PROBLEMA DI SAINT VENANT (ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT, 1797 - 1886)

DEFINIZIONE DELLO STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE IN UNA TRAVE ELASTICA AD ASSE RETTILINEO SOGGETTA ALL'AZIONE DI CARICHI ESTERNI APPLICATI SOLO SULLE DUE BASI ESTREME $\longrightarrow$ COSTITUISCE IL FONDAMENTO DI TUTTA LA TEORIA DELLE TRAVI

PROBLEMA ELASTICO

[EQUAZIONI GENERALI PER UN SOLIDO ELASTICO LINEARE]

(I) EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

[•] EQUILIBRIO INTERNO IN TUTTI I PUNTI DEL SOLIDO [NEL VOLUME V]

$$\boxed{\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0}$$

$$[\bullet\bullet]\quad \begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z = p_x \\ \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z = p_y \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z \alpha_z = p_z \end{cases}$$

[••] EQUILIBRIO ESTERNO SULLA FRONTIERA [CONTORNO LIBERO S_F]

$$\boxed{t_{ij} n_i = p_j}$$

(II) EQUAZIONI DI CONGRUENZA o DI COMPATIBILITÀ CINEMATICA

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2mm] \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2mm] \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2mm] \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2mm] \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

[•] CONGRUENZA INTERNA IN TUTTI I PUNTI DEL SOLIDO [NEL VOLUME V]

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right)}$$

$[s_i, s_j = u, v, w]$

$$[\bullet\bullet]\quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

[••] SUL BORDO VINCOLATO [S_S]

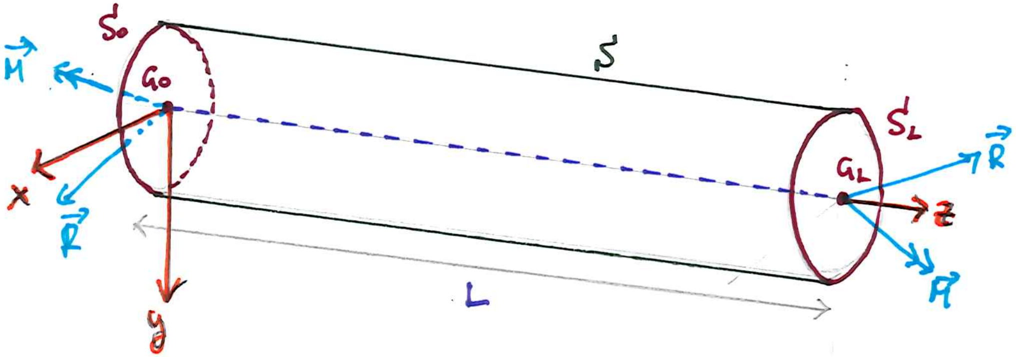
(III) LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\sigma_x - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\[2mm] \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\sigma_y - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\[2mm] \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\sigma_z - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\[2mm] \gamma_{xz} = \dfrac{1}{G}\tau_{xz} \\[2mm] \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} \end{cases}$$

[•] LEGGE DI HOOKE GENERALIZZATA [PER MATERIALI ISOTROPI]

SOLIDO DI SAINT VENANT



S_0 E S_L: BASI DEL SOLIDO → DI FORMA QUALUNQUE

S: MANTELLO (SUPERFICIE LATERALE DEL SOLIDO)

G_0 E G_L: BARICENTRI DELLE BASI

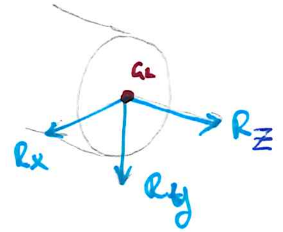
G_0: ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO (PRINCIPALE)

L: LUNGHEZZA (>> DELLE DIMENSIONI DI S_0 E S_L)

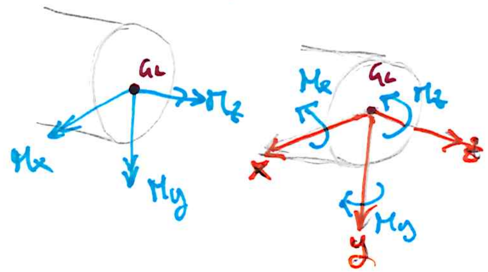
$\vec{R}$: RISULTANTE DELLE FORZE APPLICATE SU S_L E SU S_0

$\vec{M}(O)$: MOMENTO RISULTANTE SU S_L E SU S_0

$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$



$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$



MODELLO GEOMETRICO → IPOTESI SULLA GEOMETRIA

- SOLIDO CILINDRICO PRIVO DI VINCOLI *
- DI LUNGHEZZA L MOLTO MAGGIORE RISPETTO ALLE DIMENSIONI DELLA SEZIONE
- SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE (TERNA DESTRA) CON ORIGINE G_0 NEL BARICENTRO DI UNA SEZIONE ESTREMA (S_0)
- ASSE z COINCIDENTE CON L'ASSE GEOMETRICO
- ASSI x E y ASSI PRINCIPALI DI INERZIA DELLA SEZIONE

> IN TALE SISTEMA DI RIFERIMENTO SONO NULLI I MOMENTI STATICI E IL MOMENTO CENTRIFUGO DELLA SEZIONE RISPETTO A x E y:

$$S_x=\int_A y\,dA=0;\quad S_y=\int_A x\,dA=0;\quad I_{xy}=\int_A xy\,dA=0$$

> LIMITATAMENTE AI MOMENTI DEL SECONDO ORDINE, LE PROPRIETÀ GEOMETRICHE DELLA SEZIONE SI RICONDUCONO ALL'AREA E AI DUE MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AGLI ASSI PRINCIPALI:

$$A=\int_A dA;\quad I_x=\int_A y^2\,dA;\quad I_y=\int_A x^2\,dA$$

MODELLO REOLOGICO O MECCANICO → IPOTESI SUL MATERIALE

IL CILINDRO È OMOGENEO E COSTITUITO DA UN MATERIALE ELASTICO LINEARE E ISOTROPO

MODELLO DELLE AZIONI ESTERNE → IPOTESI SULLE FORZE

- NON CI SONO FORZE DI VOLUME: $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0}$
- IL MANTELLO S È SCARICO: $\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} = \vec{0}$ SU S
- SULLE BASI S_0 E S_L SONO APPLICATE DISTRIBUZIONI DI FORZE TALI DA GARANTIRE EQUILIBRIO GLOBALE *

POSTULATO DI SAINT VENANT: LO STATO DI SFORZO NEI PUNTI INTERNI DEL SOLIDO A "SUFFICIENTE" DISTANZA DALLE BASI DIPENDE SOLO DALLA RISULTANTE $\vec{R}$ E DAL MOMENTO RISULTANTE $\vec{M}$ E NON DALL'EFFETTIVA DISTRIBUZIONE DI FORZE SULLE BASI

- LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI NEI PUNTI INTERNI È, PER OGNI SEZIONE, LA MEDESIMA (GLI SFORZI $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{yz}$ NON DIPENDONO DA z)

LE QUANTITA' DA DETERMINARE SONO - LE TENSIONI INTERNE $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$

- LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO u, v, w ED LE DEFORMAZIONI $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$

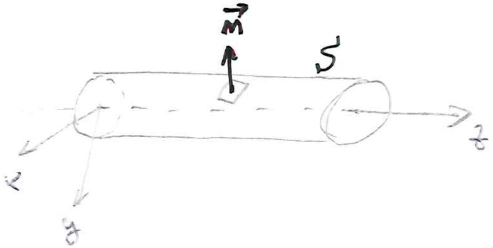
CLASSICO PROBLEMA ELASTICO, MA PER LE IPOTESI PRESE IN CONSIDERAZIONE LE EQUAZIONI DIVENTANO:

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0}$

$$[\bullet\bullet]\quad \begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y = 0 \end{cases}$$

SU S (MANTELLO)



$\vec{M} = \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}$

$\alpha_z = 0$ $\vec{M}$ NON FA "OMBRA" SU z

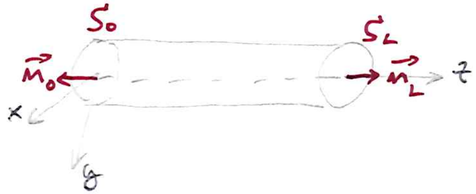
$\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} = \vec{0}$ SU S

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \sigma_z \alpha_z = -\sigma_z = p_z \\ \tau_{zy} \alpha_z = -\tau_{zy} = p_y \\ \tau_{zx} \alpha_z = -\tau_{zx} = p_x \end{cases}$$

SU S_0 (BASE CON $z=0$)

$$[\bullet]\quad \begin{cases} \sigma_z \alpha_z = \sigma_z = p_z \\ \tau_{zy} \alpha_z = \tau_{zy} = p_y \\ \tau_{zx} \alpha_z = \tau_{zx} = p_x \end{cases}$$

SU S_L (BASE CON $z=L$)



$\vec{M}_0 = \{0, 0, -1\}$ $\alpha_z = -1$

$\vec{M}_L = \{0, 0, 1\}$ $\alpha_z = +1$

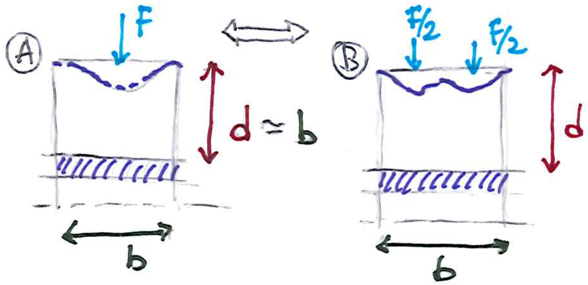
$\alpha_x = \alpha_y = 0$

$\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} \neq \vec{0}$ SU S_0, S_L

SULLE BASI σ_z, τ_{zx} E τ_{zy} SONO FUNZIONI DI x E y

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

N.B. POSTULATO DI SAINT VENANT →



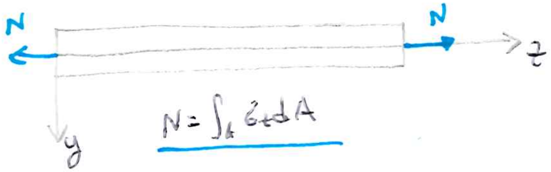
A E B SONO 2 SISTEMI EQUIVALENTI
STESSA RISULTANTE ($\vec{F} = \vec{F}/2 + \vec{F}/2$) E STESSO MOMENTO RISULTANTE
A DISTANZA **d** - DISTANZA DI ESTINZIONE - PRODUCONO GLI STESSI EFFETTI

N.B. IL SOLIDO È PRIVO DI VINCOLI (LIBERO NELLO SPAZIO), MA È IN EQUILIBRIO : $\vec{R} = \vec{0}$ E $\vec{M} = \vec{0}$ OVVERO LE RISULTANTI $\vec{R}$ E IL MOMENTO RISULTANTE $\vec{M}$ APPLICATI SULLE BASI S_0 E S_L SONO IN EQUILIBRIO

ELASTICITÀ LINEARE → SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO POSSIAMO CONSIDERARE SEPARATAMENTE LE COMPONENTI DI $\vec{R}$ E $\vec{M}$, INDIVIDUANDO 4 CASI INDIPENDENTI

① $R_z = N$

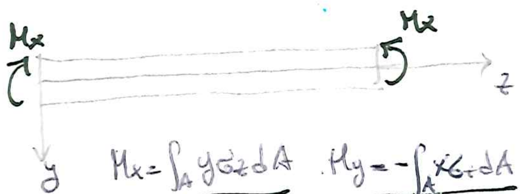


$N = \int_A \sigma_z \, dA$

$R_z \neq 0$ $\quad R_x = R_y = M_x = M_y = M_z = 0$

FORZA ASSIALE CENTRATA

② M_x o M_y

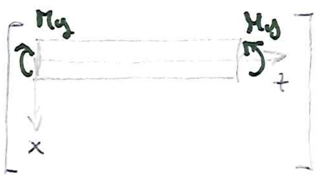


$M_x = \int_A y \sigma_z \, dA$ $\quad M_y = -\int_A x \sigma_z \, dA$

$M_x \neq 0$ $\quad R_x = R_y = R_z = M_y = M_z = 0$

o

$M_y \neq 0$ $\quad R_x = R_y = R_z = M_x = M_z = 0$ →

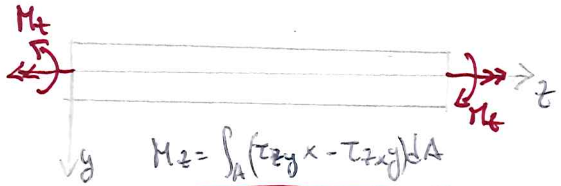


FLESSIONE RETTA

SI POSSONO COMBINARE :
PRESSO FLESSIONE o
TENSO FLESSIONE

① E ② E LE LORO COMBINAZIONI GENERANO SOLO SFORZI NORMALI
> SOLUZIONI ESATTE <

③ M_t

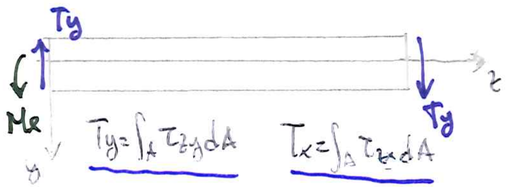


$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) \, dA$

$M_t \neq 0$ $\quad R_x = R_y = R_z = M_x = M_y = 0$

TORSIONE

④ R_y o R_x
T_y o T_x
$+ M_x$ o M_y



$T_y = \int_A \tau_{zy} \, dA$ $\quad T_x = \int_A \tau_{zx} \, dA$

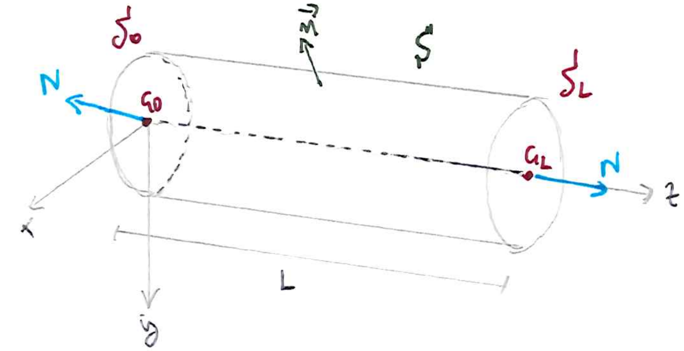
$R_y \neq 0 + M_x \neq 0$ $\quad R_x = R_z = M_y = M_z = 0$

$R_x \neq 0 + M_y \neq 0$ $\quad R_y = R_z = M_x = M_z = 0$

FLESSIONE COMPOSTA A TAGLIO

COMPORTANO SFORZI TANGENZIALI
[④ ANCHE SFORZI NORMALI]
> SOLUZIONI APPROSSIMATE <

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT



$p_x = p_y = p_z = 0$ SU S, $\vec{m} = \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}$ $\quad \vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0}$ IN V

$\vec{R} = \begin{cases} N \neq 0 \\ T_x = 0 \\ T_y = 0 \end{cases} \quad \vec{M} = \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$

SU S_0, $\vec{m}_0 = \{0, 0, -1\}$ E SU S_L, $\vec{m}_L = \{0, 0, +1\}$

$\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} \neq \vec{0}$ TALE CHE SOLO $N \neq 0$ E

$T_x, T_y, M_x, M_y, M_z = 0$

$N = \int_A \sigma_z \, dA$

N.B. - METODO SEMI-INVERSO DI SOLUZIONE

[SI FANNO DELLE IPOTESI SULLE TENSIONI O SUGLI SPOSTAMENTI (O ENTRAMBI) SULLA BASE DELLA NATURA FISICA DEL PROBLEMA POI SI VERIFICANO ATTRAVERSO IL SODDISFACIMENTO DELLE EQUAZIONI DEL PROBLEMA]

→ LA DISTRIBUZIONE PIÙ SEMPLICE DI TENSIONI SULLE SEZIONI ESTREME EQUIVALENTE ALLO SFORZO APPLICATO È

SU S_0 $\quad p_x = 0$, $p_y = 0$, $\boxed{p_z = -\frac{N}{A}}$

SU S_L $\quad p_x = 0$, $p_y = 0$, $\boxed{p_z = \frac{N}{A}}$ $\quad p_z =$ COSTANTE

(N.B. AVREMMO POTUTO AVERE ANCHE $p_x \neq 0, p_y \neq 0$ MA TALI CHE $R_x = R_y = 0$ E $R_z = N$)

$\int_A p_z \, dA = \int_A \frac{N}{A} dA = \frac{N}{A} \int_A dA = N$

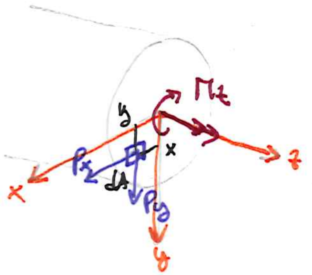
$T_x = \int_A p_x \, dA^{*} = 0 \qquad T_y = \int_A p_y \, dA^{*} = 0$

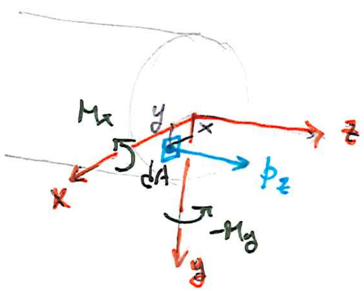
$M_x = \int_A p_z y \, dA = 0 = \frac{N}{A} \int y \, dA^{*} = 0 \quad$ E $\quad M_y = -\int_A p_z x \, dA = -\frac{N}{A} \int_A x \, dA^{*} = 0$

$M_z = \int_A p_x y \, dA - \int_A p_y x \, dA^{*} = 0$

* MOMENTI STATICI S_y E S_x NULLI
x E y ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

* $p_x = p_y = 0$





VERIFICHIAMO LE EQUAZIONI DEL PROBLEMA

EQUILIBRIO ESTERNO SUL CONTORNO [•:]

SU S_L $\begin{cases} \tau_{zx} \cdot \alpha_z = \tau_{zx} \cdot 1 = 0 \\ \tau_{zy} \cdot \alpha_z = \tau_{zy} \cdot 1 = 0 \\ \sigma_z \cdot \alpha_z = \sigma_z \cdot 1 = \frac{N}{A} \end{cases}$; SU S_0 $\begin{cases} \tau_{zx} \alpha_z = \tau_{zx}(-1) = 0 \\ \tau_{zy} \alpha_z = \tau_{zy}(-1) = 0 \\ \sigma_z \alpha_z = \sigma_z(-1) = -\frac{N}{A} \end{cases}$; SU S $\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0 \; ; \; \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0 \; ; \; \sigma_z = N/A}$

IPOTIZZATO CHE SULLE BASI SI ABBIA UNA DISTRIBUZIONE DI $p_z = \frac{N}{A}$ COSTANTE, ABBIAMO VERIFICATO CHE SUL CONTORNO LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI È: $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$; $\sigma_z = N/A$ *

VERIFICHIAMO L'EQUILIBRIO INTERNO

$$* \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N/A \end{bmatrix}$$

$$[\bullet] \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \rightsquigarrow 0+0+0=0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \rightsquigarrow 0+0+0=0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightsquigarrow 0+0+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{N}{A}\right)^{*} = 0 \end{cases}$$

* [σ_z = COST → DERIVATA DI UNA COSTANTE = 0]

ANCHE L'EQUILIBRIO INTERNO È SODDISFATTO

A PARTIRE DA UN'IPOTESI SULLA DISTRIBUZIONE DELLE FORZE [p_z = COST = N/A ; $p_x = p_y = 0$] ABBIAMO DEDOTTO UNA PARTE DI SOLUZIONE, OVVERO LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI [$\sigma_z = N/A$, TUTTE LE ALTRE COMPONENTI DI $\underline{\sigma}$ SONO NULLE]*

NOTI GLI SFORZI POSSIAMO RICAVARE LE DEFORMAZIONI MEDIANTE LE EQUAZIONI DI LEGAME [•]

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A} \; ; \; \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A} \; ; \; \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z = \frac{N}{EA} \; ; \; \gamma_{xy} = 0 \; ; \; \gamma_{xz} = 0 \; ; \; \gamma_{yz} = 0$$

E INFINE, CON LE EQUAZIONI DI CONGRUENZA [•] RICAVIAMO GLI SPOSTAMENTI u, v, w ; N.B. IL CAMPO DI SPOSTAMENTI DEVE ESSERE CONTINUO

$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}$ DOBBIAMO TROVARE UNA FUNZIONE $u(x,y,z)$ LA CUI DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x SIA UNA COSTANTE

PER INTEGRAZIONE: $u = \underbrace{-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x}_{} + \overbrace{u_0(y,z)}^{}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x\right) = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A} \qquad \frac{\partial u_0(y,z)}{\partial x} = 0$

ANALOGAMENTE:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A} \Rightarrow v = \underbrace{-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y}_{} + \underbrace{v_0(x,z)}_{}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \rightsquigarrow \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N}{EA} \Rightarrow w = \underbrace{\frac{N}{EA}z}_{} + \underbrace{w_0(x,y)}_{}$$

* N.B. $u_0(y,z)$, $v_0(x,z)$ E $w_0(y,x)$ DIPENDONO DA 2 VARIABILI SU 3 PER VOLTA: $u \to x$ $u_0(y,z) \to \partial u_0/\partial x = 0$
$v \to y$ $v_0(x,z) \to \partial v_0/\partial y = 0$
$w \to z$ $w_0(x,y) \to \partial w_0/\partial z = 0$

I u_0, v_0, w_0 RAPPRESENTANO LE COMPONENTI DI MOTO RIGIDO DELLA TRAVE

USIAMO u, v E w PER GLI SCORRIMENTI ANGOLARI:

$$\gamma_{xy} = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x + u_0(y,z) \qquad v = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y + v_0(x,z)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

N.B. $\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$

i. $\gamma_{xz}=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0 \Rightarrow u(x,y,z)=-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x+u_0(y,z)$
$w(x,y,z)=\frac{N}{EA}z+w_0(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u_0(y,z)}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$ $\Big\}$ $\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}=0$

$\gamma_{yz}=0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0 \Rightarrow v(x,y,z)=-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y+v_0(x,z)$

$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v_0(x,z)}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$ $\Big\}$ $\frac{\partial v_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial y}=0$

[N.B. SEGUE CHE u_0, v_0, w_0 GENERANO UN CAMPO DI SPOSTAMENTI CHE CORRISPONDE SOLO A UN MOTO RIGIDO, VEDI NOTA 1]

. NEL CAMPO DI SPOSTAMENTI ABBIAMO UNA PARTE NOTA $\left[-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x \text{ IN } u(x,y,z)\ ;\ -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y \text{ IN } v(x,y,z)\ ;\ \frac{N}{EA}z \text{ IN } w(x,y,z)\right]$ E UNA INCOGNITA $[u_0(y,z) \text{ IN } u(x,y,z)\ ;\ v_0(x,z) \text{ IN } v(x,y,z)\ ;\ w_0(x,y) \text{ IN } w(x,y,z)]$, MA PER GARANTIRE LA CONGRUENZA ALLORA u_0, v_0, w_0 NON POSSONO PRODURRE DEFORMAZIONI → MOTO RIGIDO, QUINDI POSSIAMO TRASCURARLE.

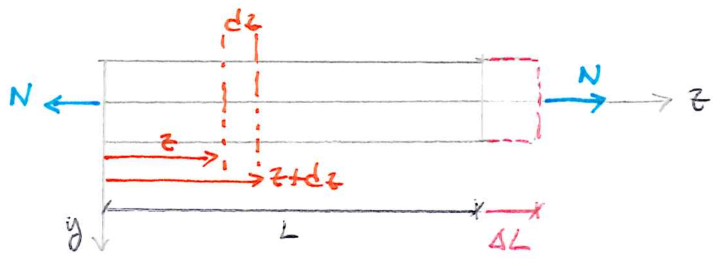
▷ A PARTIRE DA IPOTESI SULLA DISTRIBUZIONE DELLE FORZE SULLE BASI ($p_z=\text{cost}=N/A$) TUTTE LE 15 INCOGNITE DEL PROBLEMA SONO RICAVATE DALL'APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, [•] E [• •], DI CONGRUENZA [•] E DI LEGAME [•]

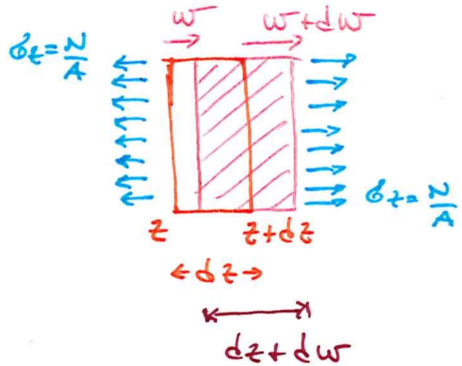
$\sigma_x=0$	$\tau_{xy}=0$	$u(x,y,z)=-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x$	$\varepsilon_x=-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}$	$\gamma_{xy}=0$
$\sigma_y=0$	$\tau_{xz}=0$	$v(x,y,z)=-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y$	$\varepsilon_y=-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}$	$\gamma_{xz}=0$
$\sigma_z=N/A$	$\tau_{yz}=0$	$w(x,y,z)=\frac{N}{EA}z$	$\varepsilon_z=\frac{N}{EA}$	$\gamma_{yz}=0$

N.B. - $\sigma_z=N/A$ = COSTANTE SU TUTTA LA TRAVE

- $w(x,y,z)=\frac{N}{EA}z \Rightarrow$ GLI SPOSTAMENTI LONGITUDINALI NON DIPENDONO DA x E y → LA GENERICA SEZIONE DELLA TRAVE A DEFORMAZIONE AVVENUTA RISULTA ESSERE ANCORA PIANA E PARALLELA ALLA CONFIGURAZIONE INIZIALE INDEFORMATA

PER INVESTIGARE LE DEFORMAZIONI LONGITUDINALI DELLA TRAVE, CONSIDERIAMO UN CONCIO INFINITESIMO DI TRAVE:





A DEFORMAZIONE AVVENUTA:

+ L'ASCISSA z SI È SPOSTATA DI $w = \frac{N}{EA} z$
+ L'ASCISSA $(z+dz)$ SI È SPOSTATA DI $w + dw = \frac{N}{EA}(z+dz)$

IL CONCIO DI LUNGHEZZA INDEFORMATA dz, DOPO L'APPLICAZIONE DI N HA UNA LUNGHEZZA PARI A:

$$dz + (w+dw) - w = dz + dw = dz + \frac{N}{EA}\,dz$$

E LA VARIAZIONE DI LUNGHEZZA Δdz VALE:

$$\Delta dz = \left(dz + \frac{N}{EA}\,dz\right) - dz = \frac{N}{EA}\,dz$$

> INFATTI $\boxed{\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{N}{EA}}$

L'ALLUNGAMENTO COMPLESSIVO DELLA TRAVE ΔL PUÒ ESSERE CALCOLATO COME SOMMA DI TUTTI GLI ALLUNGAMENTI DEI CONCI:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dz = \int_0^L \frac{N}{EA}\,dz = \frac{N}{EA}\int_0^L dz = \frac{N}{EA}\left[z\right]_0^L = \boxed{\frac{N}{EA} L}$$

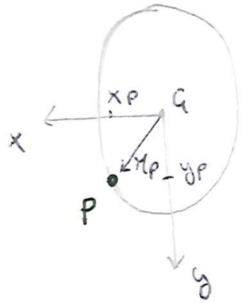
ΔL È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A N E L → SE $N>0$ $\Delta L>0$; SE $N<0$ $\Delta L<0$

ΔL È INVERSAMENTE PROPORZIONALE A EA → $\boxed{EA = \text{RIGIDEZZA ASSIALE}}$ → N.B. RIGIDEZZA UNISCE UNA CARATTERISTICA DEL MATERIALE [IL MODULO DI YOUNG, E] E GEOMETRICA [L'AREA DELLA SEZIONE, A]

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

LA TRAVE, OLTRE A SUBIRE UN'ESTENSIONE IN SENSO LONGITUDINALE, SI DEFORMA ANCHE TRASVERSALMENTE

CONSIDERANDO UN GENERICO PUNTO $P=(x_p, y_p)$ DEL CONTORNO DELLA SEZIONE TRASVERSALE

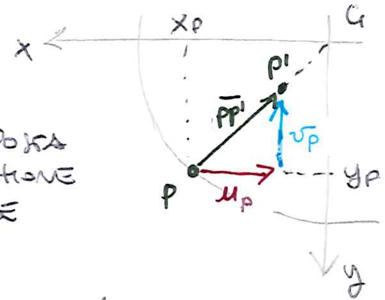


LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO NEL PIANO xy VALGONO:

$$u_p = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x_p \qquad v_p = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y_p$$

ALLORA $$\frac{u_p}{v_p} = \frac{-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}x_p}{-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}y_p} = \frac{x_p}{y_p}$$

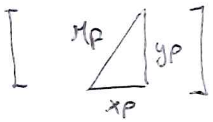
P SI SPOSTA IN DIREZIONE RADIALE



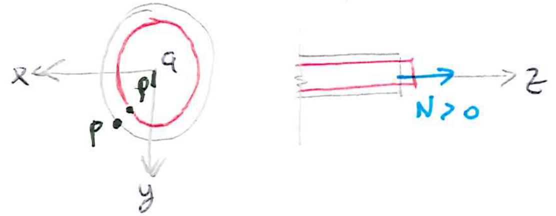
LO SPOSTAMENTO $\overline{PP'}$ AVVIENE LUNGO LA CONGIUNGENTE PG

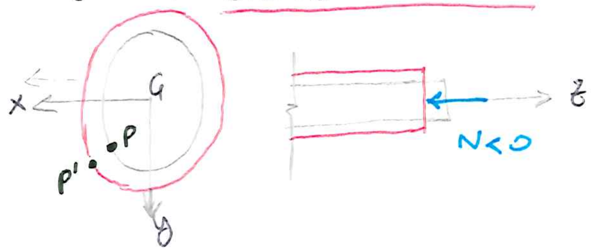
ALLORA DETTA r_p LA LUNGHEZZA INIZIALE DI PG, PP' RAPPRESENTA UNA VARIAZIONE Δr_p DI r_p:

$$\Delta r_p = \sqrt{u_p^2 + v_p^2} = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}\sqrt{x_p^2+y_p^2} = -\frac{\nu}{E}\frac{N}{A}r_p$$



LA SEZIONE SI CONTRAE $(N>0)$ O SI ESPANDE $(N<0)$ OMOTETICAMENTE → MANTIENE LA STESSA FORMA





* APPLICANDO IL TEOREMA DI CLAPEYRON È POSSIBILE CALCOLARE IL LAVORO DI DEFORMAZIONE:

$$L_e = \frac{1}{2}N\Delta L = \frac{1}{2}N\frac{N}{EA}L = \frac{1}{2}\frac{N^2 L}{EA}$$

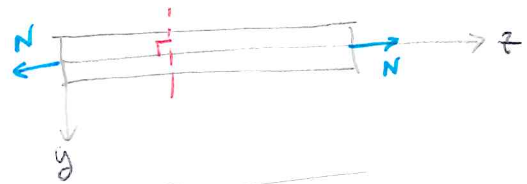
$$L_i = \frac{1}{2}\int_V \sigma_z \varepsilon_z \, dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{N}{A}\cdot\frac{N}{EA}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{N^2}{EA^2}\, dV$$

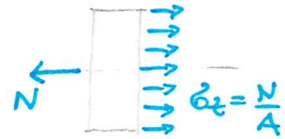
$$dV = A\,dz \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA^2}A\,dz = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}\int_0^L dz = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}L$$

$$\boxed{L_i = L_e = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}L}$$

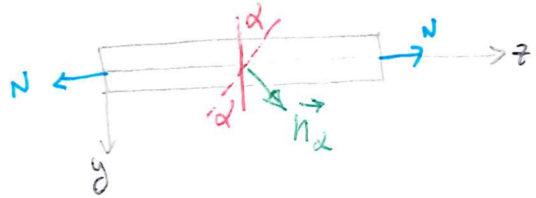
σ_z È COSTANTE IN OGNI SEZIONE $\longmapsto$ $\sigma_z = \frac{N}{A}$

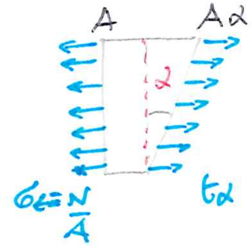
SE CONSIDERIAMO UNA SEZIONE RETTA (PERPENDICOLARE A z)





SE CONSIDERIAMO UNA SEZIONE OBLIQUA (INCLINATA DI UN ANGOLO α)

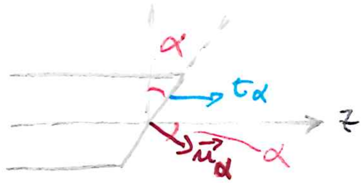


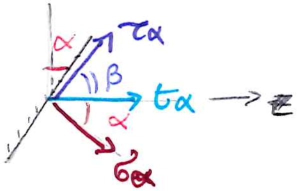


PER L'EQUILIBRIO IN DIREZIONE z: $\sigma_z A = t_\alpha A_\alpha$

$A_\alpha \cos\alpha = A \Rightarrow A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha} \Rightarrow A_\alpha \geq A$

$\sigma_z A = t_\alpha \frac{A}{\cos\alpha} \rightarrow t_\alpha = \sigma_z \cos\alpha \qquad t_\alpha \leq \sigma_z$





β = ANGOLO COMPLEMENTARE DI $\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\,\beta$

$\tau_\alpha = t_\alpha\, \text{sen}\,\alpha = \sigma_z \cos\alpha\, \text{sen}\,\alpha = \underline{\frac{1}{2}\sigma_z\, \text{sen}\, 2\alpha}$

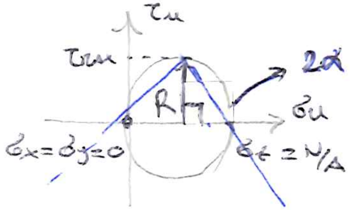
$\sigma_\alpha = t_\alpha \cos\alpha = \underline{\sigma_z \cos^2\alpha}$

SU UNA SEZIONE OBLIQUA ABBIAMO SIA σ CHE τ

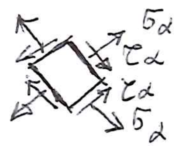
SE $\alpha = 0$ $\quad \cos\alpha = 1 \quad \sigma_\alpha = \sigma_z$ E $\tau_\alpha = 0$ ($\text{sen}\,\alpha = 0$) $\qquad \alpha = 0 \rightarrow$ SEZIONE RETTA $\rightarrow$ SOLO σ

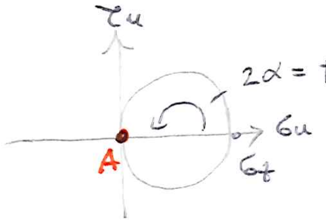
SE $\alpha = 90°$ $\quad \cos\alpha = 0 \quad \sigma_\alpha = 0$ E $\tau_\alpha = 0$ ($\text{sen}\,2\alpha = 0$) $\qquad \alpha = 90° \rightarrow$ SEZIONE LONGITUDINALE $\rightarrow$ NON CI SONO SFORZI

SE $\alpha = 45°$ $\quad \cos\alpha = \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sigma_\alpha = \sigma_z \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sigma_z$ E $\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_z \qquad \alpha = 45° \rightarrow$ MASSIME TENSIONI TANGENZIALI τ



$2\alpha = \frac{\pi}{2}$ DOPPIO DI $\alpha = 45°$

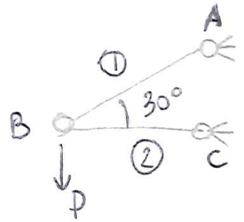




$2\alpha = \pi \rightarrow \alpha = 90°$

A = SEZIONE LONGITUDINALE $\quad \sigma = 0 \quad \tau = 0$

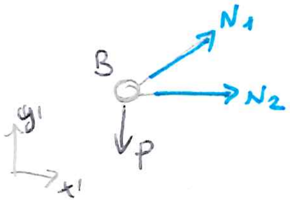
ESEMPIO APPLICATIVO



$P = 30\,kN = 30'000\,N$

$k = 120\,MPa = 120\,N/mm^2$ $\quad (k' = k\ ;\ k'' = k)$

STRUTTURA ISOSTATICA

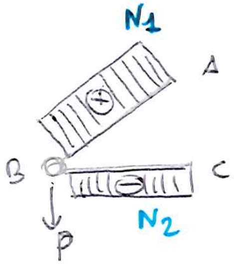


$$\begin{cases} N_1 \cos 30° + N_2 = 0 & \to R_{x'} = 0 \\ N_1 \operatorname{sen} 30° - P = 0 & \uparrow R_{y'} = 0 \end{cases} \qquad \cos 30° = \sqrt{3}/2 \qquad \operatorname{sen} 30° = 1/2$$

$\frac{1}{2} N_1 - P = 0 \rightsquigarrow \underline{N_1 = 2P}$ $\oplus$ TRAZIONE

$2P \cos 30° + N_2 = 0 \rightsquigarrow \sqrt{3}P + N_2 = 0 \rightsquigarrow \underline{N_2 = -\sqrt{3}P}$ $\ominus$ COMPRESSIONE

$N_1 = 2P = 60'000\,N$



$N_2 = -\sqrt{3} = -51962\,N$

VERIFICA * NELLA AZIONE ASSIALE CENTRATA $\sigma_z = \frac{N}{A}$ IN TUTTI I PUNTI È COSTANTE SULLA SEZIONE

$\sigma_z = \frac{N}{A} \leq k'$ SE $N > 0$

$\sigma_z = \frac{N}{A} \geq -k''$ SE $N < 0$

POSSIAMO SCEGLIERE QUALSIASI PUNTO (DELL'ASTA ① o ②)

INOLTRE IL MATERIALE È SFRUTTATO AL MEGLIO → LO SFORZO AMMISSIBILE VIENE RAGGIUNTO CONTEMPORANEAMENTE IN TUTTI I PUNTI

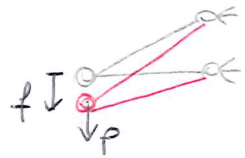
POSSIAMO SFRUTTARE LA VERIFICA PER IL PROGETTO → DIMENSIONAMENTO DELLE ASTE

$\sigma_z^{(1)} = \frac{N_1}{A_1} \leq k$ INCOGNITA $A_1 \rightsquigarrow \frac{N_1}{k} \leq A_1$ OVVERO $A_1 \geq \frac{N_1}{k}$ $\qquad A_1 = A_1^{MIN} = \frac{60000}{120} = 500\,mm^2$

$\sigma_z^{(2)} = \frac{N_2}{A_2} \geq -k$ INCOGNITA $A_2 \rightsquigarrow N_2 \geq -kA_2 \quad -N_2 \leq kA_2$ $\qquad A_2 \geq \frac{-N_2}{k}$ $\qquad A_2 = A_2^{MIN} = \frac{51962}{120} = 433\,mm^2$

N.B. LE VERIFICHE DI RESISTENZA NON SONO SUFFICIENTI

BISOGNA CONTROLLARE ANCHE LE DEFORMAZIONI →

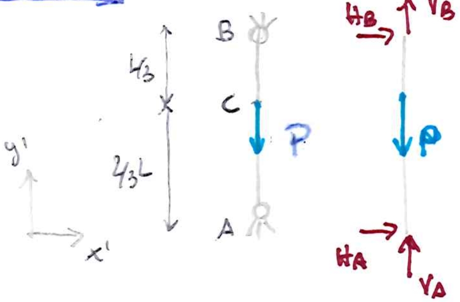


AD ESEMPIO, CHE L'ABBASSAMENTO DEL PUNTO B IN SEGUITO AL CARICO P SIA MINORE DI UN CERTO VALORE

INOLTRE PER GLI ELEMENTI COMPRESSI OCCORRE UNA SPECIFICA VERIFICA NEI CONFRONTI DEL CARICO DI PUNTA (CHE PUÒ DARE LUOGO A FENOMENI DI INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO)

ESEMPIO APPLICATIVO

STRUTTURA IPERSTATICA [GRADO DI VINCOLO > GRADI DI LIBERTÀ]



$\vec{R}_x' = 0 \rightarrow H_A + H_B = 0$ $\qquad H_A = 0$

$R_y' = 0 \rightarrow V_A + V_B - P = 0$ $\qquad \boxed{V_A + V_B = P}$ → NON SIAMO IN GRADO DI DETERMINARE V_A E V_B (4 INCOGNITE – 3 EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA)

$M_{z'(A)} = 0 \rightarrow -H_B L = 0$ $\qquad H_B = 0$

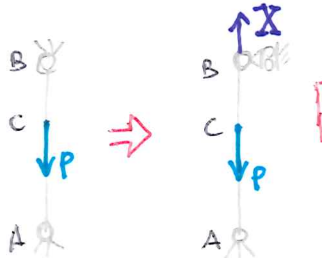
PONIAMO $V_B = X$, QUANTITÀ INCOGNITA

$V_A = P - X$ E $V_B = X$, MA QUANTO VALE X?

IL VINCOLO IN B IMPEDISCE LO SPOSTAMENTO VERTICALE DEL PUNTO B, OVVERO IMPONE CHE $\boxed{\Delta L = 0}$

DIVIDIAMO L'ASTA IN 2 TRATTI: ① = AB E ② = CB E PER OGNUNA CALCOLIAMO N E ΔL, ALLORA $\boxed{\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0}$ *

* L'EQUAZIONE AGGIUNTIVA CI CONSENTE DI CALCOLARE X

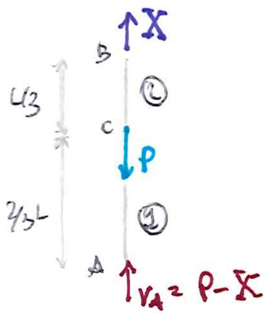


IPERSTATICA $\qquad$ ISOSTATICA

$\boxed{v_B = 0}$ → CONDIZIONE CINEMATICA CHE ASSICURA CHE L'ISOSTATICA SI COMPORTI COME LA STRUTTURA IPERSTATICA DI PARTENZA

$\boxed{v_B = 0}$ → PER UN PRECISO VALORE DI X

> PER RISOLVERE IL PROBLEMA NON BASTA L'EQUILIBRIO (COME NEI CORPI RIGIDI) MA BISOGNA TENERE CONTO DELLA DEFORMABILITÀ



A → C

① $0 < z < 2/3 L$

$\uparrow N(z) + (P - X) = 0$

$N_1(z) = -P + X$

C → B

② $1/3 < z < L$

$\uparrow N(z) - P + P - X = 0$

$N_2(z) = X$

LA TRAVE ① E LA TRAVE ② SONO "SALDATE" INSIEME → HANNO STESSA AREA A E STESSO MODULO ELASTICO E

GLI SFORZI VALGONO:

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{N_1(z)}{A} = \frac{-(P-X)}{A} \Rightarrow \varepsilon_z^{(1)} = \frac{\sigma_z^{(1)}}{E} = \frac{-P+X}{EA} \Rightarrow \Delta\ell_1 = -\frac{P+X}{EA}\frac{2}{3}L$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{N_2(z)}{A} = \frac{X}{A} \Rightarrow \varepsilon_z^{(2)} = \frac{\sigma_z^{(2)}}{E} = \frac{X}{EA} \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{X}{EA}\frac{1}{3}L$$

IMPONIAMO CHE $\boxed{\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0}$

$$-\frac{(P-X)}{EA}\frac{2}{3}L + \frac{X}{EA}\frac{L}{3} = 0 \rightarrow -\frac{2PL}{3EA} + \frac{2}{3}\frac{XL}{EA} + \frac{XL}{3EA} = 0 \rightsquigarrow -\frac{2}{3}\frac{P\cancel{L}}{\cancel{EA}} + \frac{X\cancel{L}}{\cancel{EA}} = 0 \quad \boxed{X = \frac{2}{3}P}$$

QUANTO VALGONO ΔL_1 E ΔL_2?

$$\Delta\ell_1 = -\frac{P+X}{EA}\frac{2}{3}L = -\frac{P+2/3P}{EA}\frac{2}{3}L = -\frac{2PL}{9EA}$$

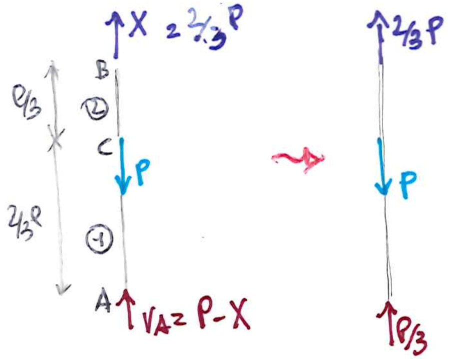
$$\Delta\ell_2 = \frac{X}{EA}\frac{L}{3} = \frac{2/3PL}{EA\;3} = \frac{2PL}{9EA}$$

IL TRATTO ① SI ACCORCIA

IL TRATTO ② SI ALLUNGA

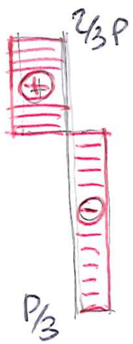
$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = -\frac{2PL}{9EA} + \frac{2PL}{9EA} = 0 \quad \boxed{\Delta\ell = 0}$$

NOTA X, INCOGNITA IPERSTATICA, È POSSIBILE RISOLVERE COMPLETAMENTE LA STRUTTURA:



$$N_z^{(1)} = -(P+X) = -P+2/3P = -P/3$$

$$N_z^{(2)} = X = 2/3P$$



MA PER FARLO OCCORRE TENERE CONTO DELLA DEFORMABILITÀ!

NON SI HA PIÙ UN SISTEMA RIGIDO.

NOTA 1. DETERMINAZIONE DEL CAMPO DI SPOSTAMENTI PER INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DI CONGRUENZA.

SI È VISTO CHE RISULTA:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu N}{EA} \qquad \gamma_{xy} = 0$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu N}{EA} \qquad \gamma_{xz} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{N}{EA} \qquad \gamma_{yz} = 0$$

D'ALTRA PARTE DEVE ESSERE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = -\frac{\nu N}{EA} \qquad [1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = -\frac{\nu N}{EA} \qquad [2]$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{N}{EA} \qquad [3]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = 0 \qquad [4]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} = 0 \qquad [5]$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz} = 0 \qquad [6]$$

INTEGRANDO LA [3] SI OTTIENE:

$$\boxed{w(x,y,z) = \frac{N}{EA} z + w_0(x,y)} \qquad [3']$$

SOSTITUENDO NELLA [5] SI OTTIENE

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$$

DA CUI SEGUE:

$$\boxed{u(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + u_0(x,y)} \qquad [5']$$

SOSTITUENDO ANCORA LA [3'] NELLA [6] SI TROVA INVECE

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$$

DA CUI SEGUE

$$\boxed{v(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + v_0(x,y)} \quad [6']$$

ORA, INSERENDO LA [5'] NELLA [1] SI OTTIENE

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} z + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\nu N}{EA}$$

DEVE ANNULLARSI
PERCHÉ TERMINE
NOTO NON DIPENDE
DA Z!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0} \ ; \quad \boxed{u_0(x,y) = -\frac{\nu N}{EA} x + f_1(y)} \quad [1']$$

MENTRE INSERENDO LA [6'] NELLA [2] SI OTTIENE

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}} z + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu N}{EA}$$

DEVE ANNULLARSI
PERCHÉ TERMINE
NOTO NON DIPENDE
DA Z!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0} \ ; \quad \boxed{v_0(x,y) = -\frac{\nu N}{EA} y + f_2(x)} \quad [2']$$

ORA, COMBINANDO LE [5'] E [1'] E LE [6'] E [2'] SI RICAVA:

$$u(x,y,z) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} z - \frac{\nu N}{EA} x + f_1(y) \quad [1'']$$

$$v(x,y,z) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} z - \frac{\nu N}{EA} y + f_2(x) \quad [2'']$$

A QUESTO PUNTO SI SOSTITUISCE NELLA [4]:

DEVE ANNULLARSI PERCHÉ ALTRI TERMINI NON DIPENDONO DA Z.

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} z + \underbrace{\frac{d}{dy} f_1(y)}_{\text{DERIVATA TOTALE}} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \underbrace{\frac{d}{dx} f_2(x)}_{\text{DERIVATA TOTALE}} = 0 \Rightarrow -\boxed{2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}} z + \frac{d f_1(y)}{dy} + \frac{d f_2(x)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0} \quad ; \quad \boxed{\frac{d f_1(y)}{dy} = -\frac{d f_2(x)}{dx} = a = \text{cost.}} \quad [4']$$

IN QUANTO SE 2 FUNZIONI DI VARIABILI DIVERSE SONO EGUALI, ALLORA DEVONO ESSERE COSTANTI

DALLA [4'] SEGUE:

$$\boxed{f_1(y) = a y + b}$$

$$\boxed{f_2(x) = -a x + c}$$

MENTRE TENENDO CONTO DELLE $[1'_s]$, $[2'_s]$, $[4'_s]$ SI CONCLUDE CHE w_0 HA QUESTA FORMA:

$$\boxed{w_0(x,y) = d x + e y + f} \quad [3'] \Rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial x} = d \; ; \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = e$$

SOSTITUENDO NELLE [5'], [6'], [3'] SI OTTIENE

$$u(x,y,z) = -dz - \frac{\nu N}{EA} x + a y + b \quad \Rightarrow \boxed{u(x,y,z) = -\frac{\nu N}{EA} x + u_1(y,z)} \quad [7]$$

$$\boxed{u_1(y,z) = a y - d z + b} \quad [7']$$

$$v(x,y,z) = -e z - \frac{\nu N}{EA} y - a x + c \quad \Rightarrow \boxed{v(x,y,z) = -\frac{\nu N}{EA} y + v_1(x,z)} \quad [8]$$

$$\boxed{v_1(x,z) = -a x - e z + c} \quad [8']$$

$$w(x,y,z) = \frac{N}{EA} z + d x + e y + f \quad \Rightarrow \boxed{w(x,y,z) = \frac{N}{EA} z + w_0(x,y)} \quad [9]$$

SI OSSERVI CHE

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = a + (-a) = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = -d + d = 0$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = -e + e = 0$$

u_1, v_1 E w_0 NON PRODUCONO DEFORMAZIONI: CORRISPONDONO QUINDI A UN MOTO RIGIDO.