ANALISI DELLA TENSIONE → EQUILIBRIO ALL'INTERNO DEL SOLIDO

$$\boxed{\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0}$$

$$\boxed{\tau_{ij} = \tau_{ji}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases}$$

9 INCOGNITE

3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

3 CONDIZIONI ALGEBRICHE DI RECIPROCITÀ DELLE τ

DA 9 A 6 INCOGNITE

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE → EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ (IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \partial u / \partial x \\ \varepsilon_y = \partial v / \partial y \\ \varepsilon_z = \partial w / \partial z \\ \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{cases}$$

9 INCOGNITE

6 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

15 INCOGNITE

9 EQUAZIONI A DISPOSIZIONE

SERVONO 6 EQUAZIONI SENZA AGGIUNGERE NUOVE INCOGNITE

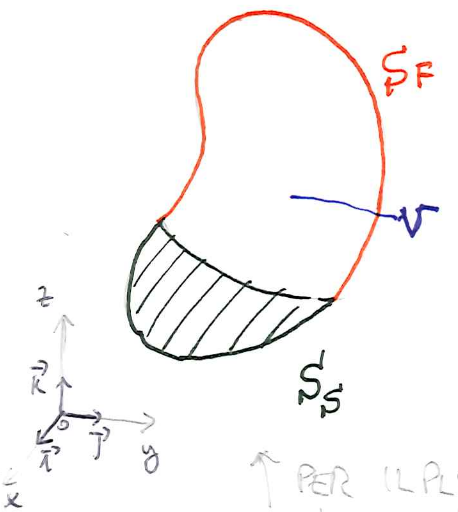
⇓

$\boxed{\text{LEGAME COSTITUTIVO}}$

LEGA SFORZI E DEFORMAZIONI

CONSIDERIAMO UN MEZZO CONTINUO DI VOLUME V DELIMITATO DALLA SUPERFICIE DI CONTORNO S SOGGETTO IN OGNI PUNTO DI VOLUME A FORZE DI MASSA $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ E SULLA FRONTIERA S A FORZE DI SUPERFICIE $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

SIA $\boxed{S_F}$ LA PARTE DEL CONTORNO LIBERO E $\boxed{S_S}$ LA PARTE DEL CONTORNO VINCOLATA



PER IL PLV NON CONVIENE SEPARARE S IN S_S E S_F !

SU S_F SONO ASSEGNATE (OVVERO SONO NOTE) LE FORZE DI SUPERFICIE $\vec{p}$ E SONO INCOGNITI GLI SPOSTAMENTI $\vec{\xi}$

SU S_F DEVONO VALERE LE RELAZIONI DI CAUCHY

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z = p_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z = p_y \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z = p_z \end{cases}$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AL CONTORNO

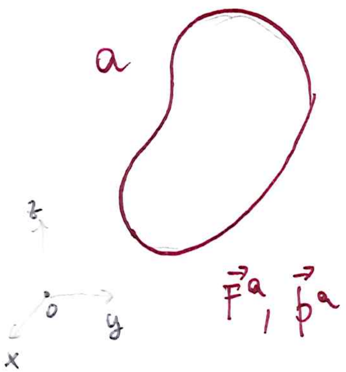
EQUILIBRIO ESTERNO

SU S_S SONO ASSEGNATI GLI SPOSTAMENTI $\vec{\xi}$ (NOTI) E SONO INCOGNITE LE FORZE DI SUPERFICIE $\vec{p}$

S_S È LA PARTE DI CONTORNO VINCOLATA $\rightarrow$ $\boxed{u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0}$

* APPLICHIAMO IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV) SU UN CORPO DEFORMABILE:

CONSIDERIAMO 1 SISTEMA $\boxed{a}$ IN CUI FORZE E SFORZI SIANO IN EQUILIBRIO E UN SISTEMA $\boxed{b}$ IN CUI GLI SPOSTAMENTI SIANO COMPATIBILI CON LE DEFORMAZIONI



$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}^a}{\partial z} + F_x^a = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}^a}{\partial z} + F_y^a = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z^a}{\partial z} + F_z^a = 0 \end{cases}$$

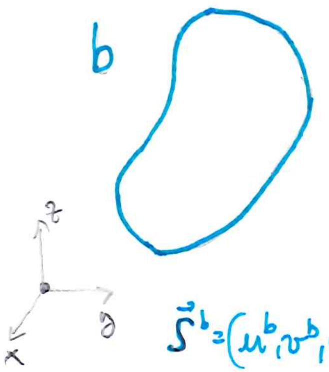
$$\begin{cases} \sigma_x^a \alpha_x + \tau_{yx}^a \alpha_y + \tau_{zx}^a \alpha_z = p_x^a \\ \tau_{xy}^a \alpha_x + \sigma_y^a \alpha_y + \tau_{zy}^a \alpha_z = p_y^a \\ \tau_{xz}^a \alpha_x + \tau_{yz}^a \alpha_y + \sigma_z^a \alpha_z = p_z^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy}^a = \tau_{yx}^a \\ \tau_{xz}^a = \tau_{zx}^a \\ \tau_{yz}^a = \tau_{zy}^a \end{cases}$$

$\boxed{\text{SFORZI E FORZE SONO IN EQUILIBRIO}}$

$\underline{\underline{\sigma}}^a$ $\qquad$ $\vec{F}^a$, $\vec{p}^a$

b



$\vec{S}^b = (u^b, v^b, w^b)$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^b = \dfrac{\partial u^b}{\partial x} \\ \varepsilon_y^b = \dfrac{\partial v^b}{\partial y} \\ \varepsilon_z^b = \dfrac{\partial w^b}{\partial z} \\ \gamma_{xy}^b = \dfrac{\partial u^b}{\partial y} + \dfrac{\partial v^b}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^b = \dfrac{\partial u^b}{\partial z} + \dfrac{\partial w^b}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^b = \dfrac{\partial v^b}{\partial z} + \dfrac{\partial w^b}{\partial y} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{SPOSTAMENTI COMPATIBILI CON LE DEFORMAZIONI}}$$

$\vec{S}^b$ $\quad$ $\underline{\underline{\varepsilon}}^b$

I 2 SISTEMI a E b SONO COMPLETAMENTE INDIPENDENTI → GLI SFORZI NON PRODUCONO LE DEFORMAZIONI E VICEVERSA

IL SISTEMA a È IN EQUILIBRIO, IL SISTEMA b È CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE

SUPPONIAMO DI IMPORRE AL CORPO SOGGETTO AL SISTEMA DI FORZE a IL SISTEMA DI SPOSTAMENTI b E SCRIVIAMO IL LAVORO VIRTUALE ESTERNO - NB LE COMPONENTI DI FORZA COMPIONO LAVORO PER LA RISPETTIVA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO:

$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V \vec{F}^a \times \vec{S}^b \, dV + \underbrace{\int_S \vec{p}^a \times \vec{S}^b \, dS}_{\text{N.B. SU TUTTA } S} = \underbrace{\int_V (F_x^a u^b + F_y^a v^b + F_z^e w^b) \, dV}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{S_F} (p_x^e u^b + p_y^e v^b + p_z^e w^b) \, dS}_{\mathrm{II}}$$

(N.B. IL CONTRIBUTO DI S_S È NULLO POICHÉ $\vec{S}_b = \vec{0}$ SU S_S)

SVILUPPANDO LA RELAZIONE DI CAUCHY (EQ. AL CONTORNO) POSSIAMO RISCRIVERE IL II INTEGRALE DEL LAVORO VIRTUALE ESTERNO:

$$\int\!\!\int_{S_F} \Big[\big(\overbrace{\sigma_x^a \alpha_x + \tau_{yx}^a \alpha_y + \tau_{zx}^e \alpha_z}^{p_x} \big) u^b + \big(\overbrace{\tau_{xy}^e \alpha_x + \sigma_y^e \alpha_y + \tau_{zy}^e \alpha_z}^{p_y} \big) v^b + \big(\overbrace{\tau_{xz}^a \alpha_x + \tau_{yz}^a \alpha_y + \sigma_z^a \alpha_z}^{p_z} \big) w^b \Big] \, dS$$

RACCOGLIAMO I TERMINI ACCORPANDOLI PER I COSENI DIRETTORI:

$$\int_{S_F} \Big[\left(\sigma_x^a u^b + \tau_{xy}^e v^b + \tau_{xz}^e w^b \right) \alpha_x + \left(\tau_{yx}^e u^b + \sigma_y^e v^b + \tau_{yz}^e w^b \right) \alpha_y + \left(\tau_{zx}^e u^b + \tau_{zy}^e v^b + \sigma_z^e w^b \right) \alpha_z \Big] dS$$

APPLICANDO LA TRASFORMAZIONE DI GAUSS-GREEN POSSIAMO TRASFORMARE IL II INTEGRALE DA INTEGRALE ESTESO A S A INTEGRALE SUL VOLUME V

$\boxed{\text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}}$ $\int_S F_i n_i dS = \int_V \partial F_i / \partial x_i \, dV$

$$\int_V \left[\partial/\partial x \left(\sigma_x^e u^b + \tau_{xy}^e v^b + \tau_{xz}^e w^b\right) + \partial/\partial y \left(\tau_{yx}^e u^b + \sigma_y^e v^b + \tau_{yz}^e w^b\right) + \partial/\partial z \left(\tau_{zx}^e u^b + \tau_{zy}^e v^b + \sigma_z^e w^b\right) \right] dV$$

NB. DERIVATA DI 1 PRODOTTO DI 2 FUNZIONI È PARI ALLA DERIVATA DEL 1° TERMINE PER IL 2° PIÙ LA DERIVATA DEL 2° TERMINE PER IL 1°

$[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g x + f(x)\, g'(x)$ ALLORA:

$$\int_V \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} u^b + \sigma_x^e \frac{\partial u^b}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} v^b + \tau_{xy}^e \frac{\partial v^b}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} w^b + \tau_{xz}^e \frac{\partial w^b}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} u^b + \tau_{yx}^e \frac{\partial u^b}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} v^b + \sigma_y^e \frac{\partial v^b}{\partial y} + \dots \right.\right.$$

$$\left.\left. \dots + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} w^b + \tau_{yz}^e \frac{\partial w^b}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} u^b + \tau_{zx}^e \frac{\partial u^b}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} v^b + \tau_{zy}^e \frac{\partial v^b}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} w^b + \sigma_z^b \frac{\partial w^b}{\partial z} \right] \right\} dV$$

ORDINIAMO RAGGRUPPANDO I PRIMI E POI I SECONDI TERMINI:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} u^b + \frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} v^b + \frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} w^b + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} u^b + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} v^b + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} w^b + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} u^b + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} v^b + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} w^b + \dots \right.$$ PRIMI TERMINI

$$\left. \dots + \sigma_x^e \frac{\partial u^b}{\partial x} + \tau_{xy}^e \frac{\partial v^b}{\partial x} + \tau_{xz}^e \frac{\partial w^b}{\partial x} + \tau_{yx}^e \frac{\partial u^b}{\partial y} + \sigma_y^e \frac{\partial v^b}{\partial y} + \tau_{yz}^e \frac{\partial w^b}{\partial y} + \tau_{zx}^e \frac{\partial u^b}{\partial z} + \tau_{zy}^e \frac{\partial v^b}{\partial z} + \sigma_z^e \frac{\partial w^b}{\partial z} \right\} dV$$ SECONDI TERMINI

RACCOGLIAMO ANCORA I TERMINI: PRIMA I TERMINI IN CUI LE DERIVATE SONO MOLTIPLICATE PER GLI SPOSTAMENTI u^b, v^b, w^b

$$\int_V \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} \right) u^b + \left(\frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} \right) v^b + \left(\frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} \right) w^b + \dots \right.$$

POI I TERMINI IN CUI LE DERIVATE SONO MOLTIPLICATE PER LE COMPONENTI DI SFORZO $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ E NB. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ETC

$$\left. \dots + \sigma_x^e \frac{\partial u^b}{\partial x} + \tau_{xy}^e \left(\frac{\partial v^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial y} \right) + \tau_{xz}^e \left(\frac{\partial w^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial z} \right) + \sigma_y^e \frac{\partial v^b}{\partial y} + \tau_{yz}^e \left(\frac{\partial v^b}{\partial z} + \frac{\partial w^b}{\partial y} \right) + \sigma_z^e \frac{\partial w^b}{\partial z} \right\} dV$$

CI ACCORGIAMO CHE $\frac{\partial u^b}{\partial x} = \varepsilon_x^b$, $\frac{\partial v^b}{\partial y} = \varepsilon_y^b$, $\frac{\partial w^b}{\partial z} = \varepsilon_z^b$, $\left(\frac{\partial v^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial y}\right) = \gamma_{xy}^b$, $\left(\frac{\partial w^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial z}\right) = \gamma_{xz}^b$, $\left(\frac{\partial w^b}{\partial y} + \frac{\partial v^b}{\partial z}\right) = \gamma_{yz}^b$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE IL LAVORO VIRTUALE ESTERNO COME: (INTEGRALE I + INTEGRALE II TRASFORMATO IN INTEGRALE DI VOLUME)

$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V \Big\{ \underbrace{F_x^e u^b + F_y^e v^b + F_z^e w^b}_{I} + \underbrace{\left[\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z}\right] u^b + \left[\frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z}\right] v^b + \left[\frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z}\right] w^b}_{II} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\sigma_x^e \varepsilon_x^b + \sigma_y^e \varepsilon_y^b + \sigma_z^e \varepsilon_z^b + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^e \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}^b}_{II} \Big\} dV$$

POSSIAMO ANCORA ACCORPARE I TERMINI CHE CONTENGONO GLI SPOSTAMENTI u^b, v^b, w^b (CONSIDERANDO ANCHE L'INTEGRALE I)

$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V \Big\{ \left[\frac{\partial \sigma_x^a}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} + F_x^a\right] u^b + \left[\frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} + F_y^a\right] v^b + \left[\frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^a}{\partial z} + F_z^a\right] w^b + \dots$$

$$\dots + \sigma_x^e \varepsilon_x^b + \sigma_y^e \varepsilon_y^b + \sigma_z^e \varepsilon_z^b + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^e \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}^b \Big\} dV$$

OSSERVIAMO CHE LE FORZE (ESTERNE) SONO IN EQUILIBRIO CON GLI SFORZI (INTERNI)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}^a}{\partial z} + F_x^a = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xy}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}^a}{\partial z} + F_y^a = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xz}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z^a}{\partial z} + F_z^a = 0 \end{cases} \qquad \text{EQUILIBRIO}$$

ALLORA:

$$\boxed{\mathcal{L}_{VE} = \int_V \left(\sigma_x^e \varepsilon_x^b + \sigma_y^e \varepsilon_y^b + \sigma_z^e \varepsilon_z^b + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^e \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}^b\right) dV} \rightarrow \boxed{= \mathcal{L}_{VI}} \ *$$

MA È = AL LAVORO VIRTUALE INTERNO CHE GLI SFORZI COMPIONO PER LE DEFORMAZIONI $\rightarrow \mathcal{L}_{VI} = \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} \quad i,j = x,y,z$

N.B. OGNI COMPONENTE DI SFORZO COMPIE LAVORO PER UNA SOLA COMPONENTE DI DEFORMAZIONE: $\sigma_x \rightarrow \varepsilon_x, \dots, \tau_{zy} \rightarrow \gamma_{zy}$

> IN UN SOLIDO DEFORMABILE IN CUI FORZE ESTERNE E SFORZI INTERNI SONO IN EQUILIBRIO E SPOSTAMENTI E DEFORMAZIONI SONO COMPATIBILI, IL LAVORO VIRTUALE INTERNO È PARI AL LAVORO COMPIUTO DAGLI SFORZI PER LE CORRISPONDENTI DEFORMAZIONI

[N.B. IN UN CORPO RIGIDO $\mathcal{L}_{VI} = 0$]

$\Downarrow$

$\mathcal{L}_{VE} = 0$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PLV $\boxed{\mathcal{L}_{VE} = \mathcal{L}_{VI}}$