DELLE SEZIONI PIANE"

- TUTTE LE SEZIONI RUOTANO DELLO STESSO ANGOLO $d\varphi$ (2 SEZIONI POSTE A DISTANZA ds)

$$R\,d\varphi = ds \simeq dz \rightsquigarrow d\varphi = \frac{dz}{R} = \frac{1}{R}dz \rightsquigarrow \boxed{d\varphi = \frac{\bar M_x}{EJ_x}dz}$$



- L'ANGOLO COMPLESSIVO $\Delta\varphi$ DI CUI RUOTANO LE SEZIONI ESTREME DELLA TRAVE VALE:

$$\Delta\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L \frac{\bar M_x}{EJ_x}dz = \frac{\bar M_x}{EJ_x}\int_0^L dz = \frac{\bar M_x}{EJ_x}[z]_0^L \rightsquigarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{\bar M_x}{EJ_x}L}$$

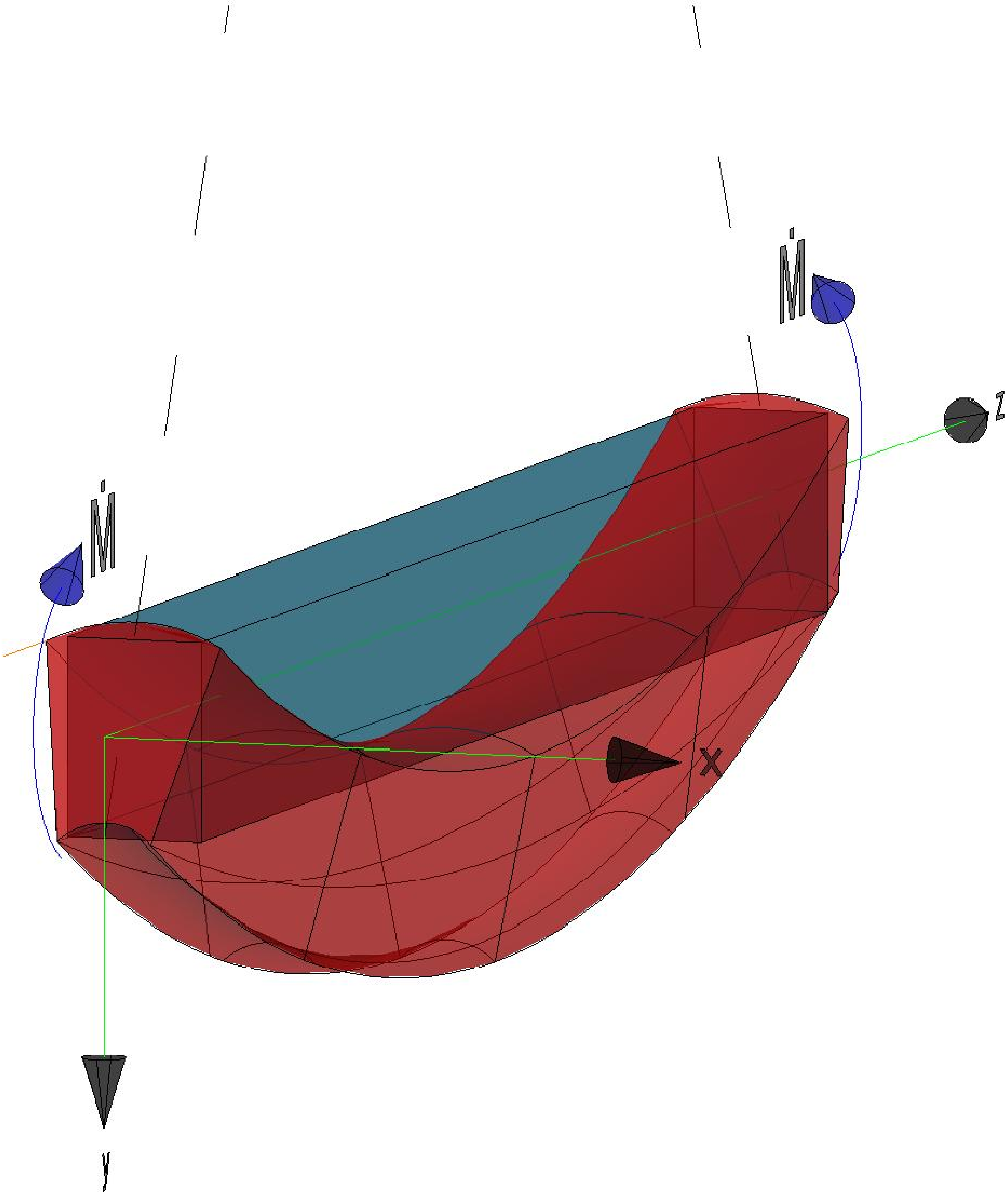
- IL LAVORO DI DEFORMAZIONE ESTERNO = AL LAVORO DI DEFORMAZIONE INTERNO

$$L_e = \frac{1}{2}\bar M_x \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2}\frac{M_x^2}{EJ_x}L \qquad L_i = \frac{1}{2}\int_V \sigma_z \varepsilon_z\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L dz \int_A \sigma_z \varepsilon_z\, dA = \frac{1}{2}\frac{\bar M_x^2}{EJ_x}L$$

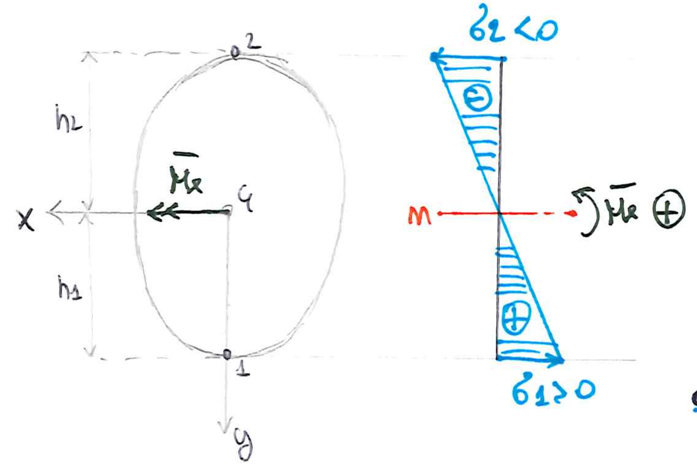
- L'ASSE NEUTRO A DEFORMAZIONE AVVENUTA SI INCURVA, DISPONENDOSI A SUA VOLTA SECONDO UNA PARABOLA ANCORA APPROSSIMABILE CON UN ARCO DI CIRCONFERENZA E CENTRO DI CURVATURA C' IN DIREZIONE OPPOSTA RISPETTO ALL'ASSE DEFORMATO DELLA TRAVE $(0 \le \nu \le 1/2)$ $\gamma_{xy} = 0$ → L'ASSE NEUTRO NON PUÒ RIMANERE DRITTO!

L'EQUAZIONE DELL'ASSE NEUTRO È $y = 0$ LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO VALGONO:

$u = 0$; $v = \frac{\nu \bar M_x}{2EJ_x}x^2$; $w = 0$ $[x = z = 0]$ LA CURVATURA DELL'ASSE NEUTRO DIPENDE DA ν → $\frac{1}{\rho} = -\nu\frac{1}{R}$


Ṁ
Ṁ
z
x
y

VERIFICHE DI SICUREZZA:



$\sigma_2 = \sigma_z\big|_{y=-h_2} = -\dfrac{\overline{M}_x}{J_x} h_2 \qquad \sigma_2 < 0 \longleftrightarrow \overline{M}_x > 0$

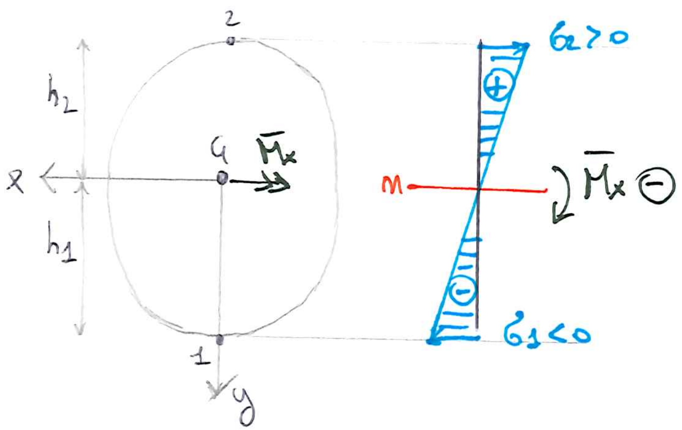
h_1, h_2 DISTANTE DALL'ASSE NEUTRO PRESE IN VALORE ASSOLUTO

$\sigma_1 = \sigma_z\big|_{y=h_1} = +\dfrac{\overline{M}_x}{J_x} h_1 \qquad \sigma_1 > 0 \longleftrightarrow \overline{M}_x > 0$

DEFINIAMO: $W_{x1} = \dfrac{J_x}{h_1}$ E $W_{x2} = \dfrac{J_x}{h_2}$ MODULI DI RESISTENZA A FLESSIONE

ALLORA $\sigma_1 = \dfrac{\overline{M}_x}{W_{x1}}$ E $\sigma_2 = -\dfrac{\overline{M}_x}{W_{x2}}$ PER LA VERIFICA: $\sigma_1 = \dfrac{\overline{M}_x}{W_{x1}} \leq k'$ E $\sigma_2 = -\dfrac{\overline{M}_x}{W_{x2}} \geq -k''$ K = TENSIONE AMMISSIBILE

N.B. SE $\overline{M}_x < 0$ L'ANDAMENTO DEGLI SFORZI È OPPOSTO:



$\sigma_2 = \sigma_z\big|_{y=-h_2} = -\dfrac{\overline{M}_x}{W_{x2}} > 0$ $M_x<0$ $\qquad \sigma_2 > 0 \longleftrightarrow M_x < 0$

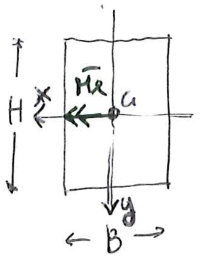
[N.B. W_{x1} E W_{x2} SEMPRE >0 PER DEFINIZIONE]

$\sigma_1 = \sigma_z\big|_{y=h_1} = \dfrac{\overline{M}_x}{W_{x1}} < 0$ $M_x<0$ $\qquad \sigma_2 < 0 \longleftrightarrow M_x < 0$

PER LA VERIFICA: $\sigma_1 \geq -k''$ E $\sigma_2 \leq k'$

ESEMPIO APPLICATIVO :

Data la sezione di legno di forma rettangolare:



$\bar{M}_x = 18500$ Nm $K = 6$ MPa

Nella fibra più sollecitata dovremo avere che:

$$\sigma_1 = \frac{\bar{M}_x}{W_{x1}} \le K$$

$$\sigma_2 = -\frac{\bar{M}_x}{W_{x2}} \ge -K$$

Sez. doppiamente simmetrica, quindi $W_{x1} = W_{x2}$, pari a $\frac{J_x}{H/2} = \frac{1/12\, BH^3}{H/2} = \frac{1}{6} BH^2$

Quindi: $W_{x1} \ge \frac{\bar{M}_x}{K}$ è indeterminato (posso avere soluzioni ∞ W_{x1}...) allora si impone, ad esempio, il rapporto $B/H = 7/10$

allora: $W_{x1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10} H \cdot H^2 = \frac{7}{60} H^3$

e quindi $W_{x1} \ge \frac{\bar{M}_x}{K} \to \frac{7}{60} H^3 \ge \frac{18\,500\,000\ \cancel{N}\,mm}{6\ \cancel{N}/mm^2} =$

$= \frac{18\,500\,000}{6}\ mm^3$ → N.B. $W = [L]^3$.

$$H^3 \ge \frac{\cancel{60}^{10}}{7} \cdot \frac{18\,500\,000}{\cancel{6}} = \frac{185\,000\,000}{7} = 26'428'571\ mm^3$$

$$H \ge \sqrt[3]{26'428'571} = 297,868\ mm \cong 300\ mm$$

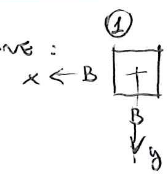
Quindi $B = \frac{7}{10} H = 210$ mm

N.B.

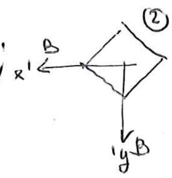
Se fosse in acciaio: → dal profilario si sceglie W_x

DOMANDA? Perché se si ha sezione quadrata la si dispone □ e non così ◇ ?

A parità di sezione:

① 

$J_x = \frac{B^4}{12}$ e $J_y = \frac{B^4}{12}$;

② 

$J_x' = \frac{B^4}{12}$ e $J_y' = \frac{B^4}{12}$

Cosa cambia allora? La resistenza a flessione è data da W_x: ① $W_x = \frac{J_x}{B/2} = \frac{1/12\, B^4}{B/2} = \frac{B^3}{6}$

invece in ② h_1 non è + = a $B/2$ ma a $B/2\sqrt{2}$, quindi: ② $W_x = \frac{J_x}{B/2\sqrt{2}} = \frac{1/12\, B^4}{\sqrt{2}B/2} = \frac{B^3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} B^3$

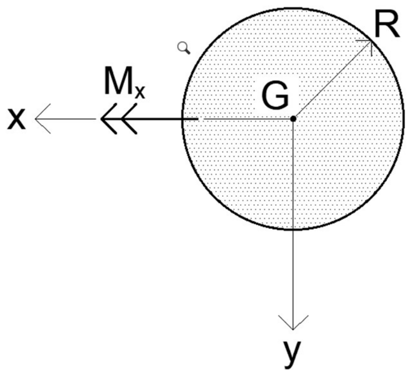
Quindi $W_{x1}^{②} = W_{x1}^{①} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, e cioè $W_{x1}^{②} < W_{x1}^{①}$, cioè nel caso ② la sezione è sfruttata peggio rispetto al caso ① (tanto materiale vicino all'asse neutro, poco dove σ_z è maggiore)

N.B. motivo per cui si mettono le travi  e non 

ESERCIZIO

Considerata una trave di lunghezza *L* sollecitata da un momento flettente M_x (sollecitata solo a flessione retta), determinare la percentuale di materiale che si risparmierebbe utilizzando una sezione circolare cava invece che una sezione circolare piena, a parità di Modulo di Resistenza W_x

1) SEZIONE CIRCOLARE PIENA

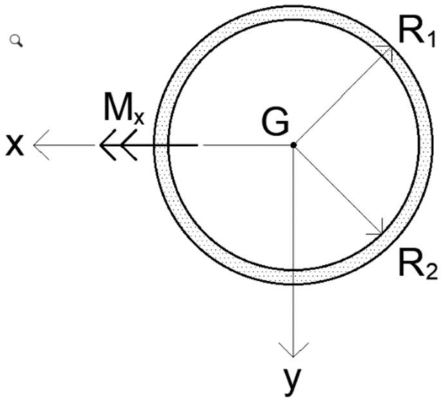


$$A_1 = \pi R^2$$

$$J_{x1} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$W_{x1} = \frac{\pi R^3}{4}$$

2) SEZIONE CIRCOLARE CAVA



$$\frac{R_2}{R_1} = 0.9$$

$$A_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2$$

$$J_{x2} = \frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4}$$

$$W_{x2} = \left(\frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4}\right)\frac{1}{R_1}$$

Imponendo $W_{x1} = W_{x2}$ si può determinare quanto deve valere *R* in funzione di R_1:

$$W_{x1} = W_{x2}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \left(\frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4}\right)\frac{1}{R_1}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4R_1}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} - \frac{\pi (0.9R_1)^4}{4R_1}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} - \frac{\pi 0.656 R_1^3}{4}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4}(1 - 0.656)$$

$$R^3 = R_1^3(1 - 0.656)$$

$$R^3 = 0.344 R_1^3$$

$$R = \sqrt[3]{0.344R_1^3} \cong 0.7R_1$$

Quindi, per avere lo stesso Modulo di Resistenza W_x, il raggio della sezione circolare piena, *R*, deve essere pari a 0,7 volte il raggio esterno della sezione circolare cava, R_1.

L'area dei due profili vale:

$$A_1 = \pi R^2 = \pi(0.7R_1)^2 = \pi 0.49R_1^2$$

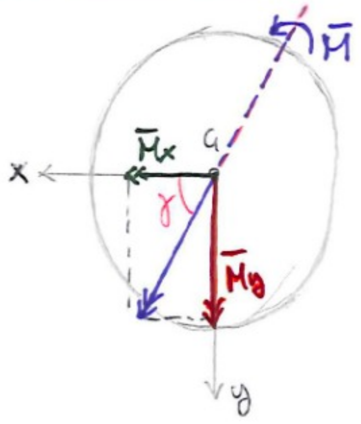
$$A_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi R_1^2 - \pi(0.9R_1)^2 = \pi R_1^2 - \pi 0.81R_1^2 = \pi R_1^2(1 - 0.81) = \pi 0.19R_1^2$$

La percentuale di materiale risparmiato è data dalla differenza delle aree divisa per l'area della sezione piena:

$$\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1}\right)100\% = \left(\frac{\pi 0.49R_1^2 - \pi 0.19R_1^2}{\pi 0.49R_1^2}\right)100\% = (1 - 0.387)100\% \cong 61\%$$

Pertanto, a parità di Modulo di Resistenza W_x, utilizzando una sezione circolare cava (con $R_2/R_1 = 0.9$) al posto di una piena (con $R \cong 0.7R_1$) si **risparmia il 61% di materiale**.

FLESSIONE DEVIATA



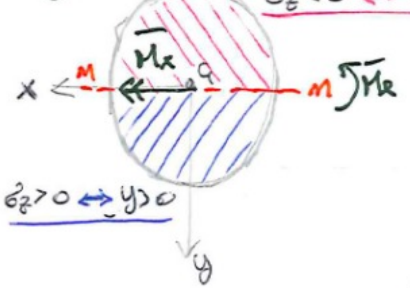
$\bar M$ NON È ORIENTATO SECONDO GLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

$\bar M$ PUÒ ESSERE COMUNQUE SCOMPOSTO NELLE COMPONENTI M_x E M_y: $\bar M_x = \bar M \cos\gamma$ $\quad \bar M_y = \bar M \,\text{sen}\,\gamma$

LO STUDIO PUÒ ESSERE CONDOTTO ALLA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE FLESSIONI RETTE:

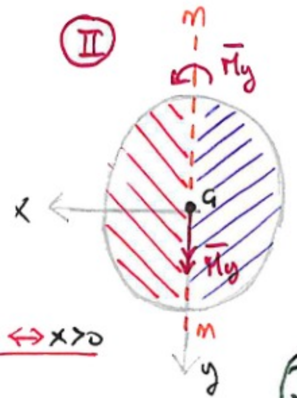
I

$\sigma_z < 0 \leftrightarrow y < 0$



$\sigma_z > 0 \leftrightarrow y > 0$

II



$\sigma_z > 0 \leftrightarrow x < 0$

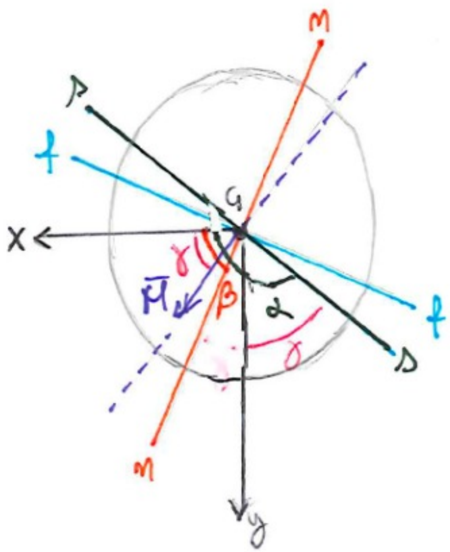
$\sigma_z < 0 \leftrightarrow x > 0$

I $\quad \boxed{\sigma_z = \dfrac{\bar M_x}{J_x} y = \dfrac{\bar M \cos\gamma}{J_x} y}$

II $\quad \boxed{\sigma_z = -\dfrac{\bar M_y}{J_y} x = -\dfrac{\bar M \,\text{sen}\,\gamma}{J_y} x}$

I + II $\quad \boxed{\sigma_z = \dfrac{\bar M \cos\gamma}{J_x} y - \dfrac{\bar M \,\text{sen}\,\gamma}{J_y} x}$

[N.B. CI VUOLE UN − PRIMA DI M_y]



L'ASSE NEUTRO – LUOGO DEI PUNTI IN CUI $\sigma_z = 0$ – È UN ASSE BARICENTRICO → EQUAZIONE SODDISFATTA PER $x = 0$ E $y = 0$

$$\sigma_z = \bar M\left(\frac{y\cos\gamma}{J_x} - \frac{x\,\text{sen}\,\gamma}{J_y}\right) = 0 \qquad \frac{y\cos\gamma}{J_x} - \frac{x\,\text{sen}\,\gamma}{J_y} = 0 \qquad y = \frac{J_x}{J_y}\underbrace{\frac{\text{sen}\,\gamma}{\cos\gamma}}\, x = \frac{J_x}{J_y}\,\text{tg}\,\gamma\, x$$

$\boxed{y = \dfrac{J_x}{J_y}\,\text{tg}\,\gamma\, x}$ È L'EQUAZIONE DI UNA RETTA CHE PASSA PER IL BARICENTRO CON UNA CERTA INCLINAZIONE:

SE $J_x/J_y \neq 1 \rightarrow y = \text{tg}\,\beta\, x$ CON $\beta \neq \gamma \rightarrow \text{tg}\,\beta = \dfrac{J_x}{J_y}\,\text{tg}\,\gamma$ $\quad$ SE $J_x > J_y \rightarrow \beta > \gamma$ E VICEVERSA

> L'ASSE NEUTRO NON È INCLINATO COME L'ASSE DEL MOMENTO MA È RUOTATO DI UN ANGOLO β RISPETTO A X

$J_x = A\rho_x^2$ E $J_y = A\rho_y^2$ CON ρ_x, ρ_y RAGGI GIRATORI DI INERZIA $\quad \text{tg}\,\beta = (\rho_x^2/\rho_y^2)\,\text{tg}\,\gamma$ [∘]

> SE INDIVIDUIAMO L'ASSE DI SOLLECITAZIONE, CHE È ORTOGONALE ALL'ASSE DEL MOMENTO, LA [∘] DIVENTA:

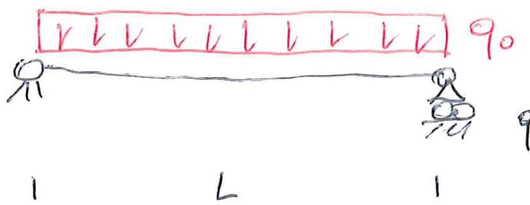
$\alpha = \gamma + \pi/2 \rightarrow \gamma = \alpha - \pi/2 \rightarrow \text{tg}\,\gamma = -\text{cotg}\,\alpha = -1/\text{tg}\,\alpha \rightarrow \text{tg}\,\beta = -(\rho_x^2/\rho_y^2)/\text{tg}\,\alpha \rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta = -\rho_x^2/\rho_y^2}$ RELAZIONE DI CONIUGIO

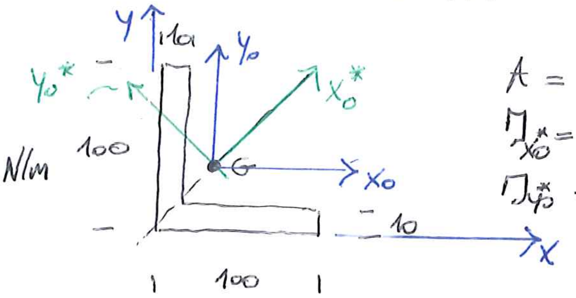
FLESSIONE DEVIATA: ASSE NEUTRO E ASSE DI SOLLECITAZIONE NON SONO PERPENDICOLARI

LA SEZIONE SI INFLETTE NEL PIANO DI FLESSIONE, ORTOGONALE ALL'ASSE NEUTRO

FLESSIONE DEVIATA

SI CONSIDERA UNA TRAVE APPOGGIATA DI LUCE $L = 3m$ SOGGETTA A PESO PROPRIO E REALIZZATA CON UNA SEZIONE A "L" A LATI EGUALI.





$A = 19.2\,cm^2$

$J_{x_0^*} = 284\,cm^4 = 2840000\,mm^4$

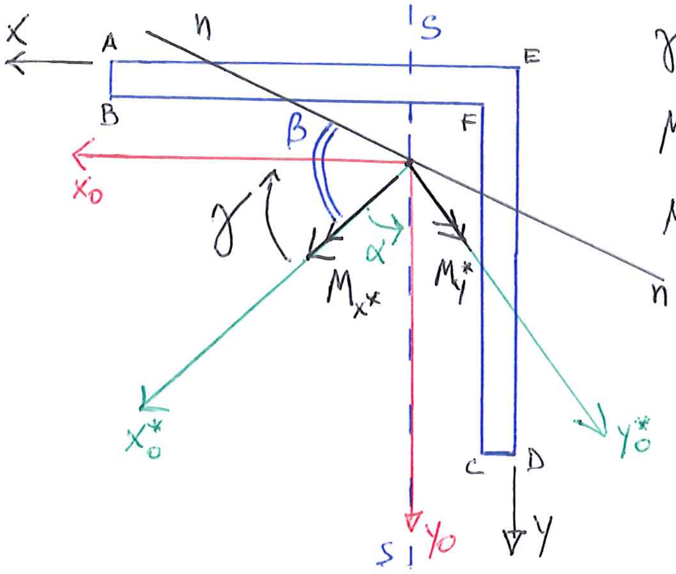
$J_{y_0^*} = 74.1\,cm^4 = 741000\,mm^4$

$G = (2.83, 2.83)$

IL MOMENTO FLETTENTE MASSIMO VALE:

$$\bar{M}_x = \frac{q_0 L^2}{8} = \frac{151 \cdot 3^2}{8} = \frac{1359}{8} = 169.875\ N.m. = 169875\ N.mm$$

SI È IN CONDIZIONI DI FLESSIONE DEVIATA PERCHÉ L'ASSE DEL VETTORE MOMENTO (x) NON COINCIDE CON UN ASSE PRINCIPALE DI INERZIA.



$$\gamma = -\frac{\pi}{4} = -45° \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_{x_0^*} = \bar{M}_x \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{M}_x$$

$$M_{y_0^*} = \bar{M}_x \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \bar{M}_x \sin\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{M}_x$$

$$\sigma_z = \frac{M_{x_0^*}}{J_{x_0^*}} y^* - \frac{M_{y_0^*}}{J_{y_0^*}} x^*$$

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\bar{M}_x}{J_{x_0^*}} y^* + \frac{\bar{M}_x}{J_{y_0^*}} x^*\right)$$

SI VERIFICA CHE $\sigma_z = 0$ DEFINISCE LA POSIZIONE DELL'ASSE NEUTRO:

$$\sigma_z = 0 \iff \frac{y^*}{J_{x_0^*}} + \frac{x^*}{J_{y_0^*}} = 0 \qquad y^* = -\frac{J_{x_0^*}}{J_{y_0^*}} x^*$$

MA $y^* = \tan\beta\, x^*$, $\quad \tan\beta = -\dfrac{J_{x_0^*}}{J_{y_0^*}}$

$$\beta = \arctan\left(-\frac{284}{74.1}\right) = \arctan(-3.833) \qquad \beta = -75°.377$$

D'ALTRA PARTE $\alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma = \frac{\pi}{4}$ PER CUI $\tan\alpha = 1$.

NE SEGUE LA RELAZIONE DI CONIUGIO $\tan\alpha \cdot \tan\beta = -\dfrac{\rho_{x_0^*}}{\rho_{y_0^*}} = \dfrac{-A\rho_{x_0^*}}{A\rho_{y_0^*}} = -\dfrac{J_{x_0^*}}{J_{y_0^*}}$

E SI VEDE CHE ASSE NEUTRO (n-n) E DI SOLLECITAZIONE

CS-SI NON SONO ORTOGONALI
RESTA DA CALCOLARE IL VALORE DELLO SFORZO σ_z NEI PUNTI SIGNIFICATIVI.

QUESTI NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y HANNO LE SEGUENTI COORDINATE (IN mm):

$A = (100, 0)$ $D = (0, 100)$

$B = (100, 10)$ $E = (0, 0) \equiv O$

$C = (10, 100)$ $F = (10, 10)$

SI OSSERVA CHE PER PASSARE DAL SISTEMA DI COORDINATE (BARICENTRICHE) x_0, y_0 ALLE CORRISPONDENTI COORDINATE NEL SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA x_0^*, y_0^* SI FA USO DELLA TRASFORMAZIONE

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 \cos\vartheta + y_0 \sin\vartheta \\ y_0^* = -x_0 \sin\vartheta + y_0 \cos\vartheta \end{cases} \quad [*]$$

DOVE $\vartheta = \widehat{x_0 x_0^*} = -\gamma$.

D'ALTRA PARTE IL LEGAME FRA I SISTEMI DI RIFERIMENTO x, y E x_0, y_0 È DATO DA:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_G \\ y = y_0 + y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x - x_G \\ y_0 = y - y_G \end{cases} \quad [**]$$

TENENDO CONTO DELLE [**] LE [*] DIVENGONO:

$$\begin{cases} x_0^* = (x - x_G)\cos\vartheta + (y - y_G)\sin\vartheta \\ y_0^* = -(x - x_G)\sin\vartheta + (y - y_G)\cos\vartheta \end{cases}$$

SI TROVA PERTANTO CHE NEL SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA x_0^*, y_0^* LE COORDINATE DEI PUNTI INDICATI E I CORRISPONDENTI VALORI DI σ_z SONO I SEGUENTI (COORDINATE ESPRESSE IN mm, SFORZI IN N/mm^2 = MPa)

$A = (30{,}69, -70.71)$ $\sigma_z|_A = 1{,}984$ MPa

$B = (37.76, -63.64)$ $\sigma_z|_B = 3.429$ MPa

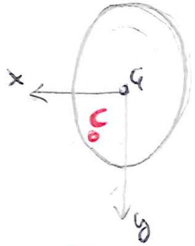
$C = (37.76, +63.64)$ $\sigma_z|_C = 8{,}813$ MPa $= \sigma_{z\,max}$

$D = (30{,}69, +70.71)$ $\sigma_z|_D = 7.966$ MPa

$E = (-40{,}02, 0.00)$ $\sigma_z|_E = -6.488$ MPa $= \sigma_{z\,min}$

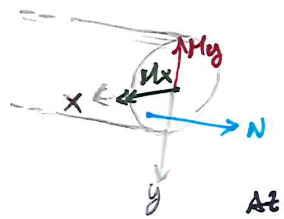
$F = (-25{,}88, 0{,}00)$ $\sigma_z|_F = -4.195$ MPa

L'AZIONE ASSIALE NON È APPLICATA NEL BARICENTRO



C = CENTRO DI PRESSIONE $C=(x_c, y_c)$

LA POSIZIONE ECCENTRICA DETERMINA L'INSORGERE DI MOMENTO:

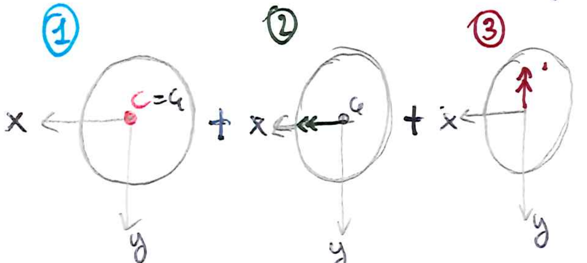


SE $N>0$ TRAZIONE → TENSO-FLESSIONE

SE $N<0$ COMPRESSIONE → PRESSO-FLESSIONE

AZIONE ASSIALE + 2 FLESSIONI RETTE

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:



1 AZIONE ASSIALE CENTRATA

2 MOMENTO DI TRASPORTO $M_x = N y_c$

3 MOMENTO DI TRASPORTO $M_y = N x_c$

1 $\sigma_z = N/A$

2 $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{N y_c}{J_x} y$

3 $\sigma_z = -\frac{M_y}{J_y} x = +\frac{N x_c}{J_y} x$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N y_c}{J_x} y + \frac{N x_c}{J_y} x}$$

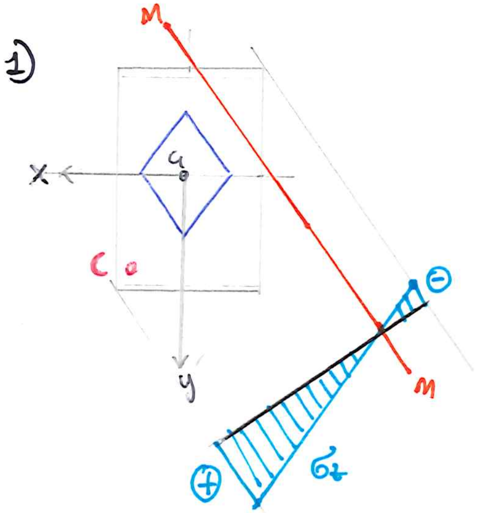
CONSIDERANDO CHE $J_x = A\rho_x^2$ E $J_y = A\rho_y^2$ → $\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_c y}{\rho_x^2} + \frac{x_c x}{\rho_y^2}\right)}$ NEL BARICENTRO σ_z È ESATTAMENTE QUELLA CHE SI AVREBBE SE L'AZIONE ASSIALE N FOSSE CENTRATA, MA L'ASSE NEUTRO ($\sigma_z = 0$) NON È PIÙ BARICENTRICO

$$\sigma_z = 0 \qquad \underbrace{1 + \frac{y_c y}{\rho_x^2} + \frac{x_c x}{\rho_y^2}}_{\text{RELAZIONE DI ANTIPOLARITÀ TRA ASSE NEUTRO E CENTRO DI PRESSIONE C}} \neq 0$$

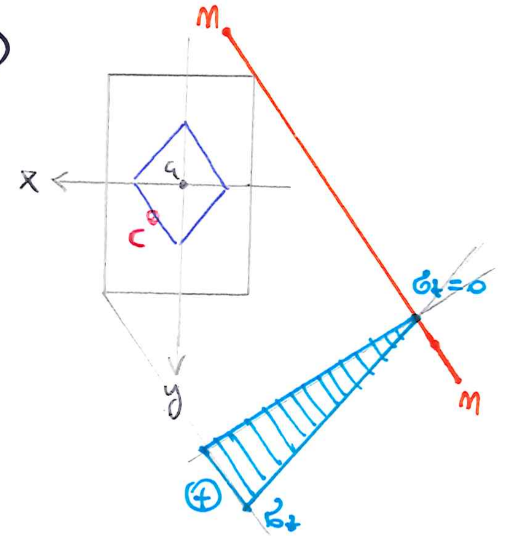
PER $x=0$ E $y=0$, OVVERO NEL BARICENTRO $\sigma_z = N/A$

LA POSIZIONE DELL'ASSE NEUTRO DIPENDE DALLA POSIZIONE DEL CENTRO DI PRESSIONE: 3 SITUAZIONI

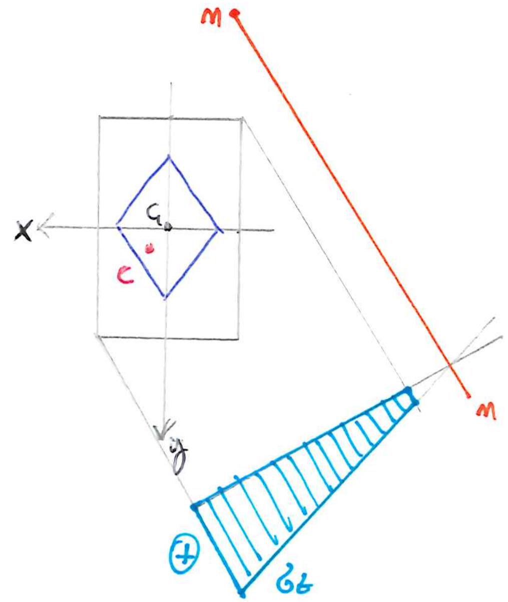
1)



2)



3)



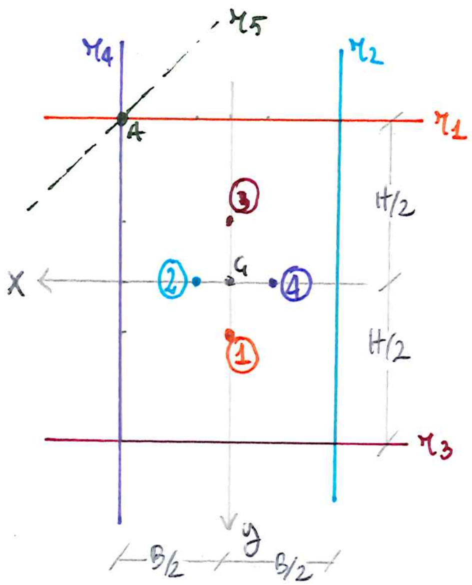
1) C ESTERNO AL NOCCIOLO CENTRALE DI INERZIA DELLA SEZIONE
- L'ASSE NEUTRO TAGLIA LA SEZIONE
- SFORZI DI SEGNO ALTERNATO
- ANDAMENTO A FARFALLA

2) C SUL CONTORNO DEL NOCCIOLO CENTRALE DI INERZIA DELLA SEZIONE
- L'ASSE NEUTRO È TANGENTE ALLA SEZIONE
- SFORZI CHE SI ANNULLANO IN CORRISPONDENZA DELL'ASSE NEUTRO CHE COINCIDE COL BORDO DELLA SEZIONE
- SFORZI SEMPRE DELLO STESSO SEGNO

3) C INTERNO AL NOCCIOLO CENTRALE DI INERZIA DELLA SEZIONE
- L'ASSE NEUTRO È ESTERNO ALLA SEZIONE
- SFORZI SEMPRE DELLO STESSO SEGNO CHE NON SI ANNULLANO IN NESSUN PUNTO

NOCCIOLO CENTRALE DI INERZIA

LUOGO INDIVIDUATO DAI CENTRI DI PRESSIONE $C=(x_c,y_c)$ CORRISPONDENTI AD ASSI NEUTRI TANGENTI ALLA SEZIONE [CASO 2]



EQUAZIONE ASSE NEUTRO: $\boxed{1+\frac{y_c\,y}{\rho_x^2}+\frac{x_c\,x}{\rho_y^2}=0}$ [0] [RELAZIONE DI CONIUGIO TRA CENTRO DI PRESSIONE C E ASSE NEUTRO]

SEZIONE RETTANGOLARE: $J_x=\frac{BH^3}{12}$; $A=BH$; $\rho_x^2=\frac{H^2}{12}$; $\rho_y^2=\frac{B^2}{12}$; $J_y=\frac{B^3H}{12}$

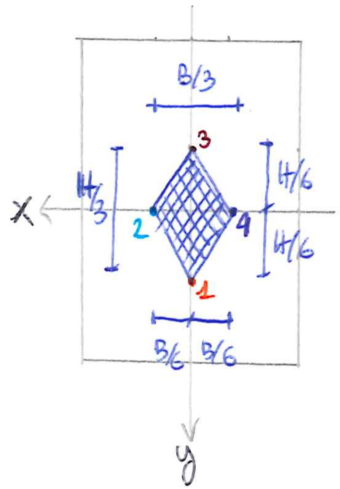
n_1) $y=-H/2$ [1] $1+\frac{y_c(-H/2)}{H^2/12}+\frac{x_c\,x}{B^2/12}=0$ $x_c=0$ PER OTTENERE LA [1] $\rightsquigarrow y_c=H/6$ ① $=(0,H/6)$ C DI n_1

n_2) $x=-B/2$ [2] $1+\frac{y_c\,y}{H^2/12}+\frac{x(-B/2)}{B^2/12}=0$ $y_c=0$ PER OTTENERE LA [2] $\rightsquigarrow x_c=B/6$ ② $=(B/6,0)$ C DI n_2

n_3) $y=+H/2$ [3] $1+\frac{y_c(H/2)}{H^2/12}+\frac{x_c\,x}{B^2/12}=0$ $x_c=0$ PER OTTENERE LA [3] $\rightsquigarrow y_c=-H/6$ ③ $=(0,-H/6)$ C DI n_3

n_4) $x=+B/2$ [4] $1+\frac{y_c\,y}{H^2/12}+\frac{x_c(B/2)}{B^2/12}=0$ $y_c=0$ PER OTTENERE LA [4] $\rightsquigarrow x_c=-B/6$ ④ $=(-B/6,0)$ C DI n_4

N.B. ASSE NEUTRO SEMPRE DAL LATO OPPOSTO, RISPETTO AL BARICENTRO, DEL CENTRO DI PRESSIONE



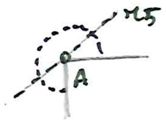
N.B.2 CI SONO ANCHE TUTTE LE RETTE TANGENTI AI VERTICI DEL RETTANGOLO, AD ESEMPIO IN A

TUTTE LE RETTE CHE PASSANO IN UN PUNTO $P_0=(x_0,y_0)$ HANNO EQUAZIONE $y-y_0=m(x-x_0)$

FORMA SPECIALE DI UNA RETTA $y=mx+q$, DOVE $q=y_0-mx_0$ E m = COEFFICIENTE ANGOLARE

$A=(B/2,-H/2)$ E $m\in(0,+\infty)$ ESTREMI ESCLUSI $\rightarrow n_5$ NON DEVE INTERSECARE LA SEZIONE

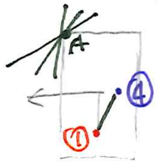
n_5) $y=m(x-B/2)-H/2$ CON $0<m<+\infty$



$m\in(0,+\infty)$

SOSTITUENDO IN [0] DEVE RISULTARE CHE $1+\frac{y_c[m(x-B/2)-H/2]}{\rho_x^2}+\frac{x_c\,x}{\rho_y^2}=0$

AL VARIARE DI m IL C DI n_5 PERCORRE IL SEGMENTO ①④



ANALOGAMENTE, PER GLI ALTRI 3 VERTICI I CENTRI SI TROVANO SUI SEGMENTI CHE COLLEGANO ①②③ E ④