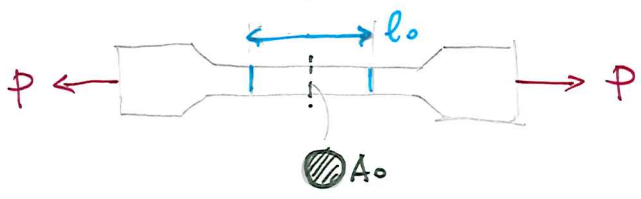


CRITERI DI SICUREZZA

ABBIAAMO VISTO QUALI SONO GLI STRUMENTI MATEMATICI NECESSARI PER LA DEFINIZIONE DELLO STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE IN UN SOLIDO SOGGETTO A DETERMINATE FORTE ESTERNE E VARIAMENTE VINCOLATO, FACENDO L'IPOTESI CHE IL MATERIALE COSTITUENTE IL CORPO SEGUA LE LEGGI DELL'ELASTICITA' LINEARE → IL COMPORTAMENTO REALE DEL MATERIALE DEVE ESSERE SUFFICIENTEMENTE PROSSIMO A QUELLO TECNICO IPOTIZZATO.

E' NECESSARIO DEFINIRE - PER VIA SPERIMENTALE - LE PROPRIETA' DEI MATERIALI E VALUTARE I LIMITI ENTRO I QUALI LE LEGGI TECNICHE PROPOSTE SONO IN GRADO DI RAPPRESENTARE AFFIDABILMENTE IL FENOMENO REALE.

PROVA A TRAZIONE

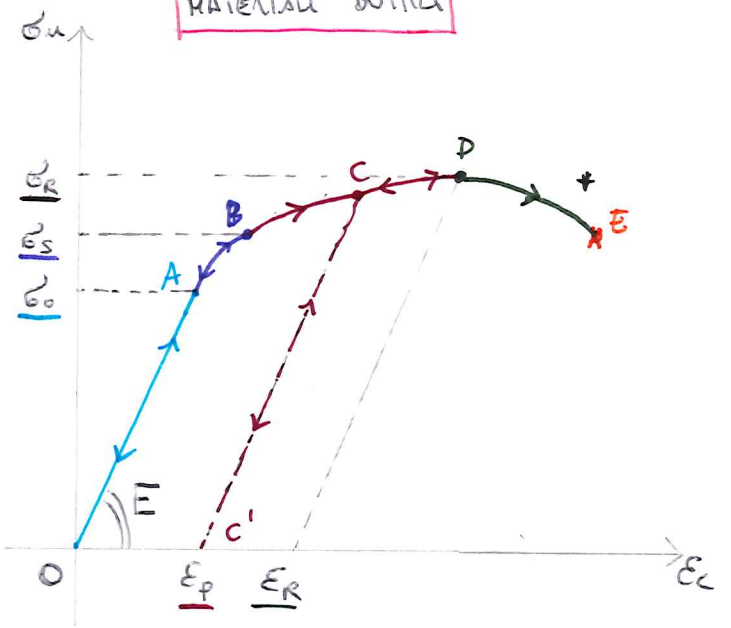


TENSIONE NOMINALE $\sigma_u = \frac{P}{A_0}$
[MPa]

DEFORMAZIONE CONVENZIONALE $\epsilon_c = \frac{\Delta l}{l_0}$
[ADIMENSIONALE]

FACENDO RIFERIMENTO AI MATERIALI COMUNEMENTE USATI NELLE COSTRUZIONI - MATERIALI METALLICI ACCIAIO O ALLUMINIO; LEGNO, CLS, ETC - I DIAGRAMMI TENSIONI NOMINALI - DEFORMAZIONI CONVENZIONALI, $\sigma_u - \epsilon_c$ HANNO UN ANDAMENTO QUALITATIVO DEL TIPO:

MATERIALI DUTTI



σ_0 - TENSIONE AL LIMITE DI PROPORZIONALITA'

σ_s = TENSIONE DI INNEASTAMENTO

σ_R = TENSIONE DI ROTTURA

ϵ_p = DEFORMAZIONE PERMANENTE

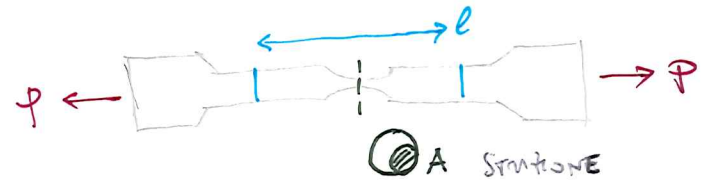
ϵ_R = DEFORMAZIONE DI ROTTURA (≈ 10÷20%)

TRATTO **OA** → COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE

TRATTO **AB** → COMPORTAMENTO ELASTICO NON-LINEARE

TRATTO **BD** → COMPORTAMENTO PLASTICO - DEFORMAZIONI PERMANENTI → **CC'**

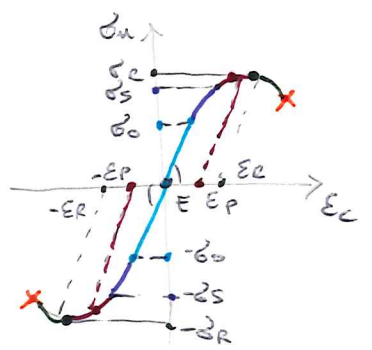
[E = MODULO DI YOUNG]



* [N.B. SE SI TIENE CONTO DELL'EFFETTO DELLA STRUZIONE IL DIAGRAMMA DELLO STATO REALE $\sigma_R = P/A$ - DEFORMAZIONE CONVENZIONALE HA ANDAMENTO CRESCENTE FINO A ROTTURA

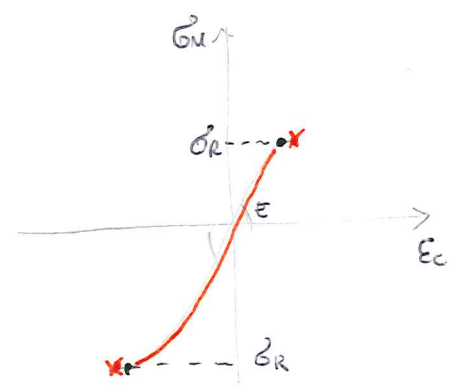
CRITERI DI SICUREZZA

NEI MATERIALI DURI IL COMPORTAMENTO A COMPRESIONE E' ELASTICO



ACCIAIO
ALUMINIO
LEGNO
CS

NEI MATERIALI FUSILI LA ROTTA SI DIVIENE REPENTINAMENTE E IL COMPORTAMENTO NON E' ELASTICO - A COMPRESIONE I VALORI SONO PIU' ELEVATI, I DEFETTI HANNO PIU' INCIDENZA NEL COMPORTAMENTO A TRAZIONE -

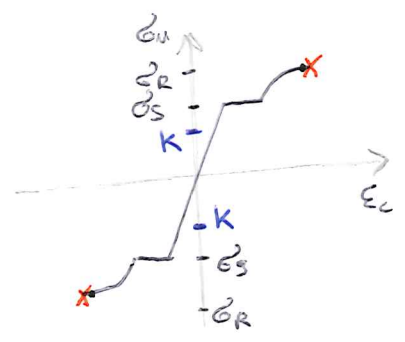


ASPETTA DI DEFINIZIONI PERMANENTI ϵ_p

ROTURA IMPROVVISI

VERBA
GENERICA
LAPINZI

> HOOKEO:



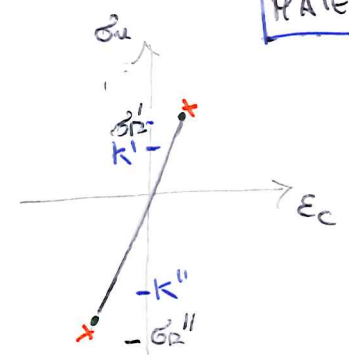
MATERIALI DURI

$K = \sigma_s / \Delta$
 $\Delta =$ COEFFICIENTE DI INCIETTA > 1
 (DIPENDE DALL'AFFIDABILITA' DI PRODOTTORE)

RISPOSTA ELASTICA $-K < \sigma_u < K$

$K =$ TENSIONE AMMISSIBILE
 (UGUALE A TRAZIONE E A COMPRESIONE)

MATERIALI FRAGILI



$K' = \sigma_r' / \Delta$

$K'' = \sigma_r'' / \Delta$

$K' < K''$

RISPOSTA ELASTICA

$-K'' < \sigma_u < K'$

K' TENSIONE AMMISSIBILE A TRAZIONE

K'' TENSIONE AMMISSIBILE A COMPRESIONE

NB: K' E K'' SONO VALORI POSITIVI!

> LE TENSIONI AMMISSIBILI RAPPRESENTANO PERTANTO IL CAMPO ENTO IL QUALE E' LEGATO SENSIBILMENTE IL COMPORTAMENTO DEL CORPO CHE ELASTICO LINEARE

NB - REGIME MONOASSIALE

- PUNTUALI -> VANNO VALUTATE NEI PUNTI PIU' DEBOLIZATI

CRITERIO DI SICUREZZA

TENSIONE AMMISSIBILE \rightarrow CARATTERISCE IN REGIME ELASTICO LA DIPENDENZA TRA LE LEGGI DELL'ELASTICITÀ LINEARE E IL COMPORTAMENTO REALE SICUREZZA DELLA COPERTURA NEL MOMENTO DELLO SPOSTAMENTO O DELLA ROTAZIONE

NEL CASO IN CUI NEL GENERICO PUNTO DELLA STRUTTURA (IL PIÙ SOLLECITATO) LO STATO DI TENSIONE NON È ELASTICO MA CARATTERIZZATO DA 6 COMPONENTI $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \dots, \tau_{xy}$ DEL TENSORE DELLA TENSIONE $[\underline{\sigma}]$ NON È PIÙ UN PARAMETRO DA COMPARARE ALLE TENSIONI AMMISSIBILI MA È NECESSARIO FISSARE DEI CRITERI:

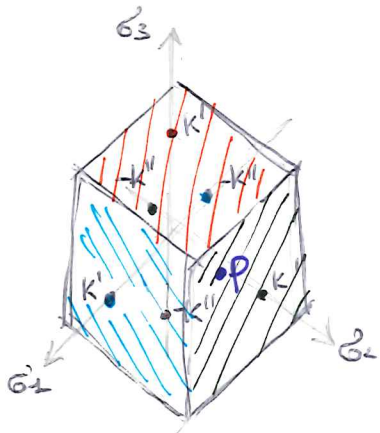
CRITERIO DI SICUREZZA \rightarrow SI SELEZIONA UNA "GRANDEZZA INDICE DEL PERICOLO" - GIP - FUNZIONE DELLO STATO DI SFORTO E LA SI CONFRONTA CON UN VALORE SCALIA DETERMINABILE MEDIANTE PROVE ELASTICHE

I CRITERIO DI CAULI - RANKINE

GIP \rightarrow MASSIMO O MINIMO SFORTO PRINCIPALE

DATO $[\underline{\sigma}]$ $\text{MAX} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \leq k'$ E $\text{MIN} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \geq -k''$

[N.B. IN CASO DI UGUALE INTENSITÀ A TRAZIONE E COMPRESIONE]
 $\text{MAX} \{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} \leq k$

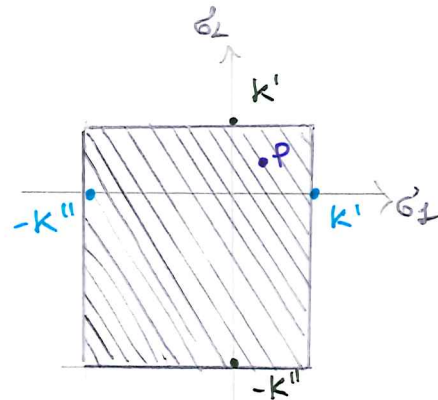


CONFRONTATO UNO STATO $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ [SPAZIO DI HAIG-WESTERGAARD]

INDIVIDUANO 3 COPPIE DI PIANI CHE INTERSECONO GLI ASSI NEI PUNTI DI VALORE k' E $-k''$
 E IL PUNTO P È ALL'INTERNO DEL CUBO, SIAMO IN UNA SITUAZIONE DI SICUREZZA

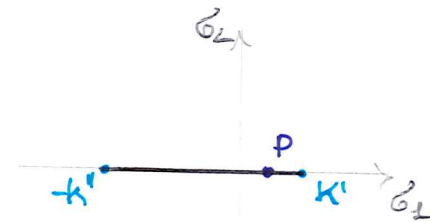
P RAPPRESENTA LO STATO DI SFORTO $P = (\sigma_1^P, \sigma_2^P, \sigma_3^P)$

NEL CASO DI STATO DI SFORTO PIANO $\sigma_3 = 0$



$\text{MAX} \{\sigma_1, \sigma_2\} \leq k'$ e $\text{MIN} \{\sigma_1, \sigma_2\} \geq -k''$

NEL CASO DI STATO DI SFORTO ELASTICO $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

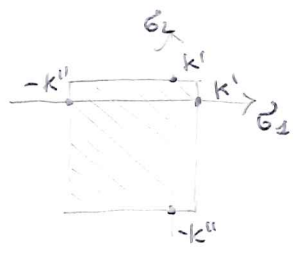


$-k'' \leq \sigma_1 \leq k'$

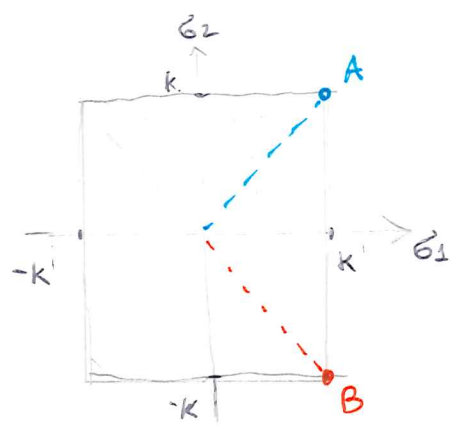
INDIVIDUA LE CONDIZIONI DI SICUREZZA NEL CASO ELASTICO

CRITERIO DI SICUREZZA

IL CRITERIO DI GAUCCIO - RANKINE È IL PIÙ ANTICO E SEMPLICE, HA POCHE LIMITAZIONI
 PUÒ ANALIZZARE BENE PER MATERIALI FRAGILI, IN CUI IL COMPORTAMENTO A COMPRESSIONE È DIVERSO RISPETTO A QUELLO A TENSIONE E $k' \neq k''$



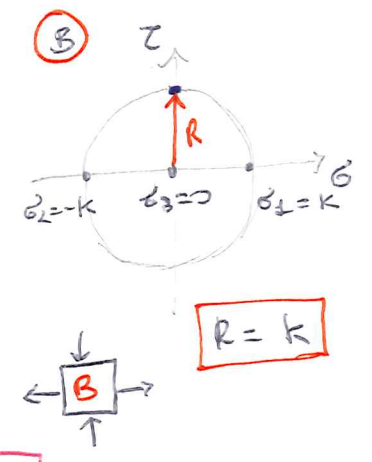
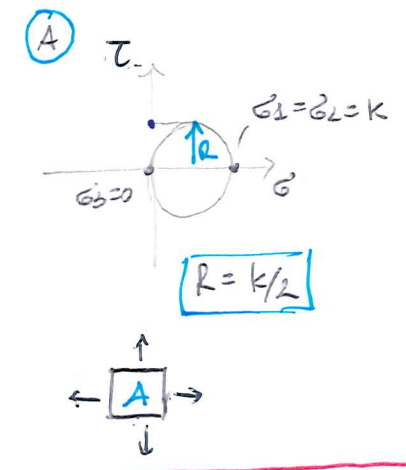
NEL CASO DI MATERIALI DUTTI, INVECE, PUÒ PORTARE A DUE SEMPLIFICAZIONI NON ATTENDIBILI:



A $\sigma_1 = k'$
 $\sigma_2 = k'$

B $\sigma_1 = k$
 $\sigma_2 = -k$

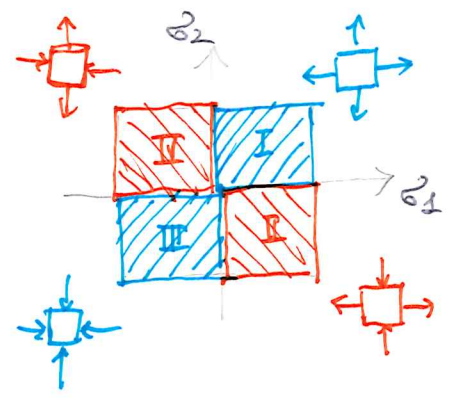
LO STATO DI SOFFIO
 A E QUELLO B
 SAREBBERO UGUALMENTE
 IN SICUREZZA, MA...



* **B È PIÙ SICURO DI A**

NEI QUADRANTI IN CUI σ_1 E σ_2 HANNO LO STESSO SEGNO
 IL CRITERIO VA BENE

NEI QUADRANTI IN CUI σ_1 E σ_2 HANNO SEGNI DIVERSI,
 L'APPLICAZIONE NON VA BENE



CRITERI DI SICUREZZA

UNA PRIMA EVOLUZIONE DEL CRITERIO DI CAULERO-MANKIEWIC' E' IL:

II CRITERIO DI GASTHOFF -> CIP MASSIMA O MINIMA DILATAZIONE

* LEGGE DI HOOKE

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 = \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 = \frac{1}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases}$$

IN CONDIZIONI TRODATTURALI ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \sigma_1 \Rightarrow \epsilon' = \frac{1}{E} k = \frac{k'}{E} \\ \sigma - \epsilon'' &= \frac{1}{E} (-k'') = -\frac{k''}{E} \end{aligned}$$

$$\text{MAX} \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \} \leq \epsilon' = \frac{k'}{E} *$$

$$\text{MIN} \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \} \geq \bar{\epsilon}'' = -\frac{k''}{E} *$$

N.B. $k' = k'' = k$ MATERIALI DUTTI

$$\text{MAX} \{ |\epsilon_1|, |\epsilon_2|, |\epsilon_3| \} \leq \epsilon = \frac{k}{E} *$$

N.B. ϵ' E ϵ'' SONO QUANTITA' POSITIVE!

SI PUO' PASTARE DUE DEFORMATION AGU FORN:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} \sigma_{id1} \\ \text{ANALOGAMENTE} \quad \epsilon_2 &= \frac{1}{E} \sigma_{id2} \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} \sigma_{id3} \end{aligned}$$

OV σ_{id} = TENSIONE IDEALE -> SFORZO TRODATTURALE CORRISPONDENTE CHE PRODUCE LA MASSA DILATAZIONE

ANCA IL CRITERIO PUO' ESSERE ESPRESO IN FUNZIONE DELLE TENSIONI IDEALI σ_{id} :

$$\text{MAX} \left\{ \frac{1}{E} \sigma_{id1}, \frac{1}{E} \sigma_{id2}, \frac{1}{E} \sigma_{id3} \right\} \leq \frac{k'}{E}$$

$$\text{MAX} \{ \sigma_{id1}, \sigma_{id2}, \sigma_{id3} \} \leq k'$$

ANALOGAMENTE: $\text{MIN} \{ \sigma_{id1}, \sigma_{id2}, \sigma_{id3} \} \geq -k''$

N.B. $k' = k'' = k$ MATERIALI DUTTI

$$\text{MAX} \{ |\sigma_{id1}|, |\sigma_{id2}|, |\sigma_{id3}| \} \leq k$$

POSSIAMO RAPPRESENTARE ANCHE PER IL CRITERIO DI GASTHOFF IL DOMINIO, INDIVIDUANDO 3 COPPIE DI PIANI CHE INTERSECANO GLI ASSI 1, 2, 3 I PIANI SONO PARALLELI TRA LORO A 2 A 2, MA NON PUO' PERPENDICOLARI AGLI ASSI, GENERANDO UN CUBO SCHEMATO

NEL CASO DELLO STATO PIANO DI SFORZO $\sigma_3 = 0$ MA $\sigma_{id3} \neq 0$

$$\begin{cases} \sigma_{id1} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \\ \sigma_{id2} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \\ \sigma_{id3} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{MAX} \{ \sigma_1 - \nu \sigma_2, \sigma_2 - \nu \sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \leq k' \quad \text{I}$$

$$\text{MIN} \{ \sigma_1 - \nu \sigma_2, \sigma_2 - \nu \sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \geq -k'' \quad \text{II}$$

I

II

I $\max \{ \sigma_1 - \nu \sigma_2, \sigma_2 - \nu \sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \leq K'$

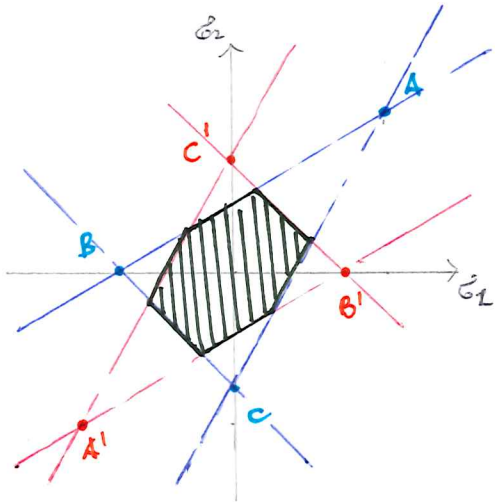
DETERMINA 3 RETTE CHE SI INTERSECANO, A 2 A 2, NEI PUNTI:

$A = \left(\frac{K'}{1-\nu}, \frac{K'}{1-\nu} \right); B = \left(-\frac{K'}{\nu}, 0 \right); C = \left(0, -\frac{K'}{\nu} \right)$

II $\min \{ \sigma_1 - \nu \sigma_2, \sigma_2 - \nu \sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \geq -K''$

DETERMINA 3 RETTE CHE SI INTERSECANO, A 2 A 2, NEI PUNTI:

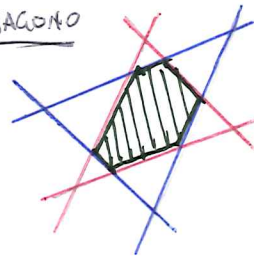
$A' = \left(-\frac{K''}{1-\nu}, -\frac{K''}{1-\nu} \right); B' = \left(+\frac{K''}{\nu}, 0 \right); C' = \left(0, +\frac{K''}{\nu} \right)$



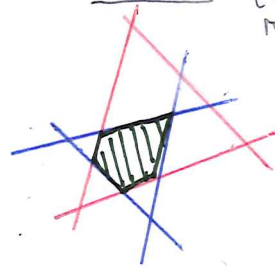
LA REGIONE SICURA E' QUELLA COMPRESA DALL'INTERSEZIONE DELLE 2 REGIONI, COMPRESA TRA LE 3 RETTE DETERMINATE DA **I** E LE 3 RETTE DETERMINATE DA **II**

LA FORMA EFFETTIVA DIPENDE DAL VALORE DEL COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE ν , OLTRE CHE DAI VALORI DI K' E K''

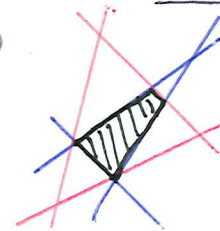
ESAGONO



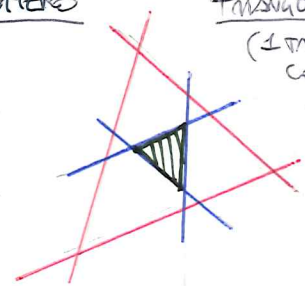
PENTAGONO (1 TRIANGOLO MOLTO PICCOLO)



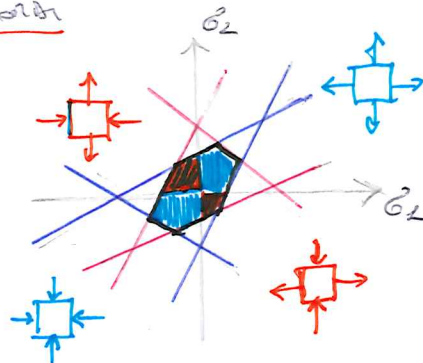
QUADRILATERO



TRIANGOLO (1 TRIANGOLO COMPRESO NEGLI ALTRI)



RISPETTO AL CRITERIO DI MAXWELL-MANKINE, IL CRITERIO DI QUADROF TIENE CONTO DELLE DIFFERENZE CHE CI SONO TRA I QUADRANTI IN CUI σ_1 E σ_2 SONO CONCORDI E QUELLI IN CUI SONO DISCORDI



LE AREE \blacksquare SONO PIU' GRANDI DELLE \blacksquare

ANCHE IL CRITERIO DI QUADROF E' PIU' PIU' ADATTO AI SISTEMI FASCIATI CHE AI SISTEMI MISTI

CRITERIO DI SICUREZZA

NEL CASO DI MATERIE DUTTE, IL COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE È LIMITATO ESPONENZIALMENTE DAL RAGGIUNGIMENTO DELLA TENSIONE DI SNERVAMENTO σ_s . COL RIFERIMENTO AD UN STATO DI TENSIONE CARATTERIZZATO DALLE 3 COMPONENTI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ NON NULLE SI PONE IL PROBLEMA DI DEFINIRE QUALI COMBINAZIONI DI ESSE PRODCA SNERVAMENTO DEL MATERIALE
 DA EVIDENTE SPERIMENTAZIONE, LO SNERVAMENTO DEL MATERIALE NON È INFLUENZATO DA UN REGIME DI PRESSIONI DI TIPO IDROSTATICO
 NEL CASO DEI MATERIE DUTTE, LA GRANDEZZA INDICE DEL PERICOLO DA PRENDERE IN CONSIDERAZIONE SONO LE TENSIONI TANGENZIALI.

III CRITERIO DI TRASCIA → CIP MAXIMO SFORZO TANGENZIALE

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \leq k/2$$

[N.B. MATERIE DUTTE $k' = k'' = k$ COMPORTAMENTO DI TRASCIA A COMPRESIONE E A TENSIONE]

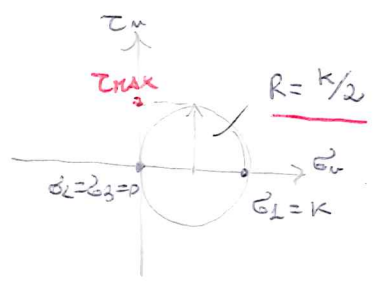
IL VALORE LIMITE DELLA TENSIONE TANGENZIALE τ_{max} IN REGIME ELASTICO LINEARE È INDICATA $\tau_{max} \leq k/2$

ALLORA LA VERIFICA DI SICUREZZA DEL MATERIALE RISULTA SODDISFATTA QUANDO:

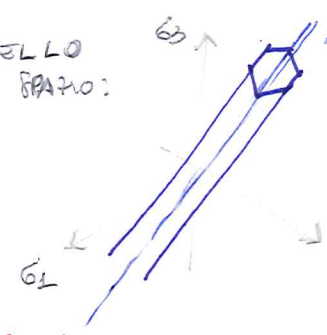
$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} \leq k$$

NEL CASO MONOASSIALE

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



NELLO STATO:



ASSE IDROSTATICO $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

LE 3 COPPIE DI PUNTI DEFINISCONO UN PUNTO ELLISSOIDALE CHE HA PER ASSE, L'ASSE IDROSTATICO

N.B. NON È UN UOLO CHIUSO, MA APERTO

> I MATERIE DUTTE NON VANNO IN CURA PER SFORZO IDROSTATICO MA PER SFORZO DEVIATORICO

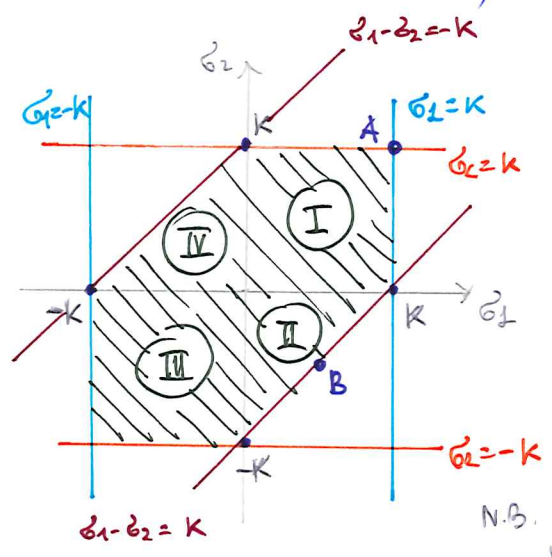
NEL CASO DI STATO PIANO

DI TENSIONE $\sigma_3 = 0$

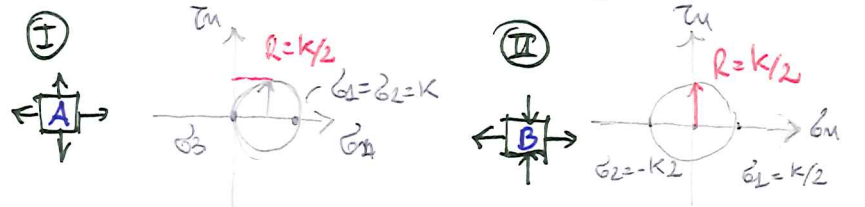
$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} \leq k$$

DA LUOGO A 3 COPPIE DI RETTE:

- $|\sigma_1 - \sigma_2| = k \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = k \\ \sigma_1 - \sigma_2 = -k \end{cases}$
- $|\sigma_1| = k \begin{cases} \sigma_1 = k \\ -\sigma_1 = k \end{cases}$
- $|\sigma_2| = k \begin{cases} \sigma_2 = k \\ -\sigma_2 = k \end{cases}$



NEI QUADRANTI I E III IL CRITERIO DI TRASCIA COINCIDE CON QUELLO DI CAULLEY-HANKINE; NEI QUADRANTI II E IV SI RAGGIUNGE LA FRONTIERA PURA, PER IL VALORE $k/2$



IN A E B IL VALORE DI τ_{max} È LO STESSO $\tau_{max} = k/2$

N.B. NEL PIANO L'ESAGONO DI TRASCIA NON È NECESSARIO, PERCHÉ L'ASSE IDROSTATICO NON COINCIDE NE È PRODOTTO CON L'ASSE σ_3

CRITERIO DI HUBER-HENCKY-VON MISES

GRANDEZZA INDICE DEL PENICOLO: MASSIMO LAVORO DEL DEVIATORE DI FORMA

SCOMPOSIZIONE DEL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ (SCRITTO IN TERMINI DI SFORZI PRINCIPALI):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\phi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE IDROSTATICA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE DEVIATORICA}}$$

DOVE $\phi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ E' LO SFORZO TENDENTE PRINCIPALE: $\phi = \frac{I_1}{3}$ OV $I_1 =$ INVARIANTE PRIMA DI $\underline{\underline{\sigma}}$

E

$$s_1 = \sigma_1 - \phi = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$s_2 = \sigma_2 - \phi = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}$$

$$s_3 = \sigma_3 - \phi = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

RICORDANDO CHE $I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$ E' L'INVARIANTE SECONDO DI $\underline{\underline{\sigma}}$

ANALOGAMENTE POSSIAMO DEFINIRE GLI INVARIANTI DEL DEVIATORE DEGLI SFORZI:

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\phi = 0$$

$$J_2 = -(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3) = -[(\sigma_1 - \phi)(\sigma_2 - \phi) + (\sigma_1 - \phi)(\sigma_3 - \phi) + (\sigma_2 - \phi)(\sigma_3 - \phi)] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - \phi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_3) + 3\phi^2] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 2\phi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\phi^2] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 2\phi(3\phi) + 3\phi^2] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 6\phi^2 + 3\phi^2] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3] + 3\phi^2 = I_2 + \frac{1}{3}I_1^2$$

SCOMPOSIZIONE DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI $\underline{\underline{\epsilon}}$ (SCRITTO IN TERMINI DI DILATAZIONI PRINCIPALI):

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_V}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE VOLUMETRICA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE DEVIATORICA}}$$

DOVE $\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ E' LA DEFORMAZIONE DI UN VOLUME CUBICO INTAGLIATO SECONDO LE DIREZIONI PRINCIPALI: $\epsilon_V = I_1'$, OV $I_1' =$ INVARIANTE PRIMA DI $\underline{\underline{\epsilon}}$

$$\epsilon \quad \bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{2\epsilon_1 - (\epsilon_2 + \epsilon_3)}{3}$$

$$\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{2\epsilon_2 - (\epsilon_1 + \epsilon_3)}{3}$$

$$\bar{\epsilon}_3 = \epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{2\epsilon_3 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{3}$$

RICORDANDO CHE $I_2' = -(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3)$ È L'INVARIANTE SECONDO DI $\underline{\epsilon}$

ANALOGAMENTE POSSIAMO DEFINIRE GLI INVARIANTI DEL DEVIAZIONE DELLE DEFORMAZIONI:

$$J_1' = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - 3\frac{\epsilon_V}{3} = 0$$

$$\begin{aligned} J_2' &= -[\bar{\epsilon}_1\bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_1\bar{\epsilon}_3 + \bar{\epsilon}_2\bar{\epsilon}_3] = -\left[\left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_V}{3}\right)\left(\epsilon_2 - \frac{\epsilon_V}{3}\right) + \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_V}{3}\right)\left(\epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3}\right) + \left(\epsilon_2 - \frac{\epsilon_V}{3}\right)\left(\epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3}\right)\right] = \\ &= -\left[\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3}(2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3) + 3\left(\frac{\epsilon_V}{3}\right)^2\right] = \\ &= -\left[\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 - \frac{2}{3}\epsilon_V^2 + \frac{1}{3}\epsilon_V^2\right] = \\ &= -\left[\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3\right] + \frac{1}{3}\epsilon_V^2 = I_2' + \frac{1}{3}I_1'^2 \end{aligned}$$

PER IL LEGAME ELASTICO:

$$\epsilon_1 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Allora: $\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{3\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

MA $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = I_1 = 3\phi$

QUINDI: $\epsilon_V = \frac{1-2\nu}{E} 3\phi$

PERIANTO:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 &= \epsilon_1 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \left[\frac{1-2\nu+\nu}{E}\right] (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \left[\frac{1-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right] \end{aligned}$$

$$\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \left[\frac{1-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\bar{\epsilon}_3 = \epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \left[\frac{1-\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

L'ENERGIA TOTALE (LAVORO INTEGRATO DURANTE LA DEFORMAZIONE) VALE:

$$\oint_{TOT} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (S_1 + \phi) \left(E_1 + \frac{E_V}{3} \right) + (S_2 + \phi) \left(E_2 + \frac{E_V}{3} \right) + (S_3 + \phi) \left(E_3 + \frac{E_V}{3} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(S_1 E_1 + \phi \frac{E_V}{3} + \phi E_1 + S_1 \frac{E_V}{3} \right) + \left(S_2 E_2 + \phi \frac{E_V}{3} + \phi E_2 + S_2 \frac{E_V}{3} \right) + \left(S_3 E_3 + \phi \frac{E_V}{3} + \phi E_3 + S_3 \frac{E_V}{3} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3 E_3 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \phi \cdot E_V \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \phi (E_1 + E_2 + E_3) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (S_1 + S_2 + S_3) \frac{E_V}{3} \right\}$$

$$\Delta = (E_1 + E_2 + E_3) = \gamma_1 = 0 \quad \text{e} \quad (S_1 + S_2 + S_3) = \gamma_1 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left\{ S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3 E_3 \right\} = \epsilon_{DEV} \quad \text{E' L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER VARIATIONE DI FORMA}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left\{ \phi \cdot E_V \right\} = \epsilon_{VOL} \quad \text{E' L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER VARIATIONE DI VOLUME}$$

PER IL CRITERIO DI HUBER-HENCKY-VON MISES, CONDIZIONATO ϵ_{DEV}

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2} \left\{ S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3 E_3 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left(E_1 - \frac{E_V}{3} \right) \left(\epsilon_1 - \phi \right) + \left(E_2 - \frac{E_V}{3} \right) \left(\epsilon_2 - \phi \right) + \left(E_3 - \frac{E_V}{3} \right) \left(\epsilon_3 - \phi \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ E_1 \epsilon_1 + E_2 \epsilon_2 + E_3 \epsilon_3 - \frac{E_V}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) - \phi (E_1 + E_2 + E_3) + 3 \frac{E_V}{3} \phi \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ E_1 \epsilon_1 + E_2 \epsilon_2 + E_3 \epsilon_3 - E_V \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} \right) - \cancel{\phi E_V} + \cancel{E_V \phi} \right\} =$$

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2} \left\{ E_1 \epsilon_1 + E_2 \epsilon_2 + E_3 \epsilon_3 - E_V \phi \right\} \quad \text{TENENDO CONTO DEL LEGAME:}$$

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\nu}{E} \epsilon_1^2 - \frac{\nu}{E} \epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + \frac{1+\nu}{E} \epsilon_2^2 - \frac{\nu}{E} \epsilon_2 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + \frac{1+\nu}{E} \epsilon_3^2 - \frac{\nu}{E} \epsilon_3 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right.$$

$$\left. - \frac{1-2\nu}{E} 3 \phi^2 \right\} =$$

in.3. $\phi = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3}$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\nu}{E} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - \frac{\nu}{E} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 - \frac{1-2\nu}{E} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\nu}{E} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - \frac{3\nu}{E} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{3} - \frac{1-2\nu}{E} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\nu}{E} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{3} \left[\frac{3\nu}{E} + \frac{1-2\nu}{E} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\nu}{E} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2}{3} \left[\frac{1+\nu}{E} \right] \right\} =$$

Ricondando alle $I_1 = (b_1 + b_2 + b_3) \in I_2 = -(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3)$ Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{DEV} &= \frac{1}{2} \frac{1+V}{E} \left[(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{(b_1 + b_2 + b_3)^2}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1+V}{E} \left[I_1^2 + 2I_2 - \frac{1}{3} I_1^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{1+V}{E} \left[\frac{2}{3} I_1^2 + 2I_2 \right] = \frac{1}{2} \frac{2(1+V)}{E} \left[\frac{1}{3} I_1^2 + I_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{q} \left[I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{q} y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{DEV} &= \frac{1}{2q} y_2 = \frac{1}{2q} \left\{ -b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3 + \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2q} \left\{ - (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + \frac{1}{3} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1 b_2 + 2b_1 b_3 + 2b_2 b_3) \right\} = \\ &= \frac{1}{2q} \left\{ - \frac{3}{3} (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + \frac{1}{3} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1 b_2 + 2b_1 b_3 + 2b_2 b_3) \right\} = \\ &= \frac{1}{2q} \left\{ \frac{1}{3} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3) \right\} = \frac{1}{6q} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3) \end{aligned}$$

IN CONDIZIONE DI SFORTO RISONABILE : $b_1 = K, b_2 = 0, b_3 = 0$

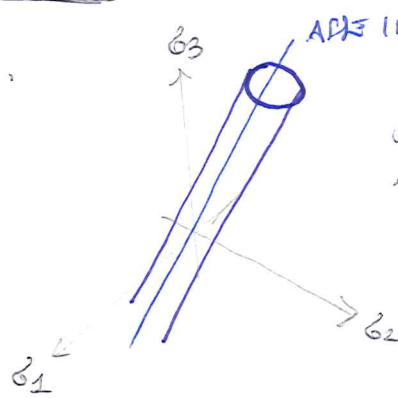
$$\sum_{DEV} = \frac{1}{6q} K^2 = \bar{\sum}_{DEV}$$

PER LA VERIFICA DEVE ESSERE $\sum_{DEV} \leq \bar{\sum}_{DEV} \Rightarrow \frac{1}{6q} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3) \leq \frac{1}{6q} K^2$

E QUINDI: $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3} \leq K$

CITERIO DI SICUREZZA

NELLO STATO:



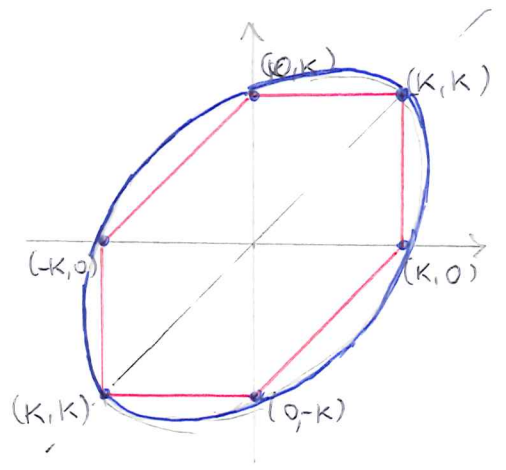
ASSE IDROSTATICO $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

IL CITERIO DEFINISCE UN CILINDRO ELITTICO AVENTE COME ASSE IDROSTATICO

NEL CASO DELLO STATO PIANO DI TENSIONE

$\sigma_3 = 0$

$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq K$ $\rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = K^2$



ESEMPIO DA PARE A C/A

$\sigma = \begin{bmatrix} -120 & 70 & 0 \\ 70 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa $K = 200$ MPa

(*) INFATTI SE $\dot{\epsilon}_{DEV} = \frac{1}{6G} [3I_2 + I_1^2]$
 $= \frac{1}{6G} \{ 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(2\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \}$
 $\dot{\epsilon}_{DEV} = \frac{1}{6G} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]$

AL CITERIO

N.B. ANALOGA FEMME A TRESCA, NEL PIANO $\sigma_1 \sigma_2$ NON ABBIAMO UN CERCHIO, PERCHE' L'ASSE IDROSTATICO E' DIVENTO E NON PARALLELO ALL'ASSE σ_3

EQUAZIONE DI UN'ELIPSE CHE HA L'ASSE MAGGIORE ORIENTATO CON LA BIFRETTICE DEL I E III QUADRANTE

N.B. L'ELIPSE DI VON MISES E' CIRCOSCRITTA ALL'ESAGONO DI TRESCA PARTI INFERIORI PER I PUNTI IN CORNER SUI LE RETTE DI TRESCA

\rightarrow SE $\sigma_1 = \sigma_2$ $\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_1^2 = K^2 \rightarrow 3\sigma_1^2 = K^2 \rightarrow \sigma_1 = \frac{K}{\sqrt{3}} > \frac{K}{2}$ (TRESCA)
 C'E' PIU' PARAME NEI QUADRANTI II E IV MARETO A TRESCA

N.B. SI PUO' USARE IL CITERIO DI VON MISES DIRETTAMENTE IN COMPONENTI CARATTERISTICHE

$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2} \leq K$ (*)

E NEL CASO PIANO: $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$

$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq K$

ESEGUIRE LA VERIFICA UTILizzando I 4 CITERIO DI SICUREZZA

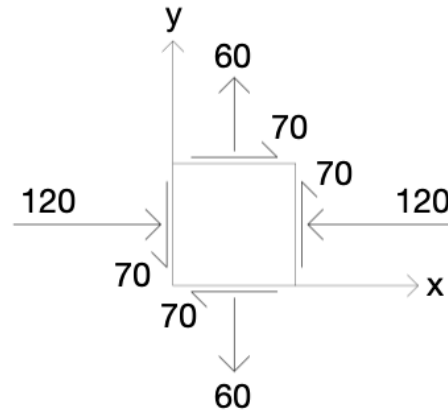
ESERCIZIO

Assegnato lo stato di sforzo piano σ applicare i criteri di sicurezza e procedere alla verifica.

Proprietà del materiale: $E = 200 \text{ GPa}$; $\nu = 0.25$.

Tensione ammissibile $k = 200 \text{ MPa}$ ($k' = k'' = k$).

$$\sigma = \begin{bmatrix} -120 & 70 & 0 \\ 70 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



Calcolo delle tensioni principali:

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 84.018 \text{ MPa}$$

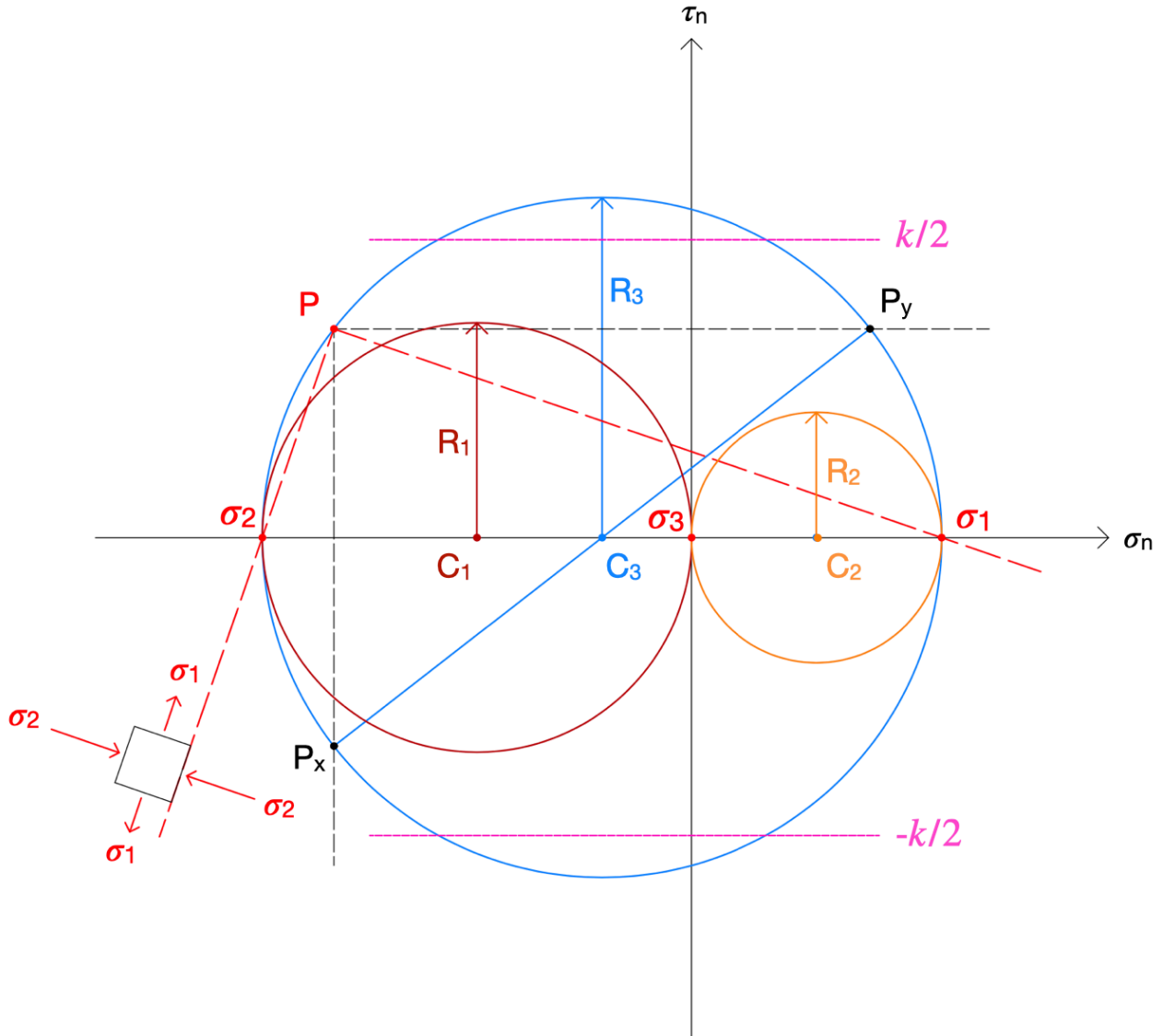
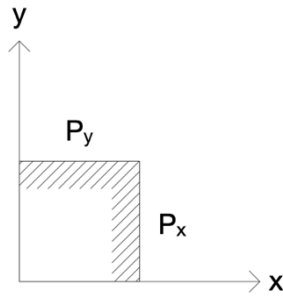
$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -144.018 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0.000 \text{ MPa}$$

Cerchi di Mohr:

$$P_x = (-120, -70)$$

$$P_y = (60, 70)$$



$$C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad R_1 = \left| \frac{\sigma_2}{2} \right| = 72.009 \text{ MPa}$$

$$C_2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad R_2 = \left| \frac{\sigma_1}{2} \right| = 42.009 \text{ MPa}$$

$$C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \quad R_3 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = 114.018 \text{ MPa}$$

Criterio di **Galilei-Rankine**, *GIP*: massima o minima tensione principale

$$MAX \{ \sigma_1, \sigma_2 \} \leq k' = k$$

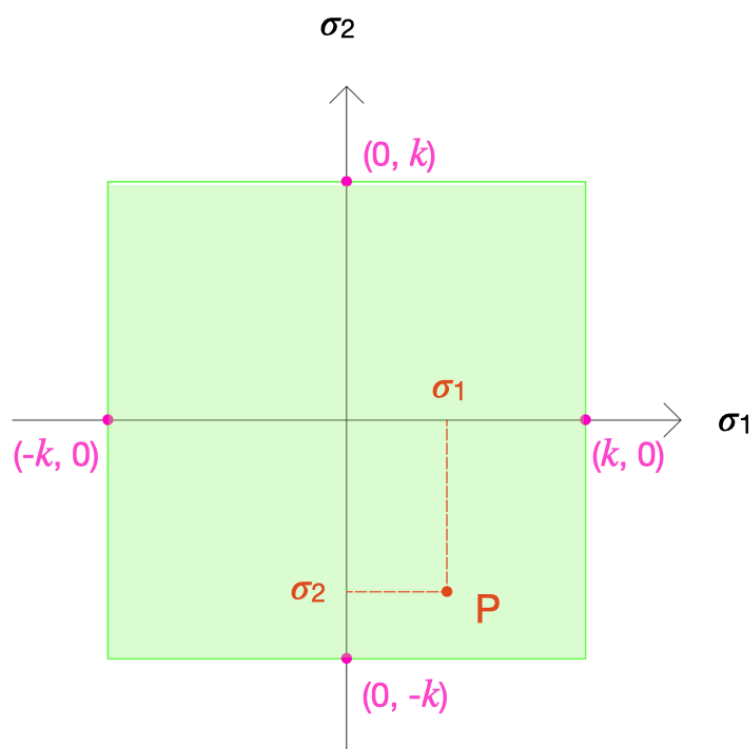
$$MIN \{ \sigma_1, \sigma_2 \} \geq -k'' = -k$$

$$MAX \{ 84.018, -144.018 \} \leq 200 \text{ MPa}$$

84.018 MPa < 200 MPa – **verificato**

$$MIN \{ 84.018, -144.018 \} \geq -200 \text{ MPa}$$

-144.018 MPa > -200 MPa – **verificato**



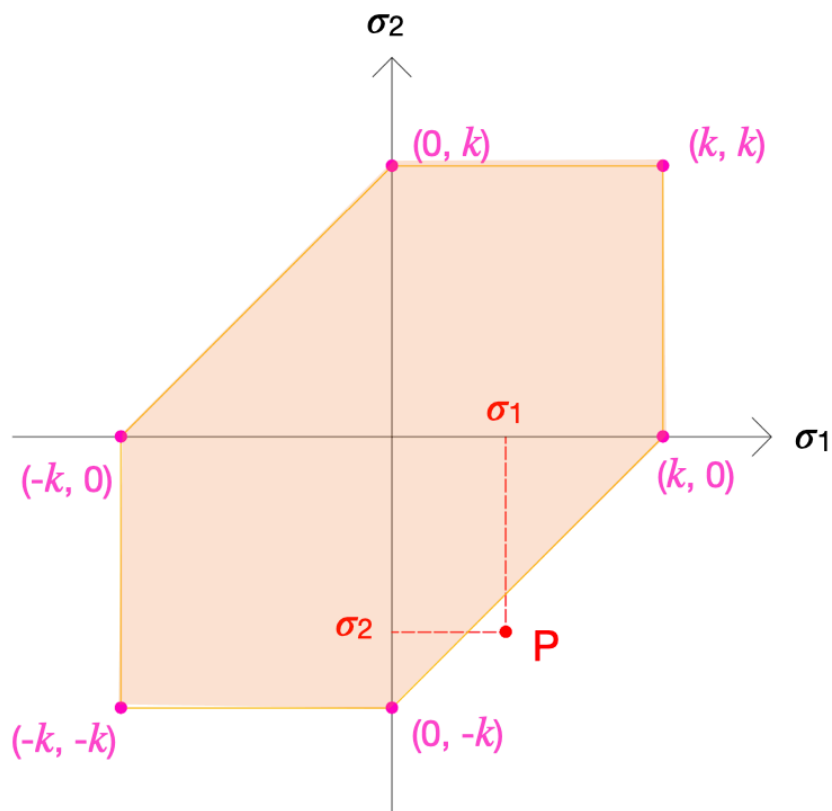
Criterio di **Tresca**, *GIP*: massima tensione tangenziale

$$\text{MAX} \{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leq k$$

$$\text{MAX} \{|84.018 - (-144.018)|, |84.018|, |144.018|\} \leq 200 \text{ MPa}$$

$$\text{MAX} \{228.036, 84.018, 144.018\} \leq 200 \text{ MPa}$$

228.036 MPa > 200 MPa – **non verificato**



Criterio di **Huber-Hencky-Von Mises**, *GIP*: massimo lavoro del deviatore di forma

In componenti principali di tensione:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq k$$

$$\sqrt{(84.018)^2 + (-144.018)^2 - (84.018)(-144.018)} \leq 200 \text{ MPa}$$

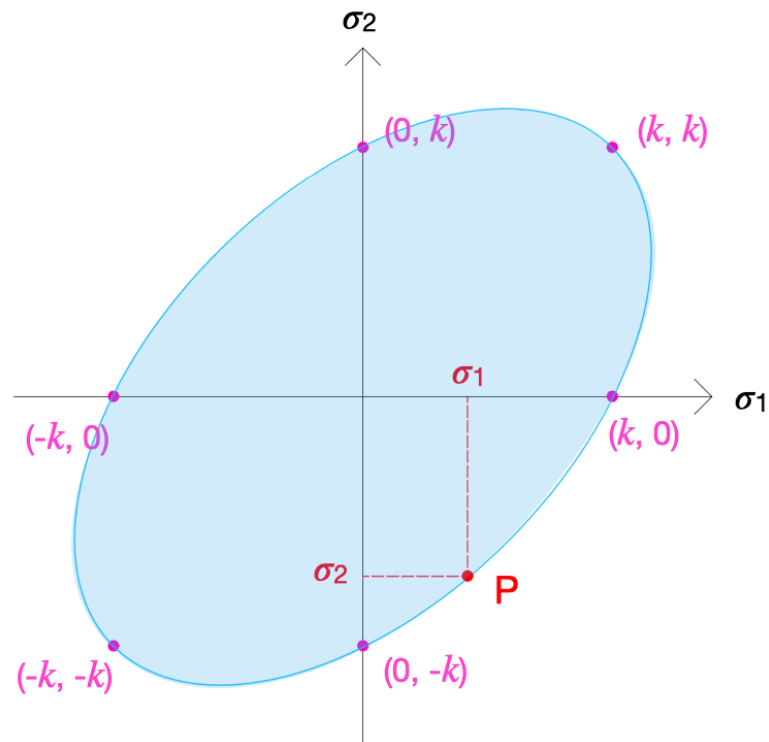
$$\sqrt{39900.000} = 199.750 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa} - \text{verificato}$$

In componenti cartesiane di tensione:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq k$$

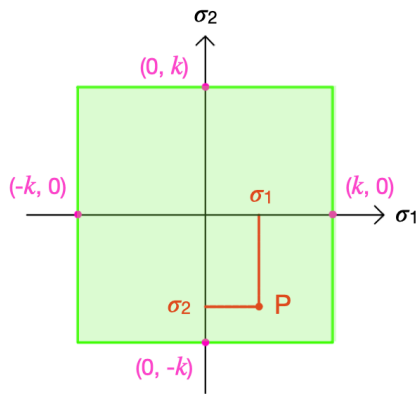
$$\sqrt{(-120)^2 + (60)^2 - (-120)(60) + 3(70)^2} \leq 200 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{39900.000} = 199.750 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa} - \text{verificato}$$

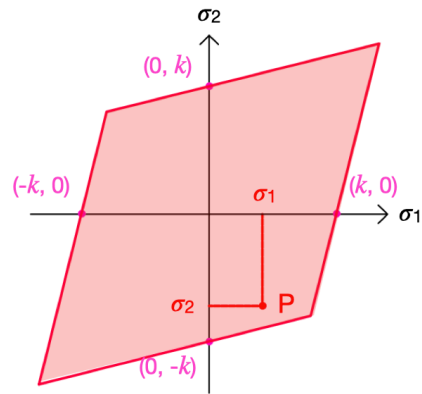


Confronto tra i criteri:

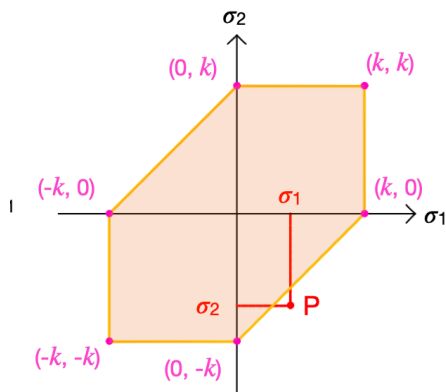
Galilei-Rankine



Grashof



Tresca



Huber-Hencky-Von-Mises

