IL LEGAME COSTITUTIVO

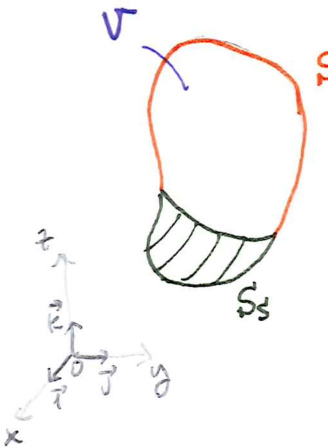
ABBIAMO DEFINITO: LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO CHE VINCOLANO GLI SFORZI INTERNI $[\underline{\sigma}]$ IN UN MEZZO CONTINUO SOGGETTO A DETERMINATE AZIONI ESTERNE $\{\vec p\}$ E $\{\vec F\}$ - $\boxed{\text{ANALISI DELLA TENSIONE}}$ - E LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA CHE VINCOLANO LE DEFORMAZIONI $[\underline{\varepsilon}]$ CHE TALE MEZZO SUBISCE - $\boxed{\text{ANALISI DELLA DEFORMAZIONE}}$. INOLTRE ABBIAMO IDENTIFICATO UN PRINCIPIO GENERALE DI CARATTERE STATICO GEOMETRICO CHE CONSENTE DI CORRELARE IN FORMA INTEGRALE GLI ASPETTI DUALI DELL'EQUILIBRIO E DELLA CONGRUENZA, L'IDENTITÀ INTEGRALE FONDAMENTALE NELLA MECCANICA DEI SOLIDI $\mathcal{L}_{ve} = \mathcal{L}_{vi}$ - $\boxed{\text{PLV PER IL SOLIDO DEFORMABILE}}$.

TALI CONCETTI SONO STATI DEDOTTI SENZA CONSIDERARE LA NATURA DEL MATERIALE COSTITUENTE IL MEZZO, E SONO VALIDI PER QUALUNQUE MEZZO CONTINUO. È EVIDENTE PERÒ CHE IL PROBLEMA DELLA DEFINIZIONE DELLO STATO DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE IN UN MEZZO CONTINUO SOGGETTO A DETERMINATE FORZE ESTERNE NON PUÒ ESSERE RISOLTO AVVALENDOSI ESCLUSIVAMENTE DI CONSIDERAZIONI STATICHE E GEOMETRICHE SENZA METTERE IN GIOCO LA NATURA MECCANICA DEL MATERIALE COSTITUENTE IL MEZZO.

DA UN PUNTO DI VISTA MATEMATICO ABBIAMO VISTO CHE IL NUMERO DI INCOGNITE - LE 6 COMPONENTI DI $[\underline{\sigma}]$ E LE 3 COMPONENTI DI $\vec S = (u, v, w)$ - CHE CONSENTONO DI DEFINIRE IL REGIME DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE È MAGGIORE DELLE EQUAZIONI CHE ABBIAMO A DISPOSIZIONE - LE 3 EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO $\partial \tau_{ij}/\partial i + F_j = 0$. SONO QUINDI NECESSARIE PER RISOLVERE IL PROBLEMA ALTRE 6 RELAZIONI CHE COLLEGHINO MUTUALMENTE LE 6 COMPONENTI DI $[\underline{\varepsilon}]$ CON LE 3 DI $\vec S$, DENOMINATE EQUAZIONI COSTITUTIVE O DI LEGAME - $\boxed{\text{LEGAME COSTITUTIVO}}$

TALI RELAZIONI NON POSSONO CHE ESSERE DIPENDENTI DALLA NATURA DEL MATERIALE COSTITUENTE: LEGANO TENSIONI E DEFORMAZIONI, OVVERO ESPRIMONO LE LEGGI FISICHE CHE GOVERNANO IL MODO DI OPPORSI DI UN ELEMENTO DI VOLUME A TUTTE LE POSSIBILI DEFORMAZIONI CHE PUÒ SUBIRE.

NEL CORSO LIMITIAMO LO STUDIO AI SOLIDI ELASTICI → $\boxed{\text{ELASTICITÀ LINEARE}}$ - DI CUI EVIDENZIAMO LE PROPRIETÀ SULLA BASE DI CONSIDERAZIONI DI TIPO ENERGETICO



[NB. CARICO $S_F = S_1$; $S_S = S_2$]

- SU $\boxed{S_F}$ - CONTORNO LIBERO - SONO ASSEGNATE (NOTE) FORZE DI SUPERFICIE $\vec p$ - SONO QUINDI INCOGNITI GLI SPOSTAMENTI
- SU $\boxed{S_S}$ - CONTORNO VINCOLATO - È ASSEGNATO (NOTO) LO SPOSTAMENTO $\vec S$ - PER SEMPLICITÀ IPOTIZZIAMO $\vec S = \vec 0$ (INCASTRO)
- SU $\boxed{V}$ - VOLUME - SONO APPLICATE (NOTE) FORZE DI MASSA $\vec F$
- $S_F \cup S_S = S$ (UNIONE) E $S_F \cap S_S = \emptyset$ (INTERSEZIONE)
- IL SOLIDO È IN EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE DELLE FORZE DI SUPERFICIE $\vec p$ E DI MASSA $\vec F$ CHE PRODUCONO UNO STATO DI SFORZO $[\underline{\sigma}]$ SU TUTTO IL VOLUME
- IL SOLIDO SUBISCE SPOSTAMENTI $\vec S$ E DEFORMAZIONI $[\underline{\varepsilon}]$
- $\mathcal{L}_{VE} = \mathcal{L}_{VI}$ PLV $\quad \int_V \vec F \times \vec S \, dV + \int_{S_F} \vec p \times \vec S \, dS = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) \, dV$

* SE INCREMENTIAMO LE FORZE DI UNA QUANTITÀ $\delta\vec{F}$, $\delta\vec{p}$ E GLI SFORZI $\delta\underline{\underline{\sigma}}$, IL SOLIDO SUBIRÀ INCREMENTI DI SPOSTAMENTO $\delta\vec{S}$ E DEFORMAZIONE $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}$

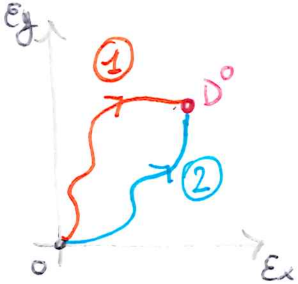
▶ SI PUÒ APPLICARE IL PLV AL SISTEMA IN EQUILIBRIO DI FORZE $\vec{F}$ E $\vec{p}$ E SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ E AL SISTEMA CONGRUENTE DI SPOSTAMENTI $\delta\vec{S}$ E DEFORMAZIONI $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}$. LA VARIAZIONE DEL LAVORO ESTERNO VALE:
$$\delta\mathcal{L}_{E} = \int_V (\vec{F}\times\delta\vec{S})\,dV + \int_{S_F} (\vec{p}\times\delta\vec{S})\,dS$$

PER IL PLV $\delta\mathcal{L}_E = \delta\mathcal{L}_i$, QUINDI $\delta\mathcal{L}_i = \int_V (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz})\,dV$

POSSIAMO GENERALIZZARE IL COMPORTAMENTO DEL SOLIDO COME UNA MOLLA CHE IMMAGAZZINA L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE, E LA RILASCIA QUANDO SI TORNA ALLA CONFIGURAZIONE INDEFORMATA. → ENERGIA COME LAVORO CHE COMPIONO LE TENSIONI SULLE RISPETTIVE DEFORMAZIONI

$\delta\mathcal{L}_i = \int_V \delta\Phi\,dV$ CON $\boxed{\delta\Phi = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}}$ INCREMENTO DI LAVORO INTERNO PER UNITÀ DI VOLUME

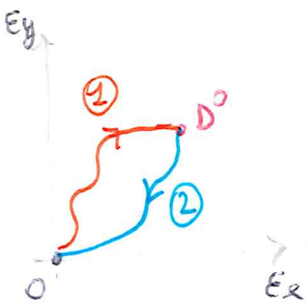
IMMAGINIAMO DI INTRODURRE UNO SPAZIO IDEALE A 6 DIMENSIONI DELLE DEFORMAZIONI, OVVERO LE CUI COORDINATE SONO RAPPRESENTATE DALLE COMPONENTI DI $[\underline{\underline{\varepsilon}}]$, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, IN UN GENERICO PUNTO DEL CORPO. RESTRINGIAMO L'ATTENZIONE A 2 DELLE 6 COMPONENTI, AD ESEMPIO ε_x E ε_y, E CI SPOSTIAMO DAL PUNTO O – ORIGINE DELLO SPAZIO IDEALE DI RIFERIMENTO (IN CUI $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) – AL PUNTO D°, CORRISPONDENTE ALLO STATO DI DEFORMAZIONE FINALE DELLA MATERIA DELL'ELEMENTO DI VOLUME UNITARIO CONSIDERATO – $D^\circ = (\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_y^\circ, \varepsilon_z^\circ, \gamma_{xy}^\circ, \gamma_{xz}^\circ, \gamma_{yz}^\circ)$ [N.B. APICE $^\circ$ = VALORE NOTO]



IL LAVORO INTERNO PER UNITÀ DI VOLUME VALE: $\Phi = \int_0^{D^\circ} \delta\phi$, OVVERO:
$$\Phi = \int_0^{D^\circ} (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz})$$

PER UN CORPO GENERICO, Φ DIPENDE IN GENERALE NON SOLO DALLO STATO DI DEFORMAZIONE FINALE D° MA ANCHE DALLA EVOLUZIONE CHE IL GENERICO PUNTO $D = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$, RELATIVO A UNO STATO INTERMEDIO DI DEFORMAZIONE, HA SUBITO PRIMA DI ARRIVARE ALLA POSIZIONE FINALE D°

OVVERO Φ_1 CALCOLATO LUNGO IL PERCORSO 1 È DIVERSO DA Φ_2 CALCOLATO LUNGO IL PERCORSO 2 $\quad \Phi_1 \neq \Phi_2$



ALLORA $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 \neq 0$ SE I PERCORSI 1 E 2 SONO DIVERSI

SE CONSIDERIAMO IL PERCORSO "CHIUSO" 1-2 ALLORA IL MATERIALE, DOPO AVER RAGGIUNTO LO STATO DI DEFORMAZIONE D° E POI ESSERE TORNATO ALLA CONFIGURAZIONE INDEFORMATA O, ACQUISTA O PERDE ENERGIA: MA QUESTO NON È ACCETTABILE FISICAMENTE!

* Φ DEVE DIPENDERE SOLO DALLO STATO INIZIALE O E DA QUELLO FINALE D° E NON DAL PERCORSO SEGUITO *

> UN MATERIALE SI DICE **ELASTICO** QUANDO LA REVERSIBILITÀ SI TRADUCE NEL REQUISITO CHE IL LAVORO INTERNO PER UNITÀ DI VOLUME Φ DIPENDE SOLO DALLA DEFORMAZIONE FINALE $D^\circ \equiv (\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_y^\circ, \varepsilon_z^\circ, \gamma_{xy}^\circ, \gamma_{xz}^\circ, \gamma_{yz}^\circ)$ E NON DAL PERCORSO DI DEFORMAZIONE

IN TERMINI DELL'ANALISI MATEMATICA, DOVENDO Φ DIPENDERE SOLO DA D°, ALLORA LA FUNZIONE INTEGRANDA $\Phi = \int_0^{D^\circ} \delta\phi$ DEVE ESSERE UN DIFFERENZIALE ESATTO DEI PARAMETRI $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, OVVERO: $\boxed{\delta\phi = d\Phi}$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_z}\delta\varepsilon_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}}\delta\gamma_{xz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}\delta\gamma_{yz}$$

DEVE ALLORA RISULTARE*:

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y}, \quad \sigma_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}$$

LA FUNZIONE Φ, CHE DIPENDE DALLE SOLE DEFORMAZIONI $\Phi = \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$, È DETTA **POTENZIALE ELASTICO**

[N.B. POTENZIALE, IN FISICA, È UNA FUNZIONE INTRODOTTA PER CARATTERIZZARE PARTICOLARI CAMPI DI FORZA POSIZIONALI ED ESTESA, SOTTO OPPORTUNE CONDIZIONI, A CAMPI VETTORIALI DI NATURA QUALSIASI. CONSENTE DI OTTENERE ULTERIORI INFORMAZIONI DALLE SUE DERIVATE]

* NOTO Φ È POSSIBILE CORRELARE LE TENSIONI CON LE DEFORMAZIONI*: $\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x}$, etc., FORNISCONO I 6 LEGAMI ELASTICI CHE PERMETTONO DI VALUTARE LE TENSIONI CORRISPONDENTI A UN GENERICO STATO DI DEFORMAZIONE

SE $\delta\Phi$ È UN DIFFERENZIALE ESATTO, LO È ANCHE LA FUNZIONE $\delta\psi = \varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \varepsilon_z\delta\sigma_z + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{xz}\delta\tau_{xz} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz}$

DOVE $\delta\psi$ È COSTRUITA IN MANIERA ANALOGA A $\delta\phi$ MA CONSIDERANDO GLI INCREMENTI DI SFORZO $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{yz}$

SOMMANDOLI SI HA:

$$\delta\phi + \delta\psi = \overbrace{[\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \dots + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}]}^{\delta\phi} + \overbrace{[\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \dots + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz}]}^{\delta\psi} = \delta[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \dots + \tau_{yz}\gamma_{yz}]$$

OVVERO SI OTTIENE LA VARIAZIONE COMPLESSIVA DEI PRODOTTI $\sigma_x\varepsilon_x, \sigma_y\varepsilon_y, \dots, \tau_{yz}\varepsilon_{yz}$ → QUINDI ANCHE $\delta\psi$ È UN DIFFERENZIALE ESATTO

LA FUNZIONE ψ, CHE DIPENDE DALLE SOLE COMPONENTI DI SFORZO $\psi = \psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$, È DETTA **POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE**

E PER ANALOGIA:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}}$$

* NOTO ψ È POSSIBILE CORRELARE LE DEFORMAZIONI CON LE TENSIONI

IL COMPORTAMENTO DI UN CORPO ELASTICO È COMPLETAMENTE DEFINITO SE SONO NOTE LE ESPRESSIONI DEL $\boxed{\text{POTENZIALE ELASTICO } \Phi}$ O DEL $\boxed{\text{POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE } \Psi}$ (N.B. NON OCCORRE CONOSCERLE ENTRAMBE)

> NOTO Φ, IL LEGAME SFORZO-DEFORMAZIONI È FORNITO DALLE DERIVATE DI Φ RISPETTO A $\underline{\varepsilon}$: $\boxed{\partial\phi/\partial\varepsilon_{ij}}$

> NOTO Ψ, IL LEGAME DEFORMAZIONI-SFORZO È FORNITO DALLE DERIVATE DI Ψ RISPETTO A $\underline{\sigma}$: $\boxed{\partial\psi/\partial\sigma_{ij}}$

UTILIZZIAMO LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR PER CALCOLARE IL VALORE DI Φ, O DI Ψ, IN CONFIGURAZIONE DEFORMATA D°:

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) = \Phi_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x}\right)_0 \varepsilon_x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_y}\right)_0 \varepsilon_y + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_z}\right)_0 \varepsilon_z + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma_{xy}}\right)_0 \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma_{xz}}\right)\gamma_{xz} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma_{yz}}\right)\gamma_{yz} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x^2}\right)_0 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\varepsilon_y}\right)_0 \varepsilon_x\varepsilon_y + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\varepsilon_z}\right)_0 \varepsilon_x\varepsilon_z + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\gamma_{xy}}\right)_0 \varepsilon_x\gamma_{xy} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\gamma_{xz}}\right)_0 \varepsilon_x\gamma_{xz} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\gamma_{yz}}\right)_0 \varepsilon_x\gamma_{yz}\right\} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_y\partial\varepsilon_x}\right)_0 \varepsilon_y\varepsilon_x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_y^2}\right)_0 \varepsilon_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_y\partial\gamma_{yz}}\right)_0 \varepsilon_y\gamma_{yz}\right\} + \dots$$

... COSÌ VIA PER TUTTE LE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE

CI POSSIAMO FERMARE AI TERMINI QUADRATICI (DERIVATE SECONDE)

LA FUNZIONE Φ È ALLORA COSTITUITA COSÌ:

- 1 TERMINE COSTANTE : Φ_0
- 6 TERMINI LINEARI : DERIVATE PRIME
- 36 TERMINI QUADRATICI : DERIVATE SECONDE

POSSIAMO ALLORA RICAVARE LE COMPONENTI DI $[\underline{\sigma}]$ DERIVANDO Φ. AD ESEMPIO $\sigma_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_x}$

$$\sigma_x = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_x} = 0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_x}\right)_0 + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x^2}\right)_0 2\varepsilon_x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\varepsilon_y}\right)_0 \varepsilon_y + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\varepsilon_z}\right)_0 \varepsilon_z + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\gamma_{xy}}\right)_0 \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\gamma_{xz}}\right)_0 \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_x\partial\gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz}\right\} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_y\partial\varepsilon_x}\right)_0 \varepsilon_y + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varepsilon_z\partial\varepsilon_x}\right)_0 \varepsilon_z + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma_{xy}\partial\varepsilon_x}\right)_0 \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma_{xz}\partial\varepsilon_x}\right)_0 \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma_{yz}\partial\varepsilon_x}\right)_0 \gamma_{yz}\right\}$$

N.B. I PRIMI 6 TERMINI QUADRATICI SONO TUTTI DERIVATI RISPETTO A ε_x ... MA ε_x APPARE ANCHE NEGLI ALTRI TERMINI QUADRATICI RELATIVI ALLE ALTRE COMPONENTI DI $\underline{\varepsilon}$

CI SONO DEI TERMINI UGUALI (AD ESEMPIO QUELLI CHE CONTENGONO $\partial\varepsilon_x\,\partial\varepsilon_y$, ETC.) QUINDI POSSIAMO RAGGRUPPARE

ALLORA:
$$\sigma_x = \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_x^2}\right)_0 \varepsilon_x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)_0 \varepsilon_y + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z}\right)_0 \varepsilon_z + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}}\right)_0 \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}}\right)_0 \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz}}$$

N.B. IL PRIMO TERMINE* + TUTTI I TERMINI TRA PARENTESI SONO COSTANTI

* [N.B. IN O NON CI SONO DEFORMAZIONI $\rightarrow \underline{\sigma} = 0$ - ANCHE SE POTREBBERO ESSERCI DELLE AUTOTENSIONI]

IN MANIERA ANALOGA SI RICAVANO ANCHE LE ALTRE COMPONENTI DI $\underline{\sigma}$

AD ESEMPIO
$$\sigma_y = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_y^2}\right)_0 \varepsilon_y + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x}\right)_0 \varepsilon_x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z}\right)_0 \varepsilon_z + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}}\right)_0 \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xz}}\right)_0 \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz}$$

E COSÌ VIA PER $\sigma_z = \dfrac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_z}$, $\tau_{xy} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xy}}$, $\tau_{xz} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xz}}$ E $\tau_{yz} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}}$

SI HA PERTANTO UNA DIPENDENZA LINEARE TRA SFORZI E DEFORMAZIONI $\rightarrow$ SOLIDO ELASTICO LINEARE

N.B. SI FANNO INOLTRE LE SEGUENTI IPOTESI:

- NELLO SVILUPPO DEL POTENZIALE ELASTICO Φ CI SI ARRESTA AL 2° ORDINE PER AVERE UN LEGAME LINEARE
- SI ASSUME CHE $\Phi_0 = 0$
- SI ASSUME CHE $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y}\right)_0 = 0, \ldots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 = 0$ PER AVERE SFORZI NULLI NELLO STATO INDEFORMATO

$\rightarrow$ SEGUE CHE IL POTENZIALE ELASTICO COSÌ OTTENUTO È UNA FUNZIONE QUADRATICA DELLE DEFORMAZIONI:

$$\Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x^2}\right)\varepsilon_x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)\varepsilon_x \varepsilon_y + \ldots + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)\varepsilon_x \gamma_{yz} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y^2}\right)\varepsilon_y^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z}\right)\varepsilon_y \varepsilon_z + \ldots + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)\gamma_{yz}^2\right\}$$

CHE FORNISCE IL LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE DIRETTO

POSSIAMO SCRIVERE IL $\boxed{\text{LEGAME}}$ IN FORMA MATRICIALE

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\
 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\
 & & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_z^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\
 & & & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xy}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\
 & \text{Sym} & & & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\
 & & & & & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}
$$

N.B.

ε_x → 6 VALORI DIVERSI

ε_y → 5 VALORI DIVERSI / 1 UGUALE

ε_z → 4 VALORI DIVERSI / 2 UGUALI

γ_{xy} → 3 VALORI DIVERSI / 3 UGUALI

γ_{xz} → 2 VALORI DIVERSI / 4 UGUALI

γ_{yz} → 1 VALORE DIVERSO / 5 UGUALI

21 VALORI "DIVERSI"

↑ NOTAZIONE DI VOIGT

MATRICE SIMMETRICA: 36 COMPONENTI DI CUI 21 INDIPENDENTI

↳ $\left[\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\right]$ TENSORE ELASTICO (TENSORE COSTITUTIVO ELASTICO) (4° ORDINE)

ALLORA IL LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE DIRETTO SI PUÒ ESPRIMERE IN FORMA MATRICIALE: $\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}}$

Avremo potuto procedere in maniera analoga utilizzando il potenziale elastico complementare ψ, e ottenere il legame costitutivo elastico lineare inverso. In forma matriciale:

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_x\partial\sigma_y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_x\partial\sigma_z}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_x\partial\tau_{xy}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_x\partial\tau_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_x\partial\tau_{yz}}\right)_0 \\
 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_y^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_y\partial\sigma_z}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\sigma_y\partial\tau_{xy}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_y\partial\tau_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_y\partial\tau_{yz}}\right)_0 \\
 & & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_z^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\sigma_z\partial\tau_{xy}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_z\partial\tau_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma_z\partial\tau_{yz}}\right)_0 \\
 & & & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_{xy}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_{xy}\partial\tau_{xz}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_{xy}\partial\tau_{yz}}\right)_0 \\
 & \text{sym} & & & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_{xz}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_{xz}\partial\tau_{yz}}\right)_0 \\
 & & & & & \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_{yz}^2}\right)_0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}
$$

N.B.

σ_x → 6 valori diversi

σ_y → 5 valori diversi / 1 uguale

σ_z → 4 valori diversi / 2 uguali

τ_{xy} → 3 valori diversi / 3 uguali

τ_{xz} → 2 valori diversi / 4 uguali

τ_{yz} → 1 valore diverso / 5 uguali

21 valori "diversi"

Notazione di Voigt

Matrice simmetrica: 36 componenti di cui 21 indipendenti

↳ $\underline{\underline{D}}$ tensore elastico inverso (4° ordine)

Allora il legame costitutivo elastico lineare indiretto in forma matriciale:

$$\boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\sigma}}$$

LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE DIRETTO : $\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}}$

LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE INVERSO : $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\sigma}}}$

MA SE $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}$ E $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\sigma}}$ ALLORA → $\boxed{\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}^{-1}}$ OVVERO $\underline{\underline{D}}$ È L'INVERSO DI $\underline{\underline{C}}$

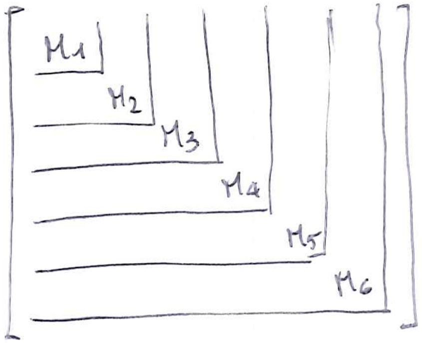
IL FATTO CHE TALE INVERSIONE ESISTA E SIA UNICA DERIVA DALLA CONSIDERAZIONE CHE SIA Φ (POTENZIALE ELASTICO) CHE Ψ (POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE) RAPPRESENTANO IL LAVORO NECESSARIO PER PORTARE L'UNITÀ DI VOLUME DEL CORPO DALLO STATO NATURALE INDEFORMATO A QUELLO FINALE DEFORMATO.

TALI QUANTITÀ DEVONO PERTANTO ESSERE SEMPRE POSITIVE E NULLE SE E SOLO SE RISULTANO IDENTICAMENTE NULLE TUTTE LE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE (PER Φ) O DI TENSIONE (PER Ψ)

MATEMATICAMENTE, AFFINCHÉ QUESTO AVVENGA, ALLORA IL DETERMINANTE DI $\underline{\underline{C}}$ O DI $\underline{\underline{D}}$ DEVE ESSERE POSITIVO CON TUTTI I SUOI MINORI PRINCIPALI DOMINANTI* PER GARANTIRE CHE Φ E Ψ ABBIANO UN MINIMO ASSOLUTO QUANDO LE DEFORMAZIONI O GLI SFORZI ASSUMANO VALORI TUTTI NULLI [*N.B. PRINCIPIO DI STAZIONARIETÀ DI UNA FUNZIONE A PIÙ VARIABILI]

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \rightarrow \Phi = \delta\Phi = 0$ o $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \rightarrow \Psi = \delta\Psi = 0$

I MINORI PRINCIPALI DOMINANTI SONO:
IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DAGLI ELEMENTI DELLA 1° RIGA E 1° COLONNA (M_1); IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DALLE PRIME 2 RIGHE E 2 COLONNE (M_2); ECC.



$M_1 > 0$
$M_2 > 0$
$M_3 > 0$
$M_4 > 0$
$M_5 > 0$
$M_6 > 0$ ($M_6 = \det \underline{\underline{C}}$ o $\det \underline{\underline{D}}$)

LA CONDIZIONE DI POSITIVITÀ DEI DETERMINANTI M_i ($i=1,6$) GARANTISCE L'INVERTIBILITÀ DEI SISTEMI

[N.B. $\underline{\underline{C}}$ E $\underline{\underline{D}}$ SONO MATRICI "HESSIANE": DATA UNA FUNZIONE REALE DI n VARIABILI, SE TUTTE LE SUE DERIVATE SECONDE ESISTONO ALLORA SI DEFINISCE "MATRICE HESSIANA" DELLA FUNZIONE f LA MATRICE $Hf(x)$ →

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$Hf(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$]

PER UN SOLIDO ELASTICO LINEARE LE EQUAZIONI DEL LEGAME $\left\{ \varepsilon_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x}, \sigma_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y}, \dots, \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} \right.$ OPPURE $\varepsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x}, \varepsilon_y = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y}, \dots, \gamma_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}} \Big\}$ SONO DEFINIBILI NON APPENA SIANO NOTI I 21 COEFFICIENTI DI $[\underline{\underline{C}}]$ TENSORE ELASTICO OTTENUTI DALLE DERIVATE SECONDE DI Φ O DI $[\underline{\underline{D}}]$, INVERSO DI $[\underline{\underline{C}}]$ ($\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$), OTTENUTI DALLE DERIVATE SECONDE DI Ψ, NELL'ORIGINE:

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\varepsilon}} \quad \text{o} \quad \boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\sigma}}$$

LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE (DIRETTO O INVERSO)

CONSIDERIAMO IL POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE Ψ:

$\Psi = \Psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ IN COMPONENTI CARTESIANE

$\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha, \beta, \gamma)$ IN COMPONENTI PRINCIPALI

DOVE α, β, γ SONO GLI ANGOLI DI EULERO CHE IDENTIFICANO LA POSIZIONE DELLA TERNA PRINCIPALE RISPETTO AGLI ASSI CARTESIANI. ESPRESSO COSÌ Ψ, RISULTA EVIDENTE CHE ESSO DIPENDA SIA DAL VALORE DELLE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ CHE DALL'ORIENTAZIONE DELLE GIACITURE SULLE QUALI TALI TENSIONI SI ESERCITANO (DEFINITE DAI 3 ANGOLI DI EULERO α, β, γ)

> FACCIAMO L'IPOTESI CHE LE PROPRIETÀ MECCANICHE DEL MATERIALE SIANO IDENTICHE IN TUTTE LE DIREZIONI USCENTI DAL PUNTO CONSIDERATO

ALLORA Ψ NON DIPENDERÀ PIÙ DALL'ORIENTAZIONE DELLA TERNA: $\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

QUESTA IPOTESI È DETTA $\boxed{\text{IPOTESI DI ISOTROPIA}}$ → LEGAME ELASTICO LINEARE ISOTROPO → ADATTO A MATERIALI POLICRISTALLINI O CON DISTRIBUZIONE CASUALE DELLA MICROSTRUTTURA INTERNA, AD ESEMPIO: METALLI, LAPIDEI, CALCESTRUZZO, ETC.

L'ESPRESSIONE QUADRATICA DI Ψ NELLE 3 VARIABILI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ È:

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(Q_{11}\sigma_1^2 + Q_{22}\sigma_2^2 + Q_{33}\sigma_3^2 + 2Q_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2Q_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2Q_{23}\sigma_2\sigma_3\right)$$

IN CONDIZIONI DI ISOTROPIA Ψ PERMANE IMMUTATO SE SI SCAMBIANO MUTUAMENTE LE TENSIONI PRINCIPALI, OVVERO DEVONO SUSSISTERE LE RELAZIONI $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33}$ E $Q_{12} = Q_{13} = Q_{23}$ E CIOÈ Ψ NON DIPENDE DALLE DIREZIONI ED È POSSIBILE RIDURRE LE 6 COSTANTI ELASTICHE Q_{ij}; CON $i, j = 1, 2, 3$ A 2 SOLE COSTANTI INDIPENDENTI:

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \boxed{\dfrac{1}{E}} \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \boxed{-\dfrac{\nu}{E}} \end{cases}$$

ALLORA IL POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE PER UN MATERIALE ELASTICO LINEARE ISOTROPO È:

$$\psi = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right]$$ (IN TERMINI DI COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE)

DOVE $\boxed{E}$ È IL MODULO ELASTICO LONGITUDINALE O MODULO DI YOUNG

ν È IL COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE O COEFFICIENTE DI POISSON

POSSIAMO RICAVARE ALLORA $\varepsilon_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}$ ED $\varepsilon_3 = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_3}$

PER RICAVARE $\varepsilon_x = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y}$, ..., $\gamma_{yz} = \frac{\partial\psi}{\partial\tau_{yz}}$ OCCORRE ESPRIMERE ψ IN TERMINI DI COMPONENTI CARTESIANE DI TENSIONE

POSSIAMO UTILIZZARE GLI INVARIANTI I_1 E I_2 (N.B. I_3 NO PERCHÉ È CUBICO)

$$I_1 = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

$$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3) = \tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)$$

[COMPONENTI PRINCIPALI / COMPONENTI CARTESIANE]

$$\psi = \frac{1}{2E}\left[\underbrace{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)}\ \underbrace{-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)}_{I_2}\right]$$

E NOTANDO CHE $I_1^2 = \underbrace{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)} + 2\underbrace{(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)}$ → È L'OPPOSTO DI $\overbrace{-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)}^{I_2}$

ALLORA $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 = I_1^2+2I_2$

E QUINDI $$\psi = \frac{1}{2E}\left[I_1^2+2I_2+2\nu I_2\right] = \frac{1}{2E}\left[I_1^2+2(1+\nu)I_2\right]$$

ESPRIMENDO I_1 E I_2 IN COMPONENTI CARTESIANE:

$$\psi = \frac{1}{2E}\left\{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2+2(1+\nu)\left[\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\right]\right\}$$

SVILUPPANDO IL QUADRATO $(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2$ E IL PRODOTTO $2(1+\nu)\left[\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\right]$:

$$\psi=\frac{1}{2E}\left\{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+2(\sigma_x\sigma_y+\cancel{\sigma_x\sigma_z}+\sigma_y\sigma_z)+2(1+\nu)\left[\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right]-2(\sigma_x\sigma_y+\cancel{\sigma_x\sigma_z}+\sigma_y\sigma_z)-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\right\}$$

$$\psi=\frac{1}{2E}\left\{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)+2(1+\nu)(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)\right\}$$

SE DERIVIAMO ψ RISPETTO A σ_{ij} OTTENIAMO IL LEGAME: $\varepsilon_{ij}=\partial\psi/\partial\sigma_{ij}$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x}=\frac{1}{\cancel{2}E}\left\{\cancel{2}\sigma_x-\cancel{2}\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right\}=\boxed{\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]}$$

N.B. [PERMUTAZIONE CICLICA DEGLI INDICI $x \to y \to z \to x$]

$$\varepsilon_y=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y}=\frac{1}{\cancel{2}E}\left\{\cancel{2}\sigma_y-\cancel{2}\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right\}=\boxed{\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right]}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_z}=\frac{1}{\cancel{2}E}\left\{\cancel{2}\sigma_z-\cancel{2}\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right\}=\boxed{\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial\psi}{\partial\tau_{xy}}=\frac{1}{\cancel{2}E}\left\{2(1+\nu)(\cancel{2}\tau_{xy})\right\}=\boxed{\frac{2(1+\nu)}{E}}\tau_{xy}$$

DEFINIAMO $\boxed{G=\frac{E}{2(1+\nu)}}$ MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE

$$\gamma_{xy}=\ \text{- - - - - -}\ =\boxed{\frac{1}{G}\tau_{xy}}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial\tau_{xz}}=\frac{1}{\cancel{2}E}\left\{2(1+\nu)(\cancel{2}\tau_{xz})\right\}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}=\boxed{\frac{1}{G}\tau_{xz}}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial\psi}{\partial\tau_{yz}}=\frac{1}{\cancel{2}E}\left\{2(1+\nu)(\cancel{2}\tau_{yz})\right\}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}=\boxed{\frac{1}{G}\tau_{yz}}$$

IL LEGAME ELASTICO LINEARE ISOTROPO IN FORMA MATRICIALE: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\sigma}}$

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & & & b & & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccccc} c & & & d & & \end{array}
\end{array}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}
$$

$\underline{\underline{D}}$ È FATTA A BLOCCHI

- a $\varepsilon \to \sigma$ È PIENO *
- b $\varepsilon \to \tau$ È VUOTO
- c $\gamma \to \sigma$ È VUOTO
- d $\gamma \to \tau$ È DIAGONALE *

* LE DILATAZIONI ε DIPENDONO DA TUTTE LE COMPONENTI NORMALI DI SFORZO

* GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ INVECE DALLA SOLA COMPONENTE INTERESSATA

LE RELAZIONI OTTENUTE SONO STATE FORMULATE DA NAVIER

IL LEGAME ELASTICO LINEARE É DETTO ANCHE LEGGE DI HOOKE GENERALIZZATA PER CORPI ISOTROPI – UT TENSIO SIC VIS –

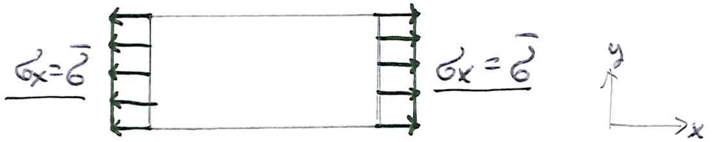
IL LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE ISOTROPO DIPENDE DA 2 PARAMETRI INDIPENDENTI

- E = MODULO DI ELASTICITÀ LONGITUDINALE O DI YOUNG
- ν = COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE O DI POISSON

1 PARAMETRO DERIVATO DA E E ν: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE

* QUALE È IL SIGNIFICATO FISICO DI E, ν, G?

CONSIDERIAMO UNA LAMINA RETTANGOLARE SOGGETTA ALLA SOLA TENSIONE $\sigma_x = \bar{\sigma}$ – NOTA E COSTANTE IN TUTTI I PUNTI – E CON LE ALTRE COMPONENTI DI TENSIONE NULLE $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$



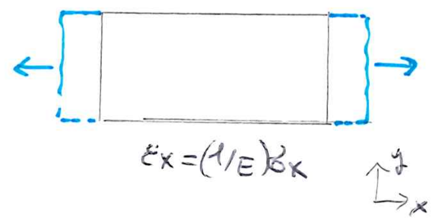
TRAZIONE $\bar{\sigma} > 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\sigma_x = \frac{1}{E}\bar{\sigma}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\frac{\nu}{E}\bar{\sigma}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\frac{\nu}{E}\bar{\sigma}$$

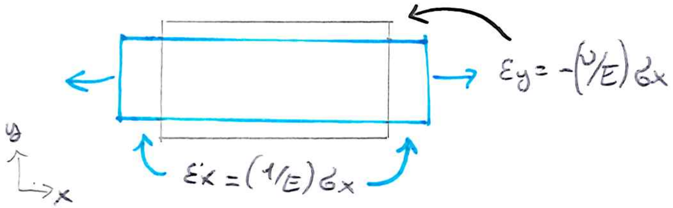
SE $\nu > 0$ E $E > 0$ → LA LAMINA SUBISCE UN ALLUNGAMENTO NELLA DIREZIONE DELLO SFORZO (COME DA EVIDENZE SPERIMENTALI)



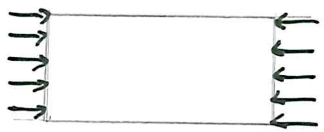
E ALLORA DA ε_x SI PUÒ RICAVARE E → $\boxed{E = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_x} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}}$ È COME LA COSTANTE DI UNA MOLLA, DI CUI E È LA RIGIDITÀ

$[E] = [F]/[L^2] = N/mm^2 = MPa$ [o GPa]

SE $\nu > 0$ E $E > 0$ ALLORA ε_y E ε_z CI DICONO CHE LA LAMINA SI DEVE CONTRARRE IN DIREZIONE y E z

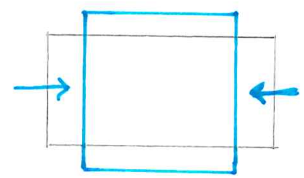


OVVIAMENTE IN CASO DI COMPRESSIONE AVVERRÀ → IL CONTRARIO



COMPRESSIONE

$\sigma_x = \bar{\sigma}$ $\bar{\sigma} < 0$



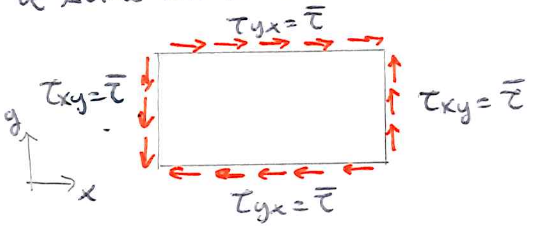
$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$ MA $\frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x$ ALLORA $\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x$ $\quad |-\nu| = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right|$ COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE

$[\nu]$ È UN NUMERO PURO (ADIMENSIONALE)

N.B. ε_x E ε_y HANNO SEMPRE SEGNI OPPOSTI

IN MANIERA ANALOGA $\varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$

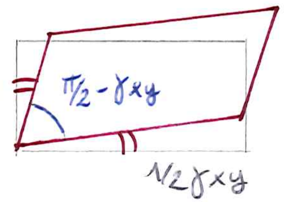
CONSIDERIAMO ORA LA STESSA LAMINA SOGGETTA A TENSIONI TANGENZIALI * $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \bar{\tau}$ – NOTE E COSTANTI IN TUTTI I PUNTI – E CON LE ALTRE COMPONENTI DI TENSIONE NULLE $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ *(N.B. RECIPROCITÀ TENSIONI TANGENZIALI)



LEGGE DI HOOKE:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\bar{\tau}$$

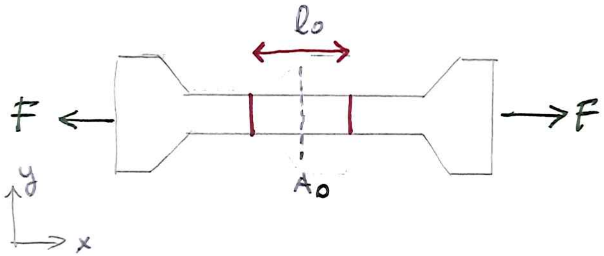
LA LAMINA SUBISCE UNO SCORRIMENTO ANGOLARE COMPLESSIVO γ_{xy} → $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$



ALLORA $\boxed{G = \dfrac{\bar{\tau}}{\gamma_{xy}} = \dfrac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}}$ $[G] = [F]/[L^2] = N/mm^2 = MPa$ [o GPa] [N.B. γ_{xy} È IN RADIANTI – ADIMENSIONALE]

G = MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE È DETTO ANCHE $\boxed{\text{MODULO DI TAGLIO}}$ (SHEAR)

> È POSSIBILE DETERMINARE SPERIMENTALMENTE E e G, E QUINDI ν:



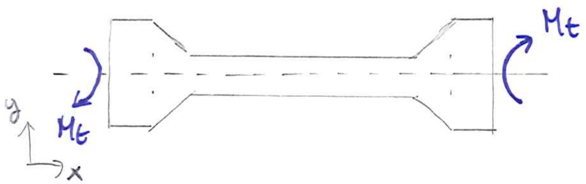
PROVINO A FORMA DI "OSSO DI CANE", SI APPLICA UNA FORZA ALLE ESTREMITÀ $\boxed{\sigma = \dfrac{F}{A_0}}$

SI MISURA L'ALLUNGAMENTO Δl E SI RICAVA ε_x $\quad \varepsilon_x = \dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{\Delta l}{l_0}$

IL RAPPORTO TRA TENSIONE E DEFORMAZIONE CI DA E: $\boxed{E = \sigma_x / \varepsilon_x}$ MODULO DI YOUNG

ESEMPIO: ACCIAIO: $E = 206 \cdot 10^3$ MPa ($\simeq$ 200 GPa)

CALCESTRUZZO: $E = 30 \cdot 10^3$ MPa (30 GPa)



SI APPLICA UNA COPPIA TORCENTE ALLE ESTREMITÀ E SI MISURA LA ROTAZIONE

$\left.\begin{array}{l}\tau_{xy} \text{ DIPENDE DA } M_t \text{ E DALLA FORMA DEL PROVINO} \\ \gamma_{xy} \text{ DIPENDE DALLA ROTAZIONE } \theta\end{array}\right\}$ DAL RAPPORTO RICAVIAMO $\boxed{G = \dfrac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}}$ MODULO DI TAGLIO

IL COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE o DI POISSON ν È PIÙ DIFFICILE DA RICAVARE SPERIMENTALMENTE

MA ESSENDO $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ → $\dfrac{1}{G} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}$ → $\dfrac{E}{G} = 2(1+\nu)$ → $\dfrac{E}{2G} = 1+\nu$ ALLORA $\boxed{\nu = \dfrac{E}{2G} - 1}$

PER POTER INVERTIRE IL LEGAME, $\underline{\underline{D}}$ CHE È LA "MATRICE HESSIANA"* DI $\varphi = \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ DEVE AVERE IL DETERMINANTE E TUTTI I MINORI PRINCIPALI DOMINANTI POSITIVI

* MATRICE HESSIANA DI φ = $\underline{\underline{D}}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\partial\sigma_y} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\partial\tau_{yz}} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\partial\sigma_y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_y^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\partial\tau_{yz}} & & & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{yz}^2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \; \underline{\underline{\sigma}}$$

M_i CON $i = 1,2,3,4,5,6$

$\boxed{M_i > 0}$

$M_1 = 1/E \rightsquigarrow M_1 > 0 \longleftrightarrow E > 0$ MA D'ALTRONDE FISICAMENTE E DEVE ESSERE POSITIVO (SE NO "TIRANDO" IL SOLIDO SI ACCORCEREBBE E VICEVERSA)

$M_2 = \det\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} \rightsquigarrow M_2 = \frac{1}{E^2}(1-\nu^2) > 0 \longleftrightarrow E^2 > 0$ SEMPRE ; $-1 < \nu < 1$

$M_3 = \det\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} \rightsquigarrow M_3 = \frac{1}{E^3}(1+\nu)^2(1-2\nu) > 0 \longleftrightarrow E^3 > 0$ SE $E > 0$; $(1+\nu)^2 > 0$ SEMPRE ; $(1-2\nu) > 0$ SE $\nu < 1/2$

ALLORA DA $M_2 \rightarrow -1 < \nu < 1$ E DA $M_3 \rightarrow \nu < 1/2$ QUINDI RISULTA $\boxed{-1 < \nu < 1/2}$

$M_4 = \det\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \rightsquigarrow M_4 = 1/G \, M_3 > 0 \longleftrightarrow \boxed{G > 0} \longleftrightarrow G > 0$ SE $E > 0$ E $-1 < \nu < 1/2$ $\left[G = \frac{E}{2(1+\nu)}\right]$

$M_5 = 1/G^2 \, M_4 > 0 \longleftrightarrow G^2 > 0$ SEMPRE

$M_6 = 1/G^3 \, M_5 > 0 \longleftrightarrow G^3 > 0$ SE $G > 0$ — SEMPRE SODDISFATTA

* AFFINCHÉ IL LEGAME SIA INVERTIBILE $\boxed{\begin{array}{l} E > 0 \\ -1 < \nu < 1/2 \end{array}}$

N.B. NEI MATERIALI COMUNI $\nu > 0 \rightsquigarrow 0 < \nu < 1/2$

SE $\nu < 0 \rightsquigarrow$ MATERIALI AUXETICI

CON L'INVERSIONE DEL LEGAME POSSIAMO PASSARE DA $\boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\sigma}}$ A $\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\varepsilon}}$ $\left(\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}^{-1}\right)$

LE 3 EQUAZIONI $\gamma_{ij} = 1/G\ \tau_{ij}$ SONO IMMEDIATAMENTE INVERTIBILI:

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 1/G\ \tau_{xy}\\ \gamma_{xz} &= 1/G\ \tau_{xz}\\ \gamma_{yz} &= 1/G\ \tau_{yz}\end{aligned}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}\\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}}$$

LE 3 EQUAZIONI CHE CONTENGONO LE ε POSSIAMO RISCRIVERLE COME:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z) \longrightarrow \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_z) \longrightarrow \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \longrightarrow \varepsilon_z = \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

POSSIAMO SOMMARLE:

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) - \frac{3\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

RICORDANDO CHE $I_1 = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$ E $J_1 = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ $\to (\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \dfrac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \longleftrightarrow \boxed{I_1 = \dfrac{E}{1-2\nu}J_1}$

PRIMO INVARIANTE DELLO SFORZO

PRIMO INVARIANTE DELLA DEFORMAZIONE

(PURCHÉ $1-2\nu \neq 0$!)

LO SFORZO IDROSTATICO INFLUENZA SOLO LA DEFORMAZIONE VOLUMETRICA

SOSTITUENDO NELLE ESPRESSIONI DI $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{\cancel{E}}\frac{\cancel{E}}{(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \rightsquigarrow \frac{1+\nu}{E}\sigma_x = \varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \rightsquigarrow \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = \frac{E}{(1+\nu)}\left[\frac{(1-2\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)}{(1-2\nu)}\right] \rightsquigarrow \boxed{\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)}\left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]}$$

PURCHÉ $1+\nu \neq 0$!

E ANALOGAMENTE:

$$\boxed{\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)}\left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\varepsilon_y + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\right]}$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)}\left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\varepsilon_z + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right]}$$

ALLORA È POSSIBILE OTTENERE IL LEGAME SFORZI – DEFORMAZIONI $\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\varepsilon}}$ (LEGGE DI HOOKE INVERSA)

IN FORMA MATRICIALE:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{2G}{(1-2\nu)}(1-\nu) & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu) & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{1-2\nu}\nu & \frac{2G}{(1-2\nu)}(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}
$$

a b c d

N.B. $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightsquigarrow \boxed{\frac{E}{1+\nu} = 2G}$

ANCHE $\underline{\underline{C}}$ È FATTO A BLOCCHI:

a $\sigma \to \varepsilon$ PIENO

b $\tau \to \varepsilon$ VUOTO

c $\sigma \to \gamma$ VUOTO

d $\tau \to \gamma$ DIAGONALE

NB. $-1 < \nu < 1/2$ COSA ACCEDE PER I VALORI ESTREMI $\nu = 1/2$ E $\nu = -1$?

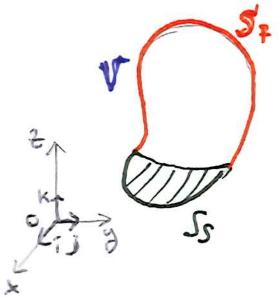
① $\nu = 1/2$ $\quad I_1 = \frac{E}{1-2\nu} \mathcal{Y}_1 \quad$ SE $\nu = 1/2 \quad \frac{E}{1-2\nu} \to \infty$ $\quad \boxed{\nu = 1/2 \text{ INCOMPRIMIBILITÀ}}$

PER VARIARE IL VOLUME DEL SOLIDO OCCORRE 1 SFORZO IDROSTATICO INFINITO

② $\nu = -1$ $\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad$ SE $\nu = -1 \quad \frac{E}{2(1+\nu)} \to \infty$ $\quad \boxed{\nu = -1 \text{ MATERIALE NON DEFORMABILE A TAGLIO}}$

PROBLEMA ELASTICO: NOTE LA GEOMETRIA, LE PROPRIETA' DEL MATERIALE, LE CONDIZIONI A CONTORNO - CARICHI AGENTI E SPOSTAMENTI IMPRESSI - SI VUOLE DETERMINARE: IL CAMPO DI SPOSTAMENTI $\vec{S}$, LO STATO DI DEFORMAZIONE $[\underline{\varepsilon}]$ E LO STATO DI TENSIONE $[\underline{\sigma}]$

PER UN SOLIDO ELASTICO LINEARE ISOTROPO ABBIAMO A DISPOSIZIONE QUESTE EQUAZIONI:



- AZIONI ESTERNE:

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

FORZE DI MASSA, IN V

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

FORZE DI SUPERFICIE, IN S_f (CONTORNO LIBERO)

- SPOSTAMENTI ASSEGNATI:

$u = v = w = 0$, SU S_s

(CONTORNO VINCOLATO)

(I) EQUAZIONI DI EQUILIBRIO (IN TUTTI I PUNTI INTERNI DEL SOLIDO)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \\[2ex]
\tau_{xy} = \tau_{yx} \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} \\
\tau_{yz} = \tau_{zy}
\end{cases}
$$

> 6 EQUAZIONI

- 3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO INTERNO

$$\boxed{\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0}$$

- 3 EQUAZIONI ALGEBRICHE - CONDIZIONI DI RECIPROCITA' DELLE TENSIONI TANGENZIALI

$$\boxed{t_{ij} = t_{ji}}$$

> 9 INCOGNITE $\rightarrow$ $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$

(II) EQUAZIONI DI COMPATIBILITA' CINEMATICA O DI CONGRUENZA

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex]
\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex]
\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex]
\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex]
\gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex]
\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}
\end{cases}
$$

> 6 EQUAZIONI

LEGANO SPOSTAMENTI $\vec{S}$ E DEFORMAZIONI $[\underline{\varepsilon}]$

> 9 INCOGNITE

$\vec{S} = (u, v, w)$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

III EQUAZIONI DI LEGAME COSTITUTIVO

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{cases}$$

> 6 EQUAZIONI

LEGGE DI HOOKE GENERALIZZATA

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

> NESSUNA INCOGNITA AGGIUNTIVA

N.B. LEGAME INVERSO $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \\ \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\right] \\ \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right] \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{cases}$$

$$\boxed{18 \text{ EQUAZIONI} \longleftrightarrow 18 \text{ INCOGNITE}}$$

CONDIZIONE NECESSARIA (MA NON SUFFICIENTE) PER RISOLVERE IL SISTEMA DEL PROBLEMA ELASTICO

I SISTEMI DI EQUAZIONI I, II E III VALGONO IN TUTTI I PUNTI INTERNI DEL CORPO

SUL CONTORNO BISOGNA GARANTIRE:

$$\begin{cases} \sigma_x\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z = p_x \\ \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z = p_y \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z\alpha_z = p_z \end{cases} \quad \text{SU } S_F$$

E

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{SU } S_S$$

• LAVORO DI DEFORMAZIONE NEI SOLIDI ELASTICI LINEARI: IL TEOREMA DI CLAYPERON

PER IL P.L.V. $\delta \mathcal{L}_e = \delta \mathcal{L}_i$ LA VARIAZIONE DEL LAVORO ~~DELLE~~ FORZE ESTERNE EGUAGLIA LA VARIAZIONE, CORRISPONDENTE, DEL LAVORO DELLE TENSIONI

IN PROCESSI DI CARICO DI TIPO QUASI-STATICO (NON C'È TRASFORMAZIONE DI LAVORO IN ENERGIA CINETICA E NON C'È ENERGIA DISSIPATA, IN QUANTO IL CORPO È SUPPOSTO ELASTICO) IL RISULTATO PUÒ ESSERE INTEGRATO A TUTTO IL PROCESSO DI CARICO:

$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$ IL LAVORO DELLE FORZE ESTERNE EGUAGLIA IL LAVORO DELLE FORZE INTERNE (TENSIONI)

IL LAVORO $\mathcal{L}_i$ PER I CORPI ELASTICI RAPPRESENTA L'ENERGIA ELASTICA IMMAGAZZINATA ALL'INTERNO DEL CORPO E CHE QUEST'ULTIMO È IN GRADO DI RESTITUIRE INTEGRALMENTE AL RIMUOVERSI DELLE FORZE ESTERNE

IN UN PROCESSO DI CARICO CHE PORTA UN CORPO COMPOSTO DA UN MATERIALE ELASTICO DALLO STATO INDEFORMATO (PRIVO DI TENSIONI INTERNE) ALLA CONFIGURAZIONE DEFORMATA, L'INCREMENTO DI LAVORO INTERNO PER UNITÀ DI VOLUME VALE:

$$\delta \mathcal{L}_i = \int_V \delta \phi \, dV$$

CON ϕ = POTENZIALE ELASTICO: $\phi = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})$

DOVE $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$ SONO I VALORI FINALI DEGLI SFORZI E $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$ I VALORI FINALI DELLE DEFORMAZIONI

ALLORA IL LAVORO INTERNO VALE: *$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) \, dV$

> SE $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ E $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ RAPPRESENTANO I VALORI FINALI DELLE FORZE DI VOLUME E DI SUPERFICIE, RISPETTIVAMENTE, IN EQUILIBRIO CON I VALORI FINALI DEGLI SFORZI $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$

> E SE $\vec{s} = (u, v, w)$ RAPPRESENTANO I VALORI FINALI DEL CAMPO DI SPOSTAMENTO CONGRUENTI CON LE DEFORMAZIONI $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$

*ALLORA, APPLICANDO IL PLV FACENDO LAVORARE FORZE/SFORZI FINALI PER SPOSTAMENTI/DEFORMAZIONI FINALI SI HA:

$$\int_V \vec{F} \times \vec{s} \, dV + \int_{S_F} \vec{p} \times \vec{s} \, dS = \boxed{\int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{yz}\gamma_{yz}) \, dV} \rightarrow \text{IL DOPPIO DI } \mathcal{L}_i^*$$

[DOPPIO DEL LAVORO DI DEFORMAZIONE]

E QUINDI $\boxed{\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{F} \times \vec{s} \, dV + \frac{1}{2}\int_{S_F} \vec{p} \times \vec{s} \, dS}$ IL LAVORO DI DEFORMAZIONE COMPIUTO DA UN INSIEME DI FORZE ESTERNE È UGUALE ALLA METÀ DEL LAVORO CHE TALI FORZE COMPIREBBERO, PER GLI SPOSTAMENTI EFFETTIVI, SE CONSERVASSERO COSTANTEMENTE LA LORO INTENSITÀ FINALE

TEOREMA DI CLAYPERON

NOTA 1. SI OSSERVI CHE PER OTTENERE IL LEGAME ELASTICO INVERSO PER UN MATERIALE ELASTICO-LINEARE ISOTROPO SI SAREBBE POTUTO SEGUIRE QUESTA STRADA, DUALE DI QUELLA UTILIZZATA PER OTTENERE IL LEGAME ELASTICO DIRETTO, PARTENDO DALLA DEFINIZIONE DEL POTENZIALE ELASTICO.

NEL CASO ISOTROPO, IL POTENZIALE ELASTICO COME FUNZIONE QUADRATICA DELLE DILATAZIONI PRINCIPALI È COSIFFATTO:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[C_{11}\varepsilon_1^2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{33}\varepsilon_3^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2C_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2C_{23}\varepsilon_2\varepsilon_3\right] \quad [1]$$

DOVE LA [1] DEVE ESSERE INVARIANTE RISPETTO A UNO SCAMBIO QUALSIASI DEGLI ASSI PRINCIPALI.

NE SEGUE $C_{11} = C_{22} = C_{33}$; $C_{12} = C_{13} = C_{23}$; SI DEFINISCE POI

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$$
$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda \quad [2]$$

DOVE λ E μ SONO LE COSTANTI ELASTICHE DI LAMÉ (PIÙ CONVENIENTI DI E, ν PER ESPRIMERE IL LEGAME ELASTICO INVERSO).

GRAZIE ALLE [2] LA [1] DIVIENE:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(\lambda+2\mu)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2) + 2\lambda\overbrace{(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)}^{-J_2}\right] \quad [3]$$

ORA $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2 = \underbrace{(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}_{J_1}{}^2 - 2\underbrace{(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)}_{J_2} = J_1^2 + 2J_2$

SICCHÉ LA [3] SI PUÒ SCRIVERE IN MODO ALTERNATIVO COSÌ:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left\{(\lambda+2\mu)[J_1^2+2J_2] - 2\lambda J_2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\lambda\left[J_1^2+\cancel{2J_2}-\cancel{2J_2}\right] + 2\mu(J_1^2+2J_2)\right\}$$

OVVERO

$$\Phi = \frac{1}{2}\left\{\lambda J_1^2 + 2\mu(J_1^2+2J_2)\right\} = \frac{1}{2}\left\{(\lambda+2\mu)J_1^2 + 4\mu J_2\right\}$$

SE ORA SI INSERISCONO LE ESPRESSIONI DEGLI INVARIANTI IN FUNZIONE DELLE COMPONENTI CARTESIANE DEL TENSORE DI DEFORMAZIONE:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z)$$

E SI OTTIENE:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left\{(\lambda+2\mu)\left[\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2+2(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z)\right] + 4\mu\left[\frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z)\right]\right\}$$

OVVERO ANCHE:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(\lambda+2\mu)(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+2\lambda(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z)+\cancel{4\mu(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z)}+\mu(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2)\right.$$
$$\left.\cancel{-4\mu(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z)}\right]$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(\lambda+2\mu)(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+2\lambda(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z)+\mu(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2)\right] \quad [4]$$

DALLA [4] SI OTTIENE FACILMENTE

$$\sigma_x = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[(\lambda+2\mu)\cdot\cancel{2}\varepsilon_x+\cancel{2}\lambda(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = 2\mu\varepsilon_x+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \quad [5]$$

SI NOTI CHE LA [5] HA LA SUA ESPRESSIONE PIÙ SEMPLICE SE SI FA USO DELLE COSTANTI DI LAMÉ.

TENENDO CONTO CHE $\boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$ $\boxed{\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$

IL CHE MOSTRA CHE λ E μ HANNO LE STESSE DIMENSIONI DI E ($[F]/[L^2]$). ORA SI OTTIENE DALLA [5], OSSERVANDO CHE $\lambda = \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{\nu}{1-2\nu} = 2G\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\right)$

$$\sigma_x = 2G\left[\varepsilon_x+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = 2G\left[\frac{1-2\nu+\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

OVVERO

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \quad [5']$$

LA STESSA ESPRESSIONE OTTENUTA INVERTENDO IL LEGAME DIRETTO.

IN MODO ANALOGO SI TROVA:

$$\sigma_y = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_y} = 2\mu\varepsilon_y+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = (\lambda+2\mu)\varepsilon_y+\lambda(\varepsilon_z+\varepsilon_x) \quad [6]$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_y+\nu(\varepsilon_z+\varepsilon_x)\right] \quad [6']$$

$$\sigma_z = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_z} = 2\mu\varepsilon_z+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = (\lambda+2\mu)\varepsilon_z+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y) \quad [7]$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_z+\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right] \quad [7']$$

SI NOTI CHE LE [6] (o [6']) E [7] (o [7']) SONO FACILMENTE DEDUCIBILI DALLA [5] (o DALLA [5']) MEDIANTE PERMUTAZIONE DEGLI INDICI: $x \to y \to z \to x$, ECC.

PER QUANTO RIGUARDA LE COMPONENTI TANGENZIALI DELLO STATO DI SFORZO, DALLA [4] SEGUE:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} = \frac{1}{\cancel{2}}\mu \cdot \cancel{2}\gamma_{xy} = \mu\,\gamma_{xy} \qquad [8]$$

OVVERO, RICORDANDO CHE $\mu = G$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \quad [8']$$

ANALOGAMENTE

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} = \mu\,\gamma_{xz} \quad [9] \qquad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz} \quad [9']$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} = \mu\,\gamma_{yz} \quad [10] \qquad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \quad [10']$$

Π.

NOTA 2 SI OSSERVI CHE L'INVARIANTE SECONDO DI UN TENSORE SIMMETRICO DEL SECONDO ORDINE (COME $\underline{\underline{\sigma}}$ O $\underline{\underline{\varepsilon}}$; CI SI RIFERISCE PER SEMPLICITA' AL PRIMO) SI PUÒ SCRIVERE COMPATTAMENTE COSÌ:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left\{ tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - \left[tr(\underline{\underline{\sigma}})\right]^2 \right\}$$

DOVE $tr(\cdot)$ È L'OPERATORE "TRACCIA" = SOMMA DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE E $\underline{\underline{\sigma}}^2$ È IL TENSORE OTTENUTO MOLTIPLICANDO LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$, SCRITTE IN FORMA DI MATRICE PER SE STESSE, COME UN PRODOTTO MATRICIALE RIGHE PER COLONNE.

NEL CASO IN ESAME SI HA:

$$\underline{\underline{\sigma}}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} & \sigma_x\tau_{xy} + \tau_{xy}\sigma_y + \tau_{xz}\tau_{yz} & \sigma_x\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz} + \tau_{xz}\sigma_z \\ \sigma_x\tau_{xy} + \tau_{xy}\sigma_y + \tau_{xz}\tau_{yz} & \boxed{\tau_{xy}^2 + \sigma_y^2 + \tau_{yz}^2} & \tau_{xy}\tau_{xz} + \sigma_y\tau_{yz} + \tau_{yz}\sigma_z \\ \sigma_x\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz} + \tau_{xz}\sigma_z & \tau_{xy}\tau_{xz} + \sigma_y\tau_{yz} + \tau_{yz}\sigma_z & \boxed{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \sigma_z^2} \end{bmatrix}$$

SI SFRUTTA LA SIMMETRIA SI SFRUTTA LA SIMMETRIA

SI OSSERVI CHE SE $\underline{\underline{\sigma}}$ È SIMMETRICO, $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^2$ RISULTA A SUA VOLTA SIMMETRICO.

$$tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$

MENTRE $tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \Rightarrow tr(\underline{\underline{\sigma}})^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)$

NE SEGUE

$$\frac{1}{2}\left\{ tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - \left[tr(\underline{\underline{\sigma}})\right]^2 \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \left[\cancel{\sigma_x^2} + \cancel{\sigma_y^2} + \cancel{\sigma_z^2} + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\right] - \left[\cancel{\sigma_x^2} + \cancel{\sigma_y^2} + \cancel{\sigma_z^2} + 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right] \right\}$$

$$\Rightarrow I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z).$$

Π

NOTA 3 IL RISULTATO PRECEDENTE, CHE È CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON, SI PUÒ ESTENDERE ANCHE ALL'INVARIANTE TERZO, CHE SI PUÒ SCRIVERE COMPATTAMENTE COME SEGUE:

$$I_3 = \frac{1}{6}\left\{ \left[tr(\underline{\underline{\sigma}})\right]^3 - 3\, tr(\underline{\underline{\sigma}}^2)\, tr(\underline{\underline{\sigma}}) + 2\, tr(\underline{\underline{\sigma}}^3) \right\}$$

DOVE $tr(\cdot)$ È SEMPRE L'OPERATORE "TRACCIA" = SOMMA DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE, E $\underline{\underline{\sigma}}^3 = \underline{\underline{\sigma}}^2 \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^2 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ È LA POTENZA TERZA DI $\underline{\underline{\sigma}}$, OTTENUTO MOLTIPLICANDO LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$, SCRITTE IN FORMA DI MATRICE, PER SE STESSE 3 VOLTE, COME PRODOTTI MATRICIALI RIGHE PER COLONNE.

TENENDO CONTO DELLA ESPRESSIONE DI $\underline{\underline{\sigma}}^2$ GIÀ OTTENUTA, E SFRUTTANDO ANCORA LA SIMMETRIA SI OTTIENE:

$$\underline{\underline{\sigma}}^3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2+\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2 & \sigma_x\tau_{xy}+\tau_{xy}\sigma_y+\tau_{xz}\tau_{yz} & \sigma_x\tau_{xz}+\tau_{xy}\tau_{yz}+\tau_{xz}\sigma_z \\ \sigma_x\tau_{xy}+\tau_{xy}\sigma_y+\tau_{xz}\tau_{yz} & \tau_{xy}^2+\sigma_y^2+\tau_{yz}^2 & \tau_{xy}\tau_{xz}+\sigma_y\tau_{yz}+\tau_{yz}\sigma_z \\ \sigma_x\tau_{xz}+\tau_{xy}\tau_{yz}+\tau_{xz}\sigma_z & \tau_{xy}\tau_{xz}+\sigma_y\tau_{yz}+\tau_{yz}\sigma_z & \tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2+\sigma_z^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x^3+\sigma_x\tau_{xy}^2+\sigma_x\tau_{xz}^2+ \tau_{xy}^2\sigma_x+\tau_{xy}^2\sigma_y+\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}+ \sigma_x\tau_{xz}^2+\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}+\tau_{xz}^2\sigma_z & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_x\tau_{xy}^2+\tau_{xy}^2\sigma_y+\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}+ \sigma_y\tau_{xy}^2+\sigma_y^3+\sigma_y\tau_{yz}^2+ \tau_{yz}\tau_{xy}\tau_{xz}+\sigma_y\tau_{yz}^2+\tau_{yz}^2\sigma_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_x\tau_{xz}^2+\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}+\tau_{xz}^2\sigma_z+ \tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}+\sigma_y\tau_{yz}^2+\sigma_z\tau_{yz}^2+ \sigma_z\tau_{xz}^2+\sigma_z\tau_{yz}^2+\sigma_z^3 \end{bmatrix}$$

I VALORI INDICATI CON "·" SONO STATI TRALASCIATI PERCHÉ NON INTERVENGONO NEL CALCOLO DELLA TRACCIA.

$$\underline{\underline{\sigma}}^3 = \begin{bmatrix} \sigma_x^3+(2\sigma_x+\sigma_y)\tau_{xy}^2+(2\sigma_x+\sigma_z)\tau_{xz}^2+2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_y^3+(2\sigma_y+\sigma_x)\tau_{xy}^2+(2\sigma_y+\sigma_z)\tau_{yz}^2+2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_z^3+(2\sigma_z+\sigma_x)\tau_{xz}^2+(2\sigma_z+\sigma_y)\tau_{yz}^2+2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} \end{bmatrix}$$

PERTANTO $$tr(\underline{\underline{\sigma}}^3) = \sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3+3(\sigma_x+\sigma_y)\tau_{xy}^2+3(\sigma_x+\sigma_z)\tau_{xz}^2+3(\sigma_y+\sigma_z)\tau_{yz}^2+6\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}$$

INOLTRE

$$\left[tr(\underline{\underline{\sigma}})\right]^3 = \left[\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right]^3 = \sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3+3(\sigma_x^2\sigma_y+\sigma_y^2\sigma_x+\sigma_x^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_x+\sigma_y^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_y)+6\sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

$$tr(\underline{\underline{\sigma}}^2)\cdot tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+2(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)\right](\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) =$$

$$= \sigma_x^3+\sigma_x\sigma_y^2+\sigma_x\sigma_z^2+2(\sigma_x\tau_{xy}^2+\sigma_x\tau_{xz}^2+\sigma_x\tau_{yz}^2)+\sigma_y\sigma_x^2+\sigma_y^3+\sigma_y\sigma_z^2+$$
$$+2(\sigma_y\tau_{xy}^2+\sigma_y\tau_{xz}^2+\sigma_y\tau_{yz}^2)+\sigma_z\sigma_x^2+\sigma_z\sigma_y^2+\sigma_z^3+2(\sigma_z\tau_{xy}^2+\sigma_z\tau_{xz}^2+\sigma_z\tau_{yz}^2)$$

$$= \sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3+(\sigma_x^2\sigma_y+\sigma_y^2\sigma_x+\sigma_x^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_x+\sigma_y^2\sigma_z+\sigma_z\sigma_y^2)+2(\sigma_x\tau_{xy}^2+$$
$$\sigma_x\tau_{xz}^2+\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{xy}^2+\sigma_y\tau_{xz}^2+\sigma_y\tau_{yz}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2+\sigma_z\tau_{xz}^2+\sigma_z\tau_{yz}^2).$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$\frac{1}{6}\Big\{\overbrace{\cancel{\sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3}+3\left(\cancel{\sigma_x^2\sigma_y+\sigma_y^2\sigma_x+\sigma_x^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_x+\sigma_y^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_y}\right)+6\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z}^{[tr(\underline{\underline{\sigma}})]^3} \; +$$

$$\underbrace{-3\left(\cancel{\sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3}\right)-3\left(\cancel{\sigma_x^2\sigma_y+\sigma_y^2\sigma_x+\sigma_x^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_x+\sigma_y^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_y}\right)+ -6\left(\cancel{\sigma_x\tau_{xy}^2}+\cancel{\sigma_x\tau_{xz}^2}+\sigma_x\tau_{yz}^2+\cancel{\sigma_y\tau_{xy}^2}+\sigma_y\tau_{xz}^2+\cancel{\sigma_y\tau_{yz}^2}+\sigma_z\tau_{xy}^2+\cancel{\sigma_z\tau_{xz}^2}+\cancel{\sigma_z\tau_{yz}^2}\right)}_{-3\,tr(\underline{\underline{\sigma}}^2)\cdot tr(\underline{\underline{\sigma}})} \; +$$

$$+\underbrace{2\left(\cancel{\sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3}\right)+6\left(\cancel{\sigma_x}+\cancel{\sigma_y}\right)\tau_{xy}^2+6\left(\cancel{\sigma_x}+\cancel{\sigma_z}\right)\tau_{xz}^2+6\left(\cancel{\sigma_y}+\cancel{\sigma_z}\right)\tau_{yz}^2+12\,\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}}_{2\,tr(\underline{\underline{\sigma}}^3)}\Big\}=I_3$$

E SEMPLIFICANDO

$$I_3=\frac{1}{6}\Big\{6\sigma_x\sigma_y\sigma_z-6\left(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{xz}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2\right)+12\,\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}\Big\}$$

CIOÈ

$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\,\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}-\left(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{xz}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2\right)=\det(\underline{\underline{\sigma}})$$

$\square$