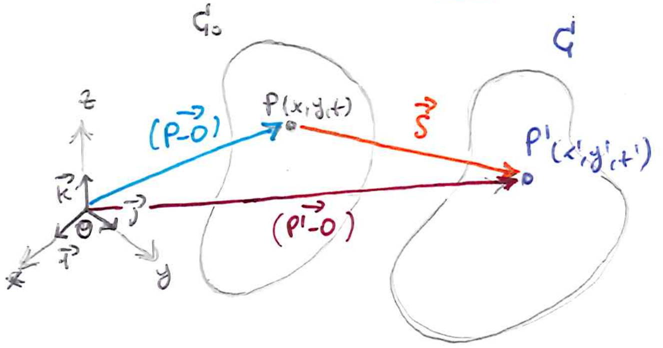
24 — IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI —

SI CONSIDERI UN MEZZO CONTINUO I CUI PUNTI NELLA CONFIGURAZIONE INIZIALE C_0 SIANO RIFERITI ALLA TERNA CARTESIANA x,y,z
IL CORPO PASSA DALLA CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO C_0 ALLA CONFIGURAZIONE CORRENTE C



I PUNTI MATERIALI SONO GLI STESSI MA SI SONO SPOSTATI $P(x,y,z) \rightarrow P'(x',y',z')$

NON SAPPIAMO COSA SIA SUCCESSO TRA C_0 E C *, IL PUNTO P HA SUBITO UNO SPOSTAMENTO

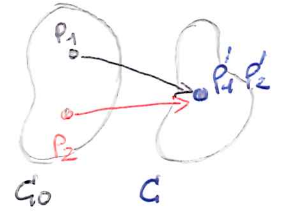
$\vec{s} = (\vec{P'-O}) - (\vec{P-O})$ LE CUI COMPONENTI SONO: $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k}$

POSSIAMO INTRODURRE UNA NOTAZIONE PIÙ COMPATTA: $\boxed{\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}}$

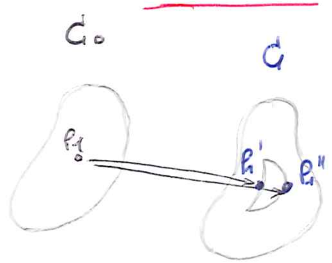
$\vec{s}$ È FUNZIONE DEL PUNTO P $\Rightarrow \vec{s} = \vec{s}(P)$ E QUINDI $\vec{s} = \vec{s}(x,y,z)$

SE LO SPOSTAMENTO È FUNZIONE DELLA POSIZIONE LO SONO ANCHE LE SUE COMPONENTI

° COMPENETRAZIONE



°° LACERAZIONE



$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

DOBBIAMO AMMETTERE CHE QUESTE FUNZIONI GODANO DI CERTE REGOLARITÀ:

- ° 2 PUNTI DISTINTI POSSONO AVVICINARSI O ALLONTANARSI MA NON POSSONO ANNICHILARSI → NON COMPENETRAZIONE
- °° NON POSSONO AVVENIRE LACERAZIONI DEL SOLIDO
  [N.B. QUESTO PUÒ AVVENIRE NELLA REALTÀ MA NON IN QUESTA TRATTAZIONE DEL CONTINUO]

SE COMPENETRAZIONE E LACERAZIONE SONO ESCLUSE ALLORA LA CORRISPONDENZA TRA P E P' È $\boxed{\text{BIUNIVOCA}}$

ALLORA LE FUNZIONI $\begin{cases} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{cases}$ DEVONO ESSERE CONTINUE CON LE LORO DERIVATE

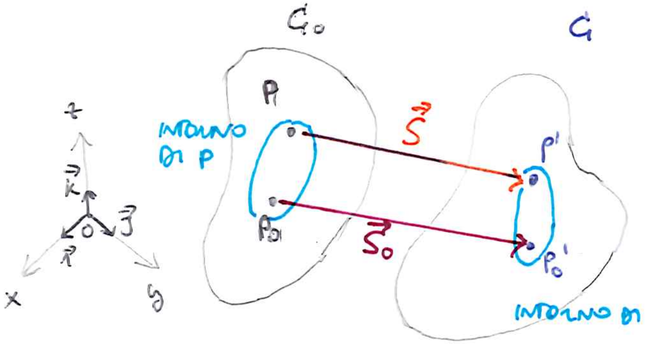
[N.B. u,v,w DEVONO ESSERE CONTINUE CON LE LORO DERIVATE, MA u,v,w SONO FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, QUINDI DEVONO ESSERE CONTINUE LE LORO DERIVATE PARZIALI E, PER GRADI SUPERIORI, LE LORO DERIVATE MISTE]

1ª IPOTESI – CONTINUITÀ DELLE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO u,v,w

* IN QUESTA TRATTAZIONE NON STUDIAMO IL PERCORSO CHE P COMPIE PER ARRIVARE NELLA POSIZIONE P' MA SOLO LO SPOSTAMENTO $\vec{s}$, OVVERO LA DIFFERENZA TRA LA POSIZIONE INIZIALE P E QUELLA FINALE P'

2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

2^ IPOTESI – PICCOLI SPOSTAMENTI → u, v, w SONO DA CONSIDERARE COME QUANTITÀ "INFINITESIME"



CONSIDERIAMO UN PUNTO GENERICO P_0 CHE SUBISCE UN SPOSTAMENTO $\boxed{\vec{S}_0 = u_0\vec{i} + v_0\vec{j} + w_0\vec{k}}$

SE P_0 È SUFFICIENTEMENTE VICINO A P, ALLORA ANCHE P_0' SARÀ CONVENIENTEMENTE VICINO A P', OVVERO L'INTORNO DI P È LO STESSO DI P' (CAMBIA FORMA MA CONTIENE GLI STESSI PUNTI)

* SI VUOLE APPROSSIMARE LA FUNZIONE SPOSTAMENTO $\vec{S} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ DEL GENERICO PUNTO P CHE APPARTIENE ALL'INTORNO DI P_0 CONOSCENDO LA FUNZIONE SPOSTAMENTO $\vec{S}_0$ DEL PUNTO P_0, DI COORDINATE $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$f_{(x)} \to g(x)$ COL REQUISITO CHE $g(x)$ ASSUMA NEL PUNTO $x = x_0$ VALORI EGUALI DI QUELLI DI $f(x)$ CON TUTTE LE SUE DERIVATE: $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^n(x_0)$

CON LO SVILUPPO DI TAYLOR POSSIAMO COSTRUIRE UNA FUNZIONE:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o[(x-x_0)^n]$$

RESTO DI PEANO

SE CALCOLIAMO

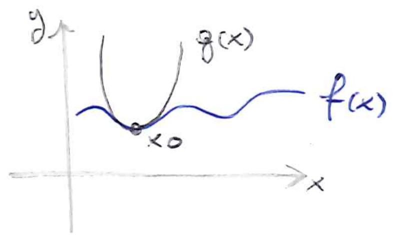
$$g(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(\cancel{x_0-x_0}) + \dots \qquad x - x_0 = 0 \qquad \boxed{g(x_0) = f(x_0)}$$

$$g'(x_0) = 0 + f'(x_0) + f''(x_0)\frac{2(\cancel{x-x_0})}{2!} + \dots \qquad \boxed{g'(x_0) = f'(x_0)}$$

$$g''(x_0) = 0 + f''(x_0) + f'''(x_0)\frac{6(\cancel{x-x_0})}{3!} + \dots \qquad \boxed{g''(x_0) = f''(x_0)}$$

$$g^n(x_0) = 0 + f^n(x_0) + \dots \qquad g^n(x_0) = f^n(x_0)$$

NB: $o[(x-x_0)^n]$ INDICA UNA FUNZIONE $h(x)$ QUALSIASI CHE NELL'INTORNO DI x_0 TENDE A ZERO PIÙ VELOCEMENTE DI $(x-x_0)^n$.



IN x_0 CONOSCIAMO LA POSIZIONE, LA DERIVATA, LA CURVATURA, ETC. POSSIAMO USARE $g(x)$, AD ESEMPIO UNA PARABOLA, CHE A DISTANZA PICCOLA DA x_0 SIA IN GRADO DI APPROSSIMARE $f(x)$

APPLICHIAMO QUESTO METODO ALLE FUNZIONI $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$

POICHÉ ESSE DIPENDONO DA x, y, z ALLORA DOVREMO CONSIDERARE LE LORO DERIVATE PARZIALI RISPETTO A x, y, z

PIÙ SI SALE DI GRADO DI DERIVAZIONE PIÙ È PRECISA L'APPROSSIMAZIONE. IL MINIMO È CONSIDERARE LA FUNZIONE E LE SUE DERIVATE PRIME

[N.B. L'ERRORE È PARI ALLORA ALLA DERIVATA SECONDA, MA POICHÉ x E x_0 SONO SUFFICIENTEMENTE VICINI LO SCARTO È MOLTO PICCOLO)

2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

$$u(x,y,z) = u_0 + \boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}}(x-x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

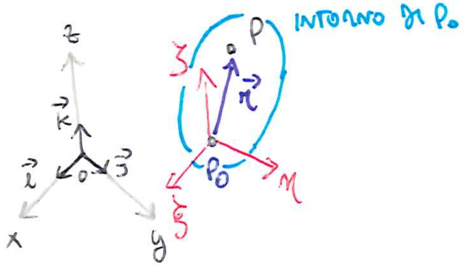
DERIVATA PARZIALE DI u_0 RISPETTO A X NEL PUNTO P_0 $\quad \dfrac{\partial u(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$ [N.B. È UN NUMERO]

$$v(x,y,z) = v_0 + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

$$w(x,y,z) = w_0 + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

POSSIAMO RENDERE LA NOTAZIONE PIÙ COMPATTA NOTANDO CHE:

1. QUESTE FUNZIONI HANNO LE STESSE CARATTERISTICHE DI $f(x)$ PER IL CASO UNIVARIATO
2. $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEL PUNTO P RISPETTO A $P_0=(x_0,y_0,z_0)$



POSSIAMO DEFINIRE UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO $\boxed{(\xi,\eta,\zeta)}$ CON ORIGINE IN P_0 E PARALLELO A (x,y,z): $P(x,y,z)$ RIFERIMENTO GLOBALE E $P(\xi,\eta,\zeta)$ RIFERIMENTO CENTRATO IN P_0

ALLORA: $\xi = x-x_0 \quad \eta = y-y_0 \quad \zeta = z-z_0$ E $\vec{r}=(\xi,\eta,\zeta)$ È IL VETTORE POSIZIONE DI P RISPETTO A P_0

E QUINDI:

$$u(x,y,z) = u_0 + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\xi + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\eta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\zeta$$

$$v(x,y,z) = v_0 + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0}\xi + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0}\eta + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0}\zeta$$

$$w(x,y,z) = w_0 + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0}\xi + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0}\eta + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0}\zeta$$

RACCOGLIENDO I TERMINI MOLTIPLICATI PER $\vec{r}$ E RICORDANDO CHE u_0 ERA $\vec{S} = \vec{S}_0$ POSSIAMO SCRIVERE IN FORMA COMPATTA IL CAMPO DI SPOSTAMENTO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ w(x,y,t) \end{bmatrix}}_{\vec{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}}_{\vec{s}_0} + \begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{e}}} \\ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \quad \frac{\partial}{\partial y} & \quad \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}}_{\vec{r}} \quad \begin{matrix} \partial u \\ \partial v \\ \partial w \end{matrix}$$

CAMPO DI SPOSTAMENTO:

$$\boxed{\boxed{\vec{s}} = \boxed{\vec{s}_0} + \boxed{\underline{\underline{e}}}\,\vec{r}}$$

$\boxed{\underline{\underline{e}} = \text{GRADIENTE DI SPOSTAMENTO}}$

[N.B. TENSORE DEL 2° ORDINE]

QUINDI: $\vec{s} - \vec{s}_0 = \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$ IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}}$ PER IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ FORNISCE LA DIFFERENZA DI SPOSTAMENTO

PERTANTO CONTIENE TUTTE LE INFORMAZIONI: SPOSTAMENTO, ROTAZIONE E DEFORMAZIONE

ESEMPIO APPLICATIVO

ABBIAMO UN CAMPO DI SPOSTAMENTO:

$$\begin{cases} u = k x^2 y \\ v = k x y^2 \\ w = k(x+y)z \end{cases}$$

CON K = COSTANTE, CON UN VALORE MOLTO PICCOLO AD ESEMPIO 10^{-4}

IL PUNTO P_0 HA COORDINATE $P_0 = (1, 1, 0)$

ALLORA:

$$u_0 = u(P_0) = k(1^2 \cdot 1) = k$$
$$v_0 = v(P_0) = k(1 \cdot 1^2) = k$$
$$w_0 = w(P_0) = k(1+1)0 = 0$$

VOGLIAMO CALCOLARE $\boxed{\underline{\underline{e}}}$, PER PRIMA COSA CALCOLIAMO LE DERIVATE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(kx^2y)}{\partial x} = ky(2x) = 2kxy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(kx^2y)}{\partial y} = kx^2(1) = kx^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(kx^2y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (kxy^2)}{\partial x} = ky^2(1) = ky^2 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial [k(x+y)z]}{\partial x} = kz(1) = kz$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (kxy^2)}{\partial y} = kx(2y) = 2kxy \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial [k(x+y)z]}{\partial y} = kz(1) = kz$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial (kxy^2)}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial [k(x+y)z]}{\partial z} = kx(1) + ky(1) = kx + ky = k(x+y)$$

CALCOLIAMO IL VALORE DELLE DERIVATE NEL PUNTO P_0 E RICAVIAMO $\boxed{\underline{\underline{e}}}$ N.B. $P_0 = \overset{x\;y\;z}{(1,1,0)}$

$$\boxed{\underline{\underline{e}}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2kxy & kx^2 & 0 \\ ky^2 & 2kxy & 0 \\ kz & kz & k(x+y) \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

NOTO $\boxed{\underline{\underline{e}}}$ POSSIAMO RICAVARE IL <u>CAMPO DI SPOSTAMENTO $\vec{S}$</u> IN OGNI PUNTO

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ <u>CALCOLARE $\vec{S}$ DEL PUNTO $P_1 = (1,1,2)$</u>

<u>N.B.</u> NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO (ξ, η, ζ) CON ORIGINE IN P_0 ALLORA $P_1 = \overset{\xi\;\eta\;\zeta}{(0,0,2)}$

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r} \qquad \vec{S} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \vec{S}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 = k \\ v_0 = k \\ w_0 = k \end{Bmatrix} \qquad \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

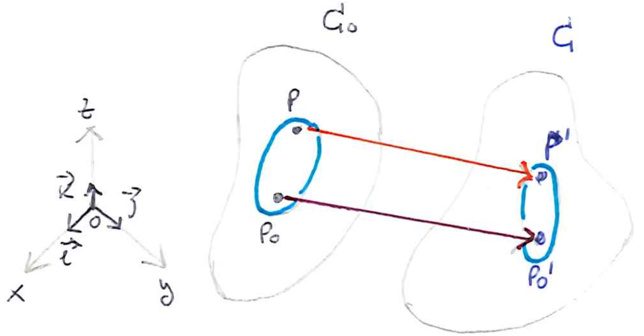
$P_0 = (1,1,0)$

$P_1 = \overset{x\;y\;z}{(1,1,2)} = \overset{\xi\;\eta\;\zeta}{(0,0,2)}$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \\ 4k \end{Bmatrix}$$

$$\vec{S} = \{k, k, 4k\}$$

2A - IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI -



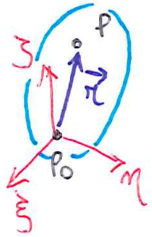
$P = \{x, y, z\}$ $\qquad \vec{s} = \{u, v, w\}$

$P_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ $\qquad \vec{s}_0 = \{u_0, v_0, w_0\}$

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO $\vec{s}$, FUNZIONI CONTINUE CON LE DERIVATE
→ NO COMPENETRAZIONE
→ NO LACERAZIONI
CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA P E P'

INTORNO DI P_0



$$\vec{r} = P - P_0 = \{\underbrace{\xi}_{(x-x_0)},\ \underbrace{\eta}_{(y-y_0)},\ \underbrace{\zeta}_{(z-z_0)}\}$$

$\boxed{\text{CAMPO DI SPOSTAMENTO}}$ $\quad \vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix}$$

[N.B. È 1 TABELLA DI NUMERI]

$\underline{\underline{e}}$ = GRADIENTE DI SPOSTAMENTO
TENSORE DEL 2° ORDINE CON COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI DI u, v, w RISPETTO A x, y, z NEL PUNTO P_0

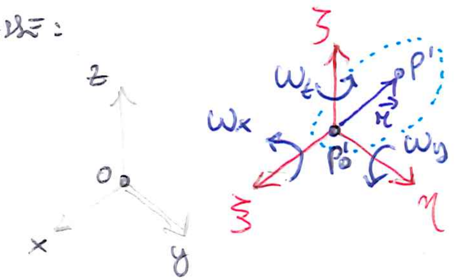
- LA TRASFORMAZIONE CHE L'INTORNO DI P_0 SUBISCE NEL PASSAGGIO DA C_0 A C PUÒ SEMPRE PENSARSI COME SOVRAPPOSIZIONE DI UN MOTO RIGIDO E DI UN MOTO DI DEFORMAZIONE PURA, RESPONSABILE DELLE VARIAZIONI DI GEOMETRIA DELL'INTORNO STESSO. AI FINI DELL'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE IL MOTO RIGIDO È INESSENZIALE: LO STUDIO È RIVOLTO ALL'EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE, GLI EFFETTI DEL MOTO RIGIDO VANNO EPURATI.

$\boxed{\vec{s} = \vec{s}\,' + \vec{s}\,''}$ $\qquad \vec{s}\,'$ = EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE ; $\vec{s}\,''$ = EFFETTO DEL MOTO RIGIDO ⇒ $\begin{cases} u = u' + u'' \\ v = v' + v'' \\ w = w' + w'' \end{cases}$

A NOI INTERESSA $\vec{s}\,'$: $\begin{cases} u' = u - u'' \\ v' = v - v'' \\ w' = w - w'' \end{cases}$

VEDIAMO COM'È FATTO $\vec{s}\,''$ ⇒ $\vec{s}\,'' = \vec{s}_0 + \vec{s}\,'''$ $\qquad \vec{s}_0$ = TRASLAZIONE $\qquad \vec{s}\,'''$ = ROTAZIONE RIGIDA

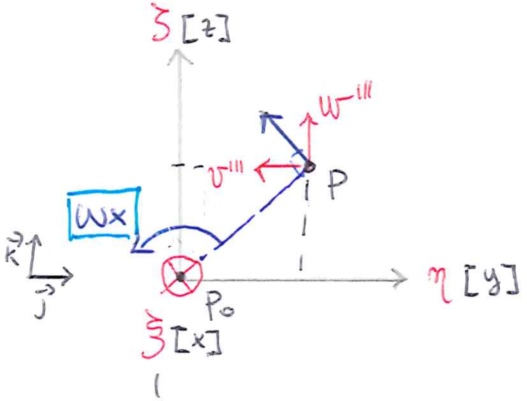
MOTO RIGIDO: PRIMA AVVIENE LA TRASLAZIONE - PASSAGGIO DA P_0 A P_0' - POI AVVIENE LA ROTAZIONE, ATTORNO AL PUNTO P_0, QUINDI ATTORNO AGLI ASSI ξ, η, ζ → 3 ROTAZIONI, UNA PER OGNI ASSE:



2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

VEDIAMO LE 3 ROTAZIONI INTORNO A ξ, η, ζ :

[N.B. $\otimes$ INDICA UN VETTORE PERPENDICOLARE E USCENTE DAL FOGLIO, $\odot$ UN VETTORE PERPENDICOLARE E' ENTRANTE NEL FOGLIO]



P SI SPOSTA IN DIREZIONE PERPENDICOLARE* ALLA CONGIUNGENTE TRA P E P_0, PUNTO ATTORNO A CUI RUOTA P

* IPOTESI PICCOLI SPOSTAMENTI: PER SPOSTAMENTI INFINITESIMI SI PUO' CONFONDERE L'ARCO DI CIRCONFERENZA CON LA TANGENTE

LE COMPONENTI RISPETTO A η E ζ SONO:

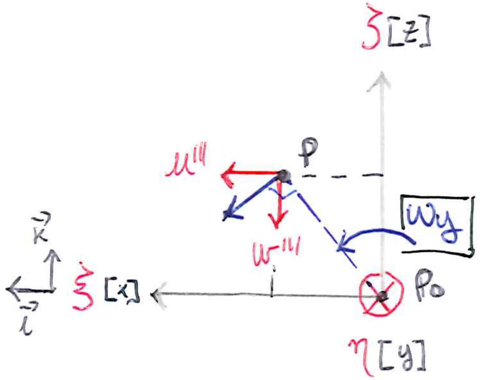
$$\begin{cases} u''' = 0 \\ v''' = -\omega_x \zeta \\ w''' = +\omega_x \eta \end{cases}$$

($u'''=0$: ROTAZIONE INTORNO A ξ[x] → SPOSTAMENTO NULLO IN DIREZIONE x)

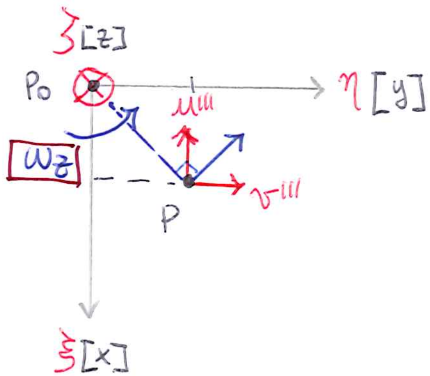
(v''', w''': ROTAZIONE ω_x PER LA DISTANZA TRA P E L'ASSE η, (OVVERO ζ) E L'ASSE ζ (OVVERO η))

N.B. [ ] PER RICORDARCI CHE ξ, η, ζ SONO PARALLELI A x, y, z RISPETTIVAMENTE

[N.B. USIAMO TERNE DESTRE → SEGNI OPPOSTI RISPETTO AL TESTO DI RIFERIMENTO DI CAPURSO]



$$\begin{cases} u''' = \omega_y \zeta \\ v''' = 0 \\ w''' = -\omega_y \xi \end{cases}$$



$$\begin{cases} u''' = -\omega_z \eta \\ v''' = \omega_z \zeta \\ w''' = 0 \end{cases}$$

POSSIAMO SOMMARE:

$$\begin{array}{l|c|c|c} & \xi & \eta & \zeta \\ \hline u''' = & 0 & -\omega_z \eta & +\omega_y \zeta \\ v''' = & \omega_z \xi & +\ 0 & -\omega_x \zeta \\ w''' = & -\omega_y \xi & +\ \omega_x \eta & +\ 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\omega}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}}_{\vec{r}}$$

$\underline{\underline{\omega}}$ = TENSORE DELLA ROTAZIONE INFINITESIMA

N.B. MATRICE CON DIAGONALE PRINCIPALE NULLA E ELEMENTI FUORI DALLA DIAGONALE OPPOSTI: MATRICE EMISIMMETRICA

$\underline{A} = [a_{ij}]$ $\quad i = j \rightarrow 0$ $\quad \boxed{a_{ij} = -a_{ji}}$

$i \neq j$ → ELEMENTI DI SEGNO OPPOSTO

QUINDI: $\boxed{\vec{s}''' = \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}}$ ROTAZIONE RIGIDA

N.B. TENSORE EMISIMMETRICO: PER LA TEORIA DELLE MATRICI, OGNI MATRICE $\underline{\underline{a}}$ PUO' ESSERE SCOMPOSTA IN UN UNICO MODO NELLA SOMMA DI UNA MATRICE SIMMETRICA $\underline{\underline{b}}$ E DI UNA MATRICE EMISIMMETRICA $\underline{\underline{c}}$ (NEL CASO DI MATRICI QUADRATE)

$$\underline{\underline{b}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}}^T) \quad \text{E} \quad \underline{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}}^T) \Rightarrow \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}} + \cancel{\tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}}^T} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}} - \cancel{\tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}}^T} = \underline{\underline{a}}$$

ALLORA, ESSENDO $\underline{\underline{\omega}}$ EMISIMMETRICO, RICORDANDO CHE $\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$, TENENDO CONTO DELLA PROPRIETÀ DELLE MATRICI, POSSIAMO SCOMPORRE IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}}$ IN UNA PARTE SIMMETRICA, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, E UNA EMISIMMETRICA $\underline{\underline{\omega}}$:

$$\boxed{\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}} \quad \text{CON} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T) \quad \text{E} \quad \underline{\underline{\omega}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T)$$

ALLORA $\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r} = \vec{s}_0 + (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}})\vec{r} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r} + \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}$ → $\vec{s}_0$ = TRASLAZIONE; $\vec{s}''' = \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}$ = ROTAZIONE RIGIDA $\Big\}$ $\boxed{\vec{s}'' = \vec{s}_0 + \vec{s}'''}$ MOTO RIGIDO

E QUINDI $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}}$ RAPPRESENTA GLI EFFETTI DELLA DEFORMAZIONE, E $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ È IL TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA

COME POSSIAMO OTTENERE $\underline{\underline{\varepsilon}}$?

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} & \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{P_0} & \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{P_0} \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad \underline{\underline{e}}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} & \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} & \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{P_0} \end{bmatrix}$$

2A- IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI -

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{P_0} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} & 2\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{P_0} & \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{P_0} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{P_0} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{P_0} + \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{P_0} & 2\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{P_0} \end{bmatrix} =$$

PORTANDO ALL'INTERNO IL TERMINE (1/2)

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

I TERMINI FUORI DIAGONALE SONO UGUALI A 2 A 2, INFATTI $\underline{\underline{\varepsilon}}$ È SIMMETRICO

[N.B. LE DERIVATE PARZIALI SONO SEMPRE CALCOLATE NEL PUNTO P_0]

ASSEGNIAMO DEI NOMI SPECIALI:

SULLA DIAGONALE ε → $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ $\qquad$ ε → DILATAZIONI

FUORI DIAGONALE γ → $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$;

$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$; $\qquad$ γ → SCORRIMENTI ANGOLARI

$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$;

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA

NB: LE COMPONENTI FUORI DALLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO LA METÀ DEGLI SCORRIMENTI ANGOLARI.

2A - IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI -

PER LA PARTE EMISIMMETRICA

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} - \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{P_0} & \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} - \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{P_0} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{P_0} - \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{P_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{P_0} - \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} & \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{P_0} - \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{P_0} & 0 \end{bmatrix} =$$

PORTANDO IL TERMINE (1/2) ALL'INTERNO

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

LA DIAGONALE PRINCIPALE È NULLA

I TERMINI FUORI DALLA DIAGONALE SONO A 2 A 2 UGUALI MA DI SEGNO OPPOSTO (IN VALORE)

INFATTI. $\underline{\underline{\omega}}$ È EMISIMMETRICO

[N.B. LE DERIVATE SONO SEMPRE CALCOLATE NEL PUNTO P_0]

$$\underline{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ +\omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & +\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

TENSORE DELLA ROTAZIONE INFINITESIMA

CON: $\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$; $\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$; $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

ESEMPIO APPLICATIVO

ASSEGNATO IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}} = K \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ CON $K = 10^{-5}$ RICAVARE $\underline{\underline{\varepsilon}}$ E $\underline{\underline{\omega}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right) \qquad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T\right) \qquad \underline{\underline{e}}^T = k \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}k\left\{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}k\begin{bmatrix} 1+1 & 3-3 & -2-8 \\ -3+3 & 2+2 & -1-1 \\ -8-2 & -1-1 & 3+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}k\begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 0 & 4 & -2 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

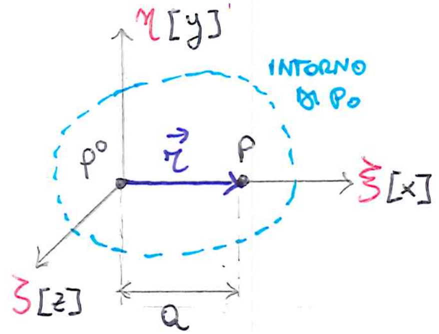
$\underline{\underline{\varepsilon}}$ SIMMETRICO

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}k\left\{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}k\begin{bmatrix} 1-1 & 3+3 & -2+8 \\ -3-3 & 2-2 & -1+1 \\ -8+2 & -1+1 & 3-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}k\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\omega}}$ EMISIMMETRICO

VERIFICA: $\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} = k\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = k\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{e}}$ E INFATTI $\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{e}}$

· LE 6 COMPONENTI DI DEFORMAZIONE - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ - HANNO UN PRECISO SIGNIFICATO FISICO: CONSIDERIAMO UN GENERICO PUNTO P DELL'INTORNO INFINITESIMO DI P_0 CHE GIACE SULL'ASSE ξ A UNA DISTANZA a DA QUEST'ULTIMO



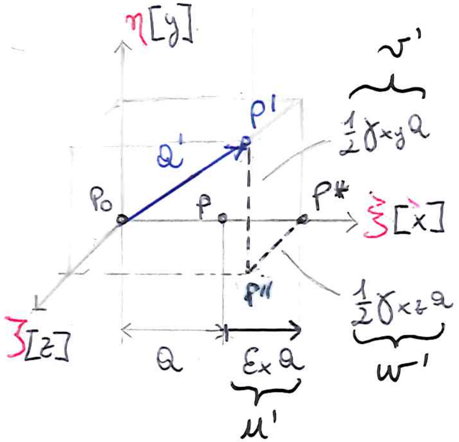
[N.B. TERNA DESTRA]

LE COORDINATE DI P SONO : $P = (a, 0, 0)$

OVVERO: $\xi = a$, $\eta = \zeta = 0$ E QUINDI $\vec{r} = \{a, 0, 0\}^T$

LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DI P ASSOCIATE ALLA DEFORMAZIONE PURA DELL'INTORNO DI P_0 u', v', w' SONO: $\vec{s}\,' = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}$

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u' = \varepsilon_x a = \overline{PP^*} \\ v' = \frac{1}{2}\gamma_{xy} a = \overline{P'P''} \\ w' = \frac{1}{2}\gamma_{xz} a = \overline{P^*P''} \end{cases}$$



P SI È SPOSTATO IN P' DI $\varepsilon_x a$ IN DIREZIONE ξ, DI $\frac{1}{2}\gamma_{xy} a$ IN DIREZIONE η E DI $\frac{1}{2}\gamma_{xz} a$ IN DIREZIONE ζ

IL SEGMENTO $\overline{P_0P} = a$ DIVENTA $\overline{P_0P'}$ DI LUNGHEZZA a'

PER IL TEOREMA DI PITAGORA

$$\boxed{\overline{P_0P'} = a'} = \sqrt{(a + \varepsilon_x a)^2 + (1/2\,\gamma_{xy} a)^2 + (1/2\,\gamma_{xz} a)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2(1+\varepsilon_x)^2 + a^2(1/2\,\gamma_{xy})^2 + a^2(1/2\,\gamma_{xz})^2} =$$

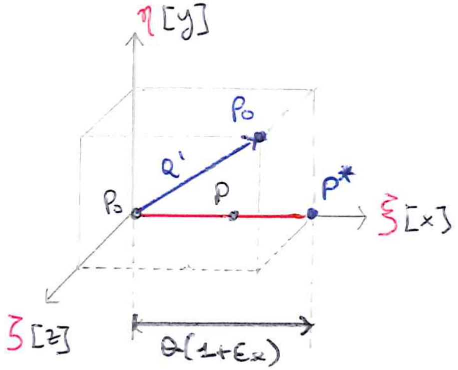
$$= \sqrt{a^2\left[(1+\varepsilon_x)^2 + (1/2\,\gamma_{xy})^2 + (1/2\,\gamma_{xz})^2\right]} =$$

$$= a\sqrt{(1+\varepsilon_x)^2 + (1/2\,\gamma_{xy})^2 + (1/2\,\gamma_{xz})^2} =$$

$$= a\sqrt{1 + 2\varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_x^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xz}^2}} \cong \underline{a\sqrt{1+2\varepsilon_x}}$$

INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE, TRASCURABILI (IN QUANTO ε E γ SONO MOLTO PICCOLE: $\varepsilon_x^2, \gamma_{xy}^2, \gamma_{xz}^2 \ll \varepsilon_x$)

2B - INTERPRETAZIONE FISICA DELLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE -



$$\overline{P_0P'} = a' \cong a\sqrt{1+2\varepsilon_x}$$

FACENDO UNO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$ TRONCATO AL PRIMO ORDINE

ALLORA: $a' \cong a\left[1+\frac{1}{2}(2\varepsilon_x)\right] = a(1+\varepsilon_x)$

OVVERO LA NUOVA LUNGHEZZA $\boxed{\overline{P_0P'}}$ DEL SEGMENTO $\overline{P_0P}$, TRATTANDOSI DI SPOSTAMENTI INFINITESIMI PUÒ ESSERE CONFUSA CON LA PROIEZIONE $\boxed{\overline{PP^*}}$ DI $\overline{P_0P'}$ SULL'ASSE ξ

ESSENDO $a' = a + a\varepsilon_x \rightarrow a' - a = a\varepsilon_x \rightarrow \frac{a'-a}{a} = \frac{\cancel{a}\,\varepsilon_x}{\cancel{a}}$ PERTANTO $\boxed{\varepsilon_x = \frac{a'-a}{a} = \frac{\Delta l}{l}}$

DOVE Δl È LA VARIAZIONE DI LUNGHEZZA E $l = a$ È LA LUNGHEZZA INIZIALE DI $\overline{P_0P}$, SEGMENTO INIZIALMENTE DIRETTO LUNGO L'ASSE x

ALLORA ε_x = VARIAZIONE DI LUNGHEZZA RIFERITA ALLA LUNGHEZZA INIZIALE DI UN SEGMENTO ORIGINARIAMENTE IN DIREZIONE x

ANALOGA INTERPRETAZIONE PUÒ DARSI ALLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE ε_y E ε_z, RIFERITE ALLE DIREZIONI y E z RISPETTIVAMENTE

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2mm] \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

DILATAZIONI = VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DI UNA FIBRA DEL SOLIDO INIZIALMENTE ALLINEATA CON L'ASSE x, y O z RISPETTIVAMENTE RIFERITA ALLA LUNGHEZZA INIZIALE

$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{\Delta l}{l}}$$

COMPONENTI DI DILATAZIONE

$$\varepsilon_i = \frac{a'-a}{a} = \frac{a'}{a} - 1$$

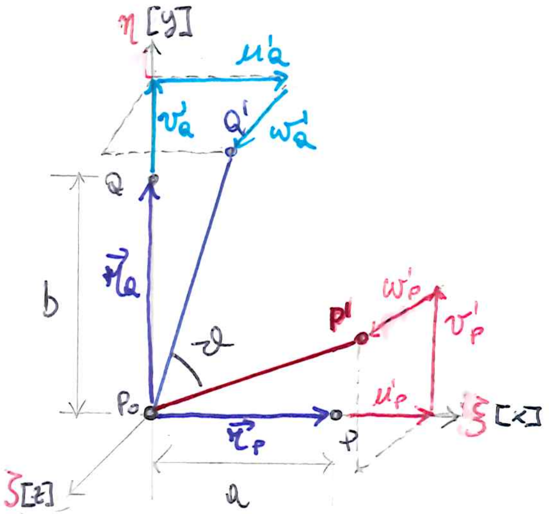
$a' > a \rightarrow \Delta l > 0 \rightarrow \varepsilon_i > 0$

$a' < a \rightarrow \Delta l < 0 \rightarrow \varepsilon_i < 0$

$a' = a \rightarrow \Delta l = 0 \rightarrow \varepsilon_i = 0$

NB: DIMENSIONALMENTE: $[\varepsilon_x] = \frac{[L]}{[L]} = [-]$ È UNA QUANTITA' PRIVA DI DIMENSIONI (NUMERO PURO!)

2B - INTERPRETAZIONE FISICA DELLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE -



PER LE ULTERIORI TRE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE γ_{xy}, γ_{xz} E γ_{yz} DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI $\underline{\underline{\varepsilon}}$ CONSIDERIAMO 2 PUNTI P E Q DISPOSTI RISPETTIVAMENTE SUGLI ASSI ξ E η A DISTANZA a E b DA P_0 RISPETTIVAMENTE

$$P=(a,0,0) \qquad \vec{r}_P=(a,0,0)^T \qquad \vec{s}\,'_P=\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}_P$$

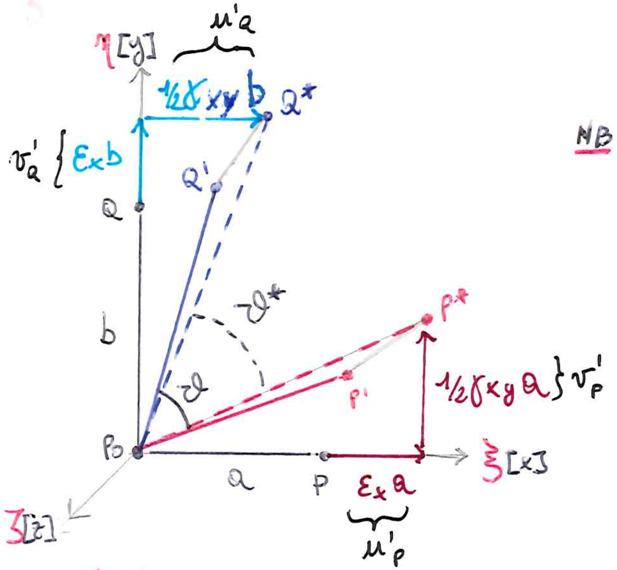
$$Q=(0,b,0) \qquad \vec{r}_Q=(0,b,0)^T \qquad \vec{s}\,'_Q=\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}_Q$$

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \cdot\,(x-x_0) \\ (y-y_0) \\ (z-z_0) \end{array}$$

A SEGUITO DELLA DEFORMAZIONE DELL'INTORNO DI P_0 I PUNTI P E Q SI SPOSTANO IN P' E Q':

$$\begin{cases} u'_P = \varepsilon_x a \\ v'_P = \frac{1}{2}\gamma_{xy} a \\ w'_P = \frac{1}{2}\gamma_{xz} a \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_Q = \frac{1}{2}\gamma_{xy} b \\ v'_Q = \varepsilon_y b \\ w'_Q = \frac{1}{2}\gamma_{yz} b \end{cases}$$

VOGLIAMO STUDIARE LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO TRA LE FIBRE (RAPPRESENTATE DAI SEGMENTI $\overline{P_0P}$ CHE DIVENTA $\overline{P_0P'}$ E $\overline{P_0Q}$ CHE DIVENTA $\overline{P_0Q'}$) INIZIALMENTE SI HA UN ANGOLO RETTO ($\pi/2$ IN RADIANTI) AL TERMINE L'ANGOLO VALE $\vartheta=(\overline{P_0P'}\,\widehat{}\,\overline{P_0Q'})$

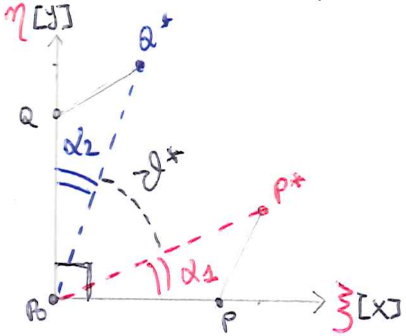


NB FACCIAMO UN'APPROSSIMAZIONE: L'ANGOLO ϑ GIACE SU UN PIANO CHE PASSA PER I PUNTI P_0, P' E Q' PER CALCOLARE L'ANGOLO ϑ TRASCURIAMO GLI SPOSTAMENTI w'_P E w'_Q IN DIREZIONE ζ E CALCOLIAMO L'ANGOLO ϑ^* OTTENUTO COME PROIEZIONE SUL PIANO ξ,η: $\vartheta=(\overline{P_0P'}\,\widehat{}\,\overline{P_0Q'})\cong\vartheta^*(\overline{P_0P^*}\,\widehat{}\,\overline{Q_0Q^*})$

POSSIAMO NOTARE CHE $\frac{\pi}{2}-\vartheta^*=\alpha_1+\alpha_2$, CON α_1 ANGOLO TRA $\overline{P_0P^*}$ E L'ASSE ξ E α_2 ANGOLO TRA P_0Q^* E L'ASSE η, E CALCOLARE α_1 E α_2:

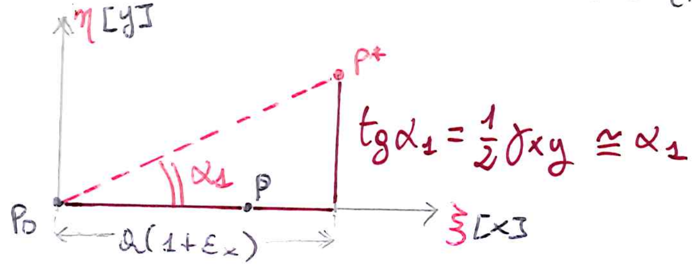
$$\boxed{\alpha_1} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}a}{(1+\varepsilon_x)a}=\frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{1+\varepsilon_x}$$

ESSENDO $\varepsilon_x \ll 1 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$



PER ANGOLI MOLTO PICCOLI POSSIAMO CONFONDERE LA TANGENTE CON L'ANGOLO (IN RADIANTI)

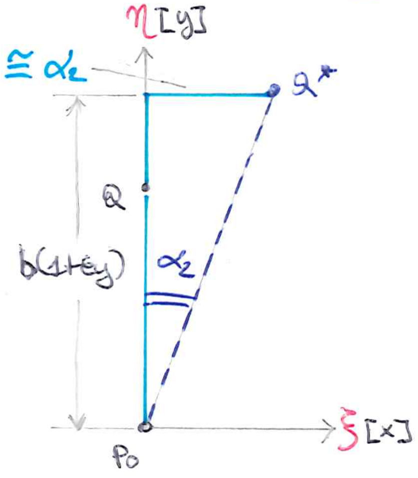
ALLORA $\boxed{\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\gamma_{xy}}$



NB: $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$

$\boxed{\alpha_2} \rightarrow tg\,\alpha_2 = \dfrac{1/2\,\gamma_{xy}\, b}{(1+\varepsilon_y)\, b} = \dfrac{1/2\,\gamma_{xy}}{1+\varepsilon_y}$ ESSENDO $\varepsilon_y \ll 1 \rightarrow tg\,\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$

$tg\,\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cong \alpha_2$



PER ANGOLI MOLTO PICCOLI POSSIAMO CONFONDERE LA TANGENTE CON L'ANGOLO (IN RADIANTI)

ALLORA $\boxed{\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_{xy}}$

N.B. $\underline{\varepsilon}$ È SIMMETRICO $\rightarrow \frac{\pi}{2} - \vartheta^* = \frac{1}{2}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \gamma_{xy}$

ALLORA γ_{xy} È LA VARIAZIONE (TOTALE) DI ANGOLO (ESPRESSA IN RADIANTI) FRA DUE FIBRE ORIGINARIAMENTE ALLINEATE CON GLI ASSI x E y.

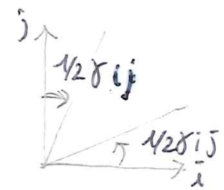
ANALOGAMENTE, γ_{xz} È LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO (IN RADIANTI) FRA DUE FIBRE ORIGINARIAMENTE ALLINEATE CON GLI ASSI x E z

E γ_{yz} È LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO (IN RADIANTI) FRA DUE FIBRE ORIGINARIAMENTE ALLINEATE CON GLI ASSI y E z

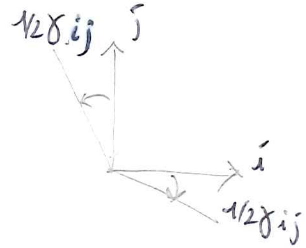
N.B. LE COMPONENTI NEL TENSORE SONO $\frac{1}{2}\gamma_{ij}$, MENTRE γ_{ij} RAPPRESENTA LA VARIAZIONE TOTALE DELL'ANGOLO

LE γ SONO ESPRESSE IN RADIANTI, SONO QUINDI UN NUMERO PURO (COME LE ε) E SI DEFINISCONO $\boxed{\text{SCORRIMENTI ANGOLARI}}$

SE $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij} > 0$ ALLORA L'ANGOLO, INIZIALMENTE RETTO, TRA LE FIBRE ALLINEATE CON GLI ASSI i E j DIVENTA ACUTO $\rightarrow$ SI CHIUDE



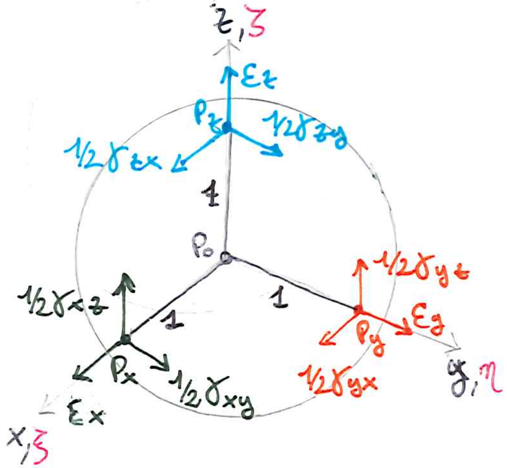
SE $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij} < 0$ ALLORA L'ANGOLO DIVENTA OTTUSO $\rightarrow$ SI APRE



2C – COMPONENTI DI DEFORMAZIONE RISPETTO A UNA TERNA QUALUNQUE –

LA DEFORMAZIONE PURA DELL'INTORNO INFINITESIMO DI P_0 È COMPLETAMENTE DEFINITA NOTE DILATAZIONI E SCORRIMENTI RELATIVI ALLA TERNA DI ASSI ORTOGONALI ξ, η, ζ PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI x, y, z E CON ORIGINE IN P_0

CONSIDERIAMO UNA SFERA DI RAGGIO UNITARIO E CENTRO IN P_0 CHE INTERSECA GLI ASSI x, y, z NEI PUNTI P_x, P_y E P_z RISPETTIVAMENTE



$P_x = (1,0,0)$

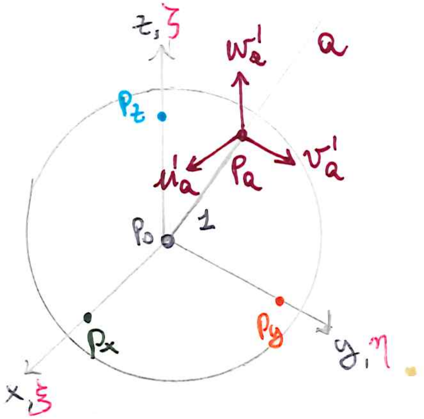
$P_y = (0,1,0)$

$P_z = (0,0,1)$

$$\vec{s}'_x \begin{cases} u'_{P_x} = \varepsilon_x \\ v'_{P_x} = \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} \\ w'_{P_x} = \tfrac{1}{2}\gamma_{xz} \end{cases} \qquad \vec{s}'_y \begin{cases} u'_{P_y} = \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} \\ v'_{P_y} = \varepsilon_y \\ w'_{P_y} = \tfrac{1}{2}\gamma_{yz} \end{cases} \qquad \vec{s}'_z \begin{cases} u'_{P_z} = \tfrac{1}{2}\gamma_{xz} \\ v'_{P_z} = \tfrac{1}{2}\gamma_{yz} \\ w'_{P_z} = \varepsilon_z \end{cases}$$

LE DILATAZIONI ε SONO PERPENDICOLARI ALLA SFERA E IN DIREZIONE DEGLI ASSI x, y, z

GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ SONO TANGENTI ALLA SFERA



CONSIDERIAMO IL PUNTO P_a, IN CUI LA RETTA a INCROCIA LA SFERA

LA RETTA a È INDIVIDUATA DAI COSENI DIRETTORI $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ RISPETTO AGLI ASSI x, y, z

ALLORA $P_a = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ ESSENDO IL RAGGIO DELLA SFERA UNITARIO

LO SPOSTAMENTO (DOVUTO ALLA DEFORMAZIONE PURA) DI P_a SARÀ $\vec{s}'_a = (u'_a, v'_a, w'_a)^T$

OVVERO:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \vec{s}'_a & P_x & P_y & P_z \\ u'_a = & \varepsilon_x \alpha_x + & \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + & \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z \\ v'_a = & \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + & \varepsilon_y \alpha_y + & \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z \\ w'_a = & \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + & \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + & \varepsilon_z \alpha_z \end{array}$$

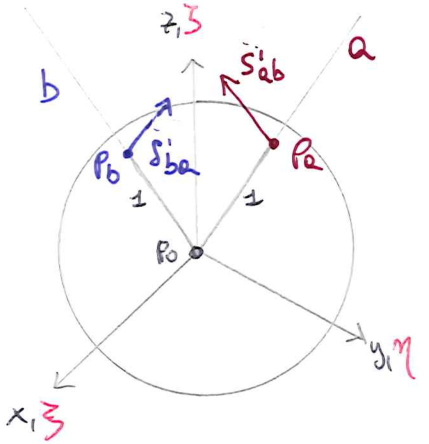
ALLORA: $\varepsilon_a = u'_{P_a}\alpha_x + v'_{P_a}\alpha_y + w'_{P_a}\alpha_z = (\varepsilon_x\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z)\alpha_x + (\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z)\alpha_y + (\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z\alpha_z)\alpha_z$

QUINDI: $\boxed{\varepsilon_a = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \varepsilon_z\alpha_z^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{xz}\alpha_x\alpha_z + \gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z}$ [*] DILATAZIONE LUNGO UNA GENERICA DIREZIONE a

LA [*] È LA RELAZIONE FONDAMENTALE CHE CONSENTE DI CALCOLARE LA DILATAZIONE LUNGO UNA GENERICA DIREZIONE a NOTO IL TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA $\underline{\underline{\varepsilon}}$ E LA DIREZIONE a, OVVERO I COSENI DIRETTORI $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

N.B. È DUALE DELLA RELAZIONE DI CAUCHY, CHE CONSENTIVA DI RICAVARE LA TENSIONE NORMALE σ_n SU UNA GIACITURA DI NORMALE $\vec{n}$

CONSIDERIAMO ORA DUE PUNTI: IL PUNTO P_a, IN CUI LA RETTA a INCROCIA LA SFERA, E IL PUNTO P_b, IN CUI LA RETTA b INCROCIA LA SFERA



$$P_a = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$$

$$P_b = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$$ CON $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ COSENI DIRETTORI DELLA RETTA b

$$\vec{s}'_a = \{u'_a, v'_a, w'_a\}^T \quad E \quad \vec{s}'_b = \{u'_b, v'_b, w'_b\}^T$$

PROIETTIAMO $\vec{s}'_a$ LUNGO b: $\rightarrow s'_{ab}$

$$s'_{ab} = u'_a\beta_x + v'_a\beta_y + w'_a\beta_z =$$

$$= (\varepsilon_x\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z)\beta_x + (\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z)\beta_y + (\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z\alpha_z)\beta_z$$

RACCOGLIAMO DILATAZIONI E SCORRIMENTI:
$$s'_{ab} = \underbrace{\varepsilon_x\alpha_x\beta_x + \varepsilon_y\alpha_y\beta_y + \varepsilon_z\alpha_z\beta_z}_{\text{DILATAZIONI}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x\beta_y}_{\gamma_{xy}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x\beta_z}_{\gamma_{xz}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y\beta_z}_{\gamma_{yz}}$$

PER RICAVARE $\vec{s}'_b$ BISOGNA MOLTIPLICARE $\underline{\underline{\varepsilon}}$ PER $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$, LE SUE COMPONENTI SARANNO ANALOGHE A QUELLE DI $\vec{s}'_a$:

$$u'_b = \varepsilon_x\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_z; \quad v'_b = \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_x + \varepsilon_y\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_z; \quad w'_b = \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_y + \varepsilon_z\beta_z$$

PROIETTIAMO $\vec{s}'_b$ LUNGO a: $\rightarrow s'_{ba}$

$$s'_{ba} = u'_b\alpha_x + v'_b\alpha_y + w'_b\alpha_z = (\varepsilon_x\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_z)\alpha_x + (\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_x + \varepsilon_y\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_z)\alpha_y + (\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_y + \varepsilon_z\beta_z)\alpha_z$$

RACCOGLIENDO ε E γ
$$\vec{s}'_{ba} = \underbrace{\varepsilon_x\alpha_x\beta_x + \varepsilon_y\alpha_y\beta_y + \varepsilon_z\alpha_z\beta_z}_{\text{DILATAZIONI}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y\beta_x}_{\gamma_{xy}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x\beta_z + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z\beta_x}_{\gamma_{xz}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y\beta_z + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z\beta_y}_{\gamma_{yz}}.$$

2C – COMPONENTI DI DEFORMAZIONE RISPETTO A UNA TERNA QUALSIASI –

ALLORA $\boxed{\delta'_{ab} = \delta'_{ba}}$ ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER GLI SFORZI $\tau_{nm} = \tau_{mn}$: PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ

SE CONSIDERIAMO DUE DIREZIONI ORTOGONALI $a \perp b$ ALLORA $\delta'_{ab} = \delta'_{ba} = \frac{1}{2}\gamma_{ab}$, OVVERO METÀ DELLO SCORRIMENTO CHE AVVIENE NELL'ANGOLO ORIGINARIAMENTE RETTO TRA LE RETTE DI DIREZIONE a E b

$$\frac{1}{2}\gamma_{ab} = \varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \frac{1}{2}\gamma_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \frac{1}{2}\gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$$

E QUINDI

$$\boxed{\gamma_{ab} = 2(\varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z) + \gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \gamma_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)}$$

N.B. DUALE DELLA RELAZIONE DI CAUCHY, CHE CONSENTE DI CALCOLARE τ_{nm} UNA VOLTA NOTE $\vec{n}$ E $\vec{m}$

2D - COMPONENTI PRINCIPALI ED INVARIANTI DI DEFORMAZIONE

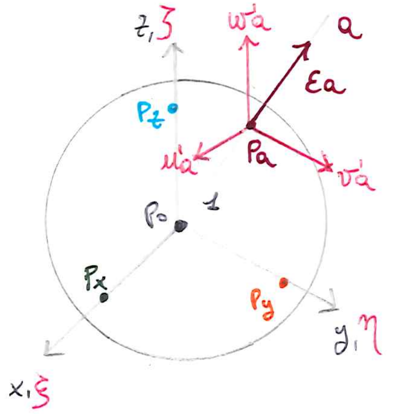
SI È VISTO CHE LO SPOSTAMENTO DI UN GENERICO PUNTO P, APPARTENENTE ALL'INTORNO DEL PUNTO P_0 SOGGETTO A DEFORMAZIONE PURA, VARIA AL VARIARE DELLA RETTA a SULLA QUALE GIACE IL PUNTO. È LOGICO PERTANTO CHIEDERSI SE:

- ESISTONO PARTICOLARI DIREZIONI a LUNGO LE QUALI LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO P_a, $\vec{s}'_a$, HA DIREZIONE COINCIDENTE CON a, OVVERO PER LE QUALI SIANO NULLI GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ E SI ABBIANO SOLO DILATAZIONI ε?

SE TALI DIREZIONI ESISTONO, SONO DETTE DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE E LE RELATIVE DEFORMAZIONI COMPONENTI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE.

SUPPONIAMO CHE LA RETTA a SIA DIREZIONE PRINCIPALE DI DEFORMAZIONE: ALLORA NEL PUNTO P_a LO SPOSTAMENTO, DOVUTO A DEFORMAZIONE PURA, $\vec{s}'_a$ È DIRETTO ESCLUSIVAMENTE SECONDO LA DIREZIONE a, HA COME MODULO IL VALORE ε_a DELLA CORRISPONDENTE DILATAZIONE PRINCIPALE E GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ_{ab} SONO NULLI: $\varepsilon_a \neq 0$ E $\gamma_{ab} = 0 \ \forall b$

$$\vec{s}'_a = \varepsilon_a \vec{a}$$ DOVE $\vec{a}$ È IL VERSORE DELLA DIREZIONE a



INDICANDO CON $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ I COSENI DIRETTORI DELLA RETTA a LE COMPONENTI DI $\vec{s}'_a$ SONO:

$$\begin{cases} u'_a = \varepsilon_a \alpha_x \\ v'_a = \varepsilon_a \alpha_y \\ w'_a = \varepsilon_a \alpha_z \end{cases}$$

MA D'ALTRA PARTE:

$$\begin{cases} u'_a = \varepsilon_x \alpha_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z \\ v'_a = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z \\ w'_a = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z \end{cases}$$

ALLORA SE a È UNA DIREZIONE PRINCIPALE DI DEFORMAZIONE DEVONO ESSERE VALIDE ENTRAMBE:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a \alpha_x &= \varepsilon_x \alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z \\ \varepsilon_a \alpha_y &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z \\ \varepsilon_a \alpha_z &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon_a)\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + (\varepsilon_y - \varepsilon_a)\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + (\varepsilon_z - \varepsilon_a)\alpha_z &= 0 \end{aligned}} \quad [*]$$

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER L'ANALISI DELLA TENSIONE, [*] È UN SISTEMA OMOGENEO NELLE TRE INCOGNITE $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ED È RICONDUCIBILE AD UN PROBLEMA AGLI AUTOVALORI: LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA PUÒ ESSERE SCRITTA COME $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_a \underline{\underline{I}}}$ E IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI NON BANALI ($\alpha_x \neq 0, \alpha_y \neq 0, \alpha_z \neq 0$) QUANDO SI ANNULLA IL SUO DETERMINANTE $\boxed{\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_a \underline{\underline{I}}) = 0}$, RISPETTANDO LA CONDIZIONE $\boxed{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1}$ (a DEVE ESSERE UNA DIREZIONE VALIDA)

$$\det \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_a) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\varepsilon_y - \varepsilon_a) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & (\varepsilon_z - \varepsilon_a) \end{bmatrix} = 0 \iff \boxed{\varepsilon_a^3 - J_1 \varepsilon_a^2 - J_2 \varepsilon_a - J_3 = 0}$$

EQUAZIONE CUBICA IN ε_a OTTENUTA SVILUPPANDO IL DETERMINANTE DI $(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_a \underline{\underline{I}})$: EQUAZIONE CARATTERISTICA CON J_1, J_2, J_3 INVARIANTI DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI INFINITESIME $\underline{\underline{\varepsilon}}$

INVARIANTE PRIMO O LINEARE $\boxed{J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$

$\boxed{J_1, J_2, J_3 \text{ INVARIANTI DI } \underline{\underline{\varepsilon}}}$

N.B. [FORME ANALOGHE A I_1, I_2, I_3 INVARIANTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$]

INVARIANTE SECONDO O QUADRATICO

$$\boxed{J_2 = \tfrac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z)}$$

NB - $J_2 = -\left(\det\begin{bmatrix}\varepsilon_y & \frac12\gamma_{yz}\\ \frac12\gamma_{yz} & \varepsilon_z\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac12\gamma_{xz}\\ \frac12\gamma_{xz} & \varepsilon_z\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac12\gamma_{xy}\\ \frac12\gamma_{xy} & \varepsilon_y\end{bmatrix}\right)$

INVARIANTE TERZO O CUBICO

$$\boxed{J_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \tfrac14(\gamma_{xy}\gamma_{xz}\gamma_{yz}) - \tfrac14(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2)}$$

NB. $J_3 = \det \underline{\underline{\varepsilon}}$

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\boxed{\varepsilon_a^3 - J_1\varepsilon_a^2 - J_2\varepsilon_a - J_3 = 0}$ AMMETTE SEMPRE 3 RADICI REALI (PER LA SIMMETRIA DI $\underline{\underline{\varepsilon}}$)

CONSEGUENTEMENTE ESISTONO 3 COMPONENTI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE $\boxed{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ DILATAZIONI PRINCIPALI

E SI POSSONO DETERMINARE UNIVOCAMENTE 3 DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE (AUTOVETTORI DEL PROBLEMA) MUTUALMENTE ORTOGONALI (N.B. SI PUÒ DETERMINARE LA DIREZIONE MA NON IL VERSO)

È POSSIBILE INDIVIDUARE 3 CASI:

N.B. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

1° CASO $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ 3 RADICI DISTINTE, LE 3 CORRISPONDENTI DIREZIONI PRINCIPALI SONO ORTOGONALI

2° CASO $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ o $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ 2 RADICI COINCIDENTI E 1 DISTINTA, SI PUÒ DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLA RADICE DISTINTA E TUTTE LE DIREZIONI CONTENUTE NEL PIANO ORTOGONALE A ESSA SONO DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

3° CASO $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ 3 RADICI COINCIDENTI, TUTTE LE DIREZIONI SONO PRINCIPALI

NEI 3 CASI È SEMPRE POSSIBILE INDIVIDUARE (NEL PRIMO CASO UNIVOCAMENTE, NEGLI ALTRI DUE VIA VIA PIÙ ARBITRARIAMENTE) UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE IN CUI IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI INFINITESIME $\underline{\underline{\varepsilon}}$ HA SOLO DILATAZIONI (ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO CON $\underline{\underline{S}}$)

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ $\quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

$\varepsilon_1 \to \vec{n_1}$

$\varepsilon_2 \to \vec{n_2}$

$\varepsilon_3 \to \vec{n_3}$

[CON $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ TERNA DESTRA]

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{n_1} & \vec{n_2} & \vec{n_3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \end{array} \quad E \quad \boxed{\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ J_2 &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) \\ J_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned}}$$

INVARIANTI DI DEFORMAZIONE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE 1,2,3

SE $\boxed{J_3 = 0}$ ALLORA ALMENO UNA TRA $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 È NULLA → STATO PIANO DI DEFORMAZIONE

SE $\boxed{J_2 = 0}$ $\vee$ E $\boxed{D_3 = 0}$ ALLORA ALMENO DUE TRA $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 SONO NULLE → STATO MONO ASSIALE DI DEFORMAZIONE

NB. NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE LE RELAZIONI FONDAMENTALI CHE CONSENTONO DI CALCOLARE DILATAZIONI LUNGO UNA GENERICA DIREZIONE a E GLI SCORRIMENTI ANGOLARI NOTE DUE DIREZIONI ORTOGONALI a E b DIVENTANO:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_1 \alpha_1^2 + \varepsilon_2 \alpha_2^2 + \varepsilon_3 \alpha_3^2$$

$$\gamma_{ab} = 2\varepsilon_1 \alpha_1 \beta_1 + 2\varepsilon_2 \alpha_2 \beta_2 + 2\varepsilon_3 \alpha_3 \beta_3$$

[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ COSENI DIRETTORI DI a; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ COSENI DIRETTORI DI b] RISPETTO AL NUOVO RIFERIMENTO 1,2,3

- PER IL $\boxed{\text{PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ}}$, PRESE DUE DILATAZIONI PRINCIPALI ε_i E ε_j E DETTO ϑ_{ij} L'ANGOLO TRA LE CORRISPONDENTI DIREZIONI PRINCIPALI, DEVE RISULTARE CHE:

$$S'_{ij} = S'_{ji} \quad \text{OVVERO} \quad \boxed{\varepsilon_i \cos\vartheta_{ij} = \varepsilon_j \cos\vartheta_{ji}}$$

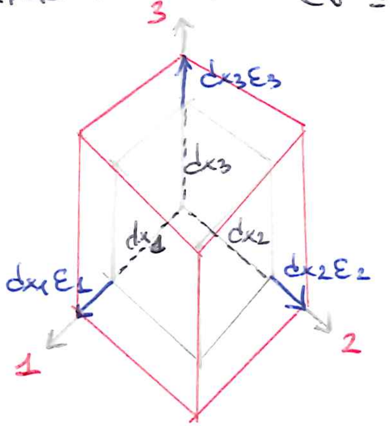
ESSENDO $\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}$ ALLORA $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)\cos\vartheta_{ij} = 0$ SE $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j \to \cos\vartheta_{ij} = 0 \to \vartheta_{ij} = \pi/2$

. SE $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ ALLORA $\vartheta_{12} = \vartheta_{13} = \vartheta_{23} = 90°$ E $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 SONO MUTUAMENTE ORTOGONALI

CONSIDERIAMO UN VOLUME INFINITESIMO CON GLI SPIGOLI PARALLELI AGLI ASSI PRINCIPALI 1, 2, 3 DI LUNGHEZZA dx_1, dx_2, dx_3

IL VOLUME INDEFORMATO VALE $dV = dx_1 dx_2 dx_3$

A DEFORMAZIONE AVVENUTA LA LUNGHEZZA DEI LATI È PARI A $dx_1(1+\varepsilon_1)$, $dx_2(1+\varepsilon_2)$ E $dx_3(1+\varepsilon_3)$ E PERTANTO IL VOLUME DEFORMATO VALE $dV' = dx_1(1+\varepsilon_1)\,dx_2(1+\varepsilon_2)\,dx_3(1+\varepsilon_3)$



RACCOGLIENDO:

$$dV' = dx_1 dx_2 dx_3 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$$
$$= dV(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$$
$$= dV\left[1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\right] =$$
$$= dV\left[1+J_1 - \cancel{J_2} + \cancel{J_3}\right] =$$ ESSENDO $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 INFINITESIMI $J_3 \ll J_2 \ll J_1$
$$= dV\left[1+J_1\right] = dV\left[1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right]$$

ESTENDENDO IL CONCETTO DI DILATAZIONE AL VOLUME POSSIAMO DEFINIRE LA DILATAZIONE VOLUMETRICA ε_V:

$$\varepsilon_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{\cancel{dV} + dV(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - \cancel{dV}}{dV} = \frac{\cancel{dV}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{\cancel{dV}} = \boxed{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} = \boxed{J_1}$$

L'INVARIANTE PRIMO O LINEARE RAPPRESENTA LA VARIAZIONE VOLUMETRICA

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{S}}$ È POSSIBILE SCOMPORRE IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI INFINITESIME:

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}'}$$

DOVE $\boxed{\frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}}}$ È LA DEFORMAZIONE ISOTROPA (PARTE SFERICA DELLA DEFORMAZIONE) E $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}'}$ IL DEVIATORE DI DEFORMAZIONE

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_V/3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_V/3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_V/3 \end{bmatrix}$$

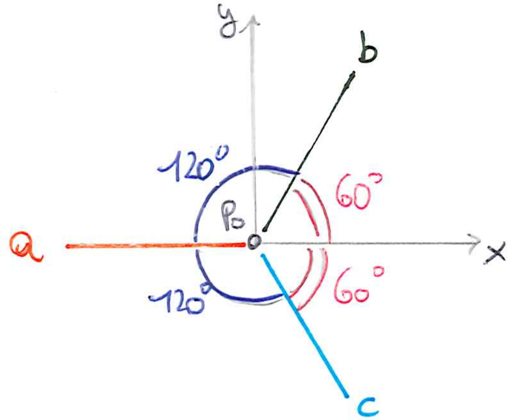
$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_V}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_V}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_V}{3} \end{bmatrix}$$

J_1 DEFORMAZIONE ISOTROPA (PARTE SFERICA) $= \varepsilon_V/3 + \varepsilon_V/3 + \varepsilon_V/3 = \varepsilon_V = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ PARTE DI DEFORMAZIONE CON VARIAZIONE DI VOLUME

J_1' DEVIATORE DI DEFORMAZIONE $= \varepsilon_x - \varepsilon_V/3 + \varepsilon_y - \varepsilon_V/3 + \varepsilon_z - \varepsilon_V/3 = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z - \varepsilon_V = \varepsilon_V - \varepsilon_V = 0$ PARTE DI DEFORMAZIONE SENZA VARIAZIONE DI VOLUME

ESEMPIO APPLICATIVO

CONSIDERIAMO UNA ROSETTA ESTENSIMETRICA CHE MISURA GLI ALLUNGAMENTI DOVUTI A DEFORMAZIONE LUNGO TRE DIREZIONI a, b, c DISPOSTE CON ANGOLI DI 120°



SUPPONIAMO DI ESSERE IN UNA SITUAZIONE DI STATO PIANO DI DEFORMAZIONE E CHE LA ROSETTA RILEVI (MEDIANTE LA DIFFERENZA DELLE RESISTENZE) QUESTE DEFORMAZIONI:

$$\varepsilon_a = 1 \cdot K$$

$$\varepsilon_b = -0{,}3 \cdot K \qquad \text{CON } K = \text{COSTANTE} = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_c = 5 \cdot K$$

* QUANTO VALGONO $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ E γ_{xy}?

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NB. STATO PIANO DI DEFORMAZIONE: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

USIAMO LE RELAZIONI FONDAMENTALI PER CALCOLARE LE DILATAZIONI LUNGO UNA DIREZIONE QUALUNQUE d:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \cancel{\varepsilon_z \alpha_z^2} + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \cancel{\gamma_{xz}\alpha_x\alpha_z} + \cancel{\gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z} = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y$$

PER DETERMINARLE RISPETTO ALLE DIREZIONI a, b, c BASTA CONOSCERE I COSENI DIRETTORI:

a) a È IN DIREZIONE x $\qquad \alpha_x = -1 \; ; \; \alpha_y = 0 \; ; \; \alpha_z = 0$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x(-1)^2 + \varepsilon_y(0)^2 + \gamma_{xy}(-1 \cdot 0) = \varepsilon_x \qquad \varepsilon_a = \varepsilon_x = 1 \cdot K$$

b) b È RUOTATA DI 60° RISPETTO ALL'ASSE x: $\qquad \alpha_x = 1/2 \; ; \; \alpha_y = \sqrt{3}/2 \; ; \; \alpha_z = 0$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x(1/2)^2 + \varepsilon_y(\sqrt{3}/2)^2 + \gamma_{xy}(1/2 \cdot \sqrt{3}/2) = 1/4\,\varepsilon_x + 3/4\,\varepsilon_y + \sqrt{3}/4\,\gamma_{xy} = -0{,}3 \cdot K$$

c) c È RUOTATA DI -60° RISPETTO ALL'ASSE x: $\qquad \alpha_x = 1/2 \; ; \; \alpha_y = -\sqrt{3}/2 \; ; \; \alpha_z = 0$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x(1/2)^2 + \varepsilon_y(-\sqrt{3}/2)^2 + \gamma_{xy}(1/2 \cdot (-\sqrt{3}/2)) = 1/4\,\varepsilon_x + 3/4\,\varepsilon_y - \sqrt{3}/4\,\gamma_{xy} = 5 \cdot K$$

SI HA QUINDI: A

$$\begin{cases} \varepsilon_a \rightarrow \varepsilon_x = 1.k & [1] \\ \varepsilon_b \rightarrow \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = -0.3k & [2] \\ \varepsilon_c \rightarrow \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 5k & [3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 1.k \\ [2]+[3] \quad \frac{3}{2}\varepsilon_y = 4.7k - 0.5k \Rightarrow \frac{3}{2}\varepsilon_y = 4.20k \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{2}{3}\cdot \overset{1.40}{\cancel{4.20}}k = 2.80k \\ [2]-[3] \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{xy} = -5.30k \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(-5.30k) \Rightarrow \gamma_{xy} = -6.12k \end{cases}$$

E SI OTTIENE COSÌ: $\varepsilon_x = 1.k$; $\varepsilon_y = 2.80k$; $\gamma_{xy} = -6.12$; PERTANTO IL TENSORE DI DEFORMAZIONE È COSIFFATTO:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = k\begin{bmatrix} 1. & -3.06 & 0 \\ -3.06 & 2.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SI TROVA POI: $J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 3.80\,k$; $J_2 = \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y = 6.56\,k^2$; $J_3 = \det(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DIVIENE: $\varepsilon_a^3 - J_1\varepsilon_a^2 - J_2\varepsilon_a - J_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_a^3 - 3.80k\,\varepsilon_a^2 - 6.56k^2\varepsilon_a = 0$

DA QUI SI RICAVANO LE DILATAZIONI PRINCIPALI: $\varepsilon_1 = 5.09k$; $\varepsilon_2 = -1.29k$; $\varepsilon_3 = 0$; INFATTI IN QUESTO CASO $\varepsilon_{1,2}$ SONO ANCHE DETERMINABILI MEDIANTE L'EQUAZIONE:

$$\varepsilon_{1,2} = \left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}$$

NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE IL TENSORE DI DEFORMAZIONI È COSIFFATTO:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = k\begin{bmatrix} 5.09 & 0 & 0 \\ 0 & -1.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ED È AGEVOLE VERIFICARE CHE $J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 3.80k$; $J_2 = -(5.09)(-1.29) = 6.56k^2$ $J_3 = (5.09)(-1.29)\cdot 0 = 0$

PER TROVARE LE DIREZIONI PRINCIPALI SI DEVE RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} (1-\varepsilon_a)\alpha_x + (-3.06)\alpha_y + 0\,\alpha_z = 0 & [4] \\ -3.06\,\alpha_1 + (2.80-\varepsilon_a)\alpha_y + 0\,\alpha_z = 0 & [5] \\ 0\,\alpha_1 + 0\cdot\alpha_y - \varepsilon_a\alpha_z = 0 & [6] \end{cases}$$

IN CORRISPONDENZA DI $\varepsilon_a = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

PER CIASCUNO DI QUESTI CASI IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI SI ANNULLA E OCCORRE SCARTARE UNA DELLE EQUAZIONI, AGGIUNGENDO LA CONDIZIONE $\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2=1$.

DIREZIONE PRINCIPALE "1". SI FA USO DELLE EQ. [4] E [6].

SI HA:

$$\begin{cases}(1-5{,}09)\alpha_{1x} - 3{,}06\,\alpha_{1y} = 0 \\ -5{,}09\,\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2+\alpha_{1y}^2+\alpha_{1z}^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4{,}09\,\alpha_{1x} - 3{,}06\,\alpha_{1y} = 0 \\ \alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2+\alpha_{1y}^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{1x} = \dfrac{-3{,}06}{4{,}09}\alpha_{1y} \\ \alpha_{1z}=0 \\ \left[\left(-\dfrac{3{,}06}{4{,}09}\right)^2+1\right]\alpha_{1y}^2 = 1\end{cases}$$

NE SEGUE: $\alpha_{1x} = -0{,}60$; $\alpha_{1y} = +0{,}80$; $\alpha_{1z} = 0$ $\Rightarrow \vec{n}_1 = \{-0{,}60;\ +0{,}80;\ 0.\}$

DIREZIONE PRINCIPALE "2". SI FA ANCORA USO DELLE EQ [4] E [6].

SI HA:

$$\begin{cases}[1-(-1{,}29)]\,\alpha_{2x} - 3{,}06\,\alpha_{2y} = 0 \\ +1{,}29\,\alpha_{2z} = 0 \\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2{,}29\,\alpha_{2x} - 3{,}06\,\alpha_{2y} = 0 \\ \alpha_{2z} = 0 \\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x} = \dfrac{3{,}06}{2{,}29}\alpha_{2y} \\ \alpha_{2z}=0 \\ \left[\left(\dfrac{3{,}06}{2{,}29}\right)^2+1\right]\alpha_{2y}^2 = 1\end{cases}$$

NE SEGUE: $\alpha_{2x} = 0{,}80$; $\alpha_{2y} = +0{,}60$; $\alpha_{2z} = 0$ $\Rightarrow \vec{n}_2 = \{0{,}80;\ +0{,}60;\ 0\}$

DIREZIONE PRINCIPALE "3". SI DEVE FARE USO DELLE EQ. [4] E [5] (LA [6] DIVIENE L'IDENTITÀ $0=0$!)

SI HA:

$$\begin{cases}1\cdot\alpha_{3x} - 3{,}06\,\alpha_{3y} = 0 \\ -3{,}06\,\alpha_x + 2{,}80\,\alpha_{3y} = 0 \\ \alpha_{3x}^2+\alpha_{3y}^2+\alpha_{3z}^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{3x} = 0 \\ \alpha_{3y} = 0 \\ \alpha_{3z}^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \alpha_{3z} = \pm 1$$

← IL SISTEMA 2x2 HA DET≠0 PER LA MATRICE DEI COEFFICIENTI: AMMETTE SOLO SOLUZIONE NULLA!

NE SEGUE $\alpha_{3x} = 0$; $\alpha_{3y} = 0$; $\alpha_{3z} = \pm 1$.

IL SEGNO DI α_{3z} PUÒ ESSERE FISSATO IMPONENDO CHE $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ FORMINO UNA TERNA DESTRA: $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$. NE SEGUE:

$$\vec{n}_3 = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -.6 & +.8 & 0 \\ +.8 & +.6 & 0\end{vmatrix} = \vec{k}\,(-0{,}36-0{,}64) = -\vec{k}$$

PERTANTO $\vec{n}_3 = \{0,\ 0,\ -1\}$. SI OSSERVI PERALTRO CHE $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$.

NOTA 1. EQUAZIONI DI CONGRUENZA INTERNA.

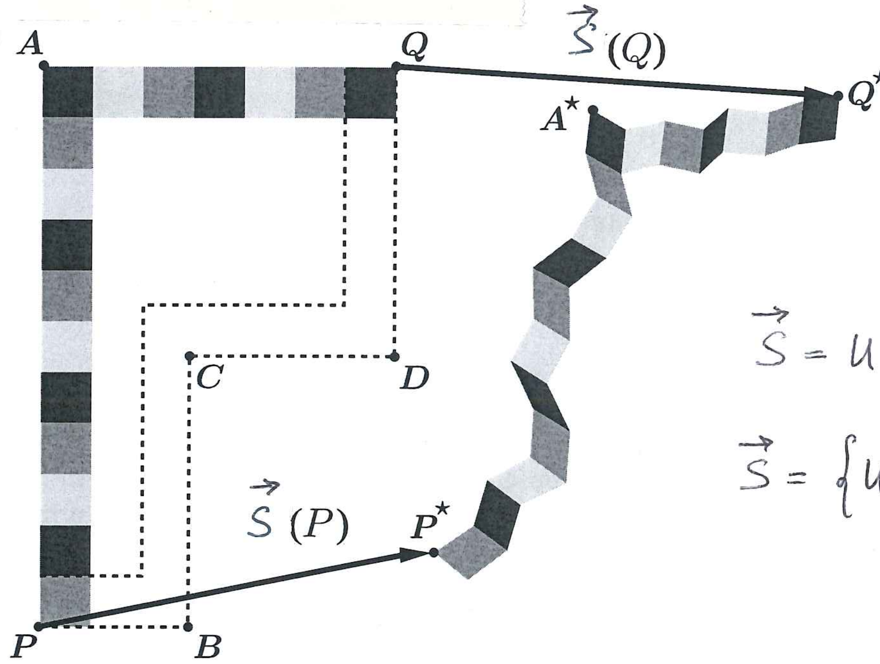
SI OSSERVA CHE SE LE 6 COMPONENTI DI DEFORMAZIONE $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ SONO ASSEGNATE COME FUNZIONI DELLE COORDINATE NON È A PRIORI GARANTITO CHE IL CAMPO DI SPOSTAMENTI CORRISPONDENTE RISULTI CONTINUO E CONGRUENTE CON LA CONTINUITA' INTERNA DELLA MATERIA, CHE ESCLUDE LA POSSIBILITA' DI LACERAZIONI E/O COMPENETRAZIONI.

DI QUESTO CI SI PUÒ RENDERE CONTO SE SI PENSA CHE LE QUANTITA' INCOGNITE DA DETERMINARE SONO 3 (u, v, w) MENTRE SI DISPONE DI 6 EQUAZIONI, IL CHE RENDE IL PROBLEMA SOVRA-DETERMINATO, E CHE LA SOLUZIONE POSSA ESISTERE SOLO SE SONO SODDISFATTE DELLE CONDIZIONI ADDIZIONALI PER LE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE.

DAL PUNTO DI VISTA FISICO SI PUÒ GIUSTIFICARE LA NECESSITA' DI QUESTE CONDIZIONI CON QUESTO RAGIONAMENTO: SE SI SUDDIVIDE IL VOLUME V IN VOLUMETTI INFINITESIMI MEDIANTE UNA TRIPLICE FAMIGLIA DI PIANI PARALLELI A QUELLI COORDINATI, DANDO LUOGO A PARALLELEPIPEDI RETTI DI LATO INFINITESIMO, SE SI SUPPONE DI ATTRIBUIRE A CIASCUN VOLUMETTO COSÌ OTTENUTO LE DEFORMAZIONI CORRISPONDENTI AL RISPETTIVO BARICENTRO, SI TROVA CHE I PARALLELEPIPEDI A LATI RETTI SI TRASFORMANO IN PARALLELEPIPEDI OBLIQUI CON LATI DI LUNGHEZZA VARIATA.
IN GENERALE IN QUESTE CONDIZIONI NON RISULTA PIÙ POSSIBILE RICOMPORRE IL CORPO CONTINUO DI PARTENZA CON SOLI MOTI RIGIDI DEI PARALLELEPIPEDI DEFORMATI, A MENO CHE LE DEFORMAZIONI IMPOSTE NON SODDISFINO LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA INTERNA.

LA SITUAZIONE È ILLUSTRATA IN FIGURA PER UN CORPO INIZIALMENTE PIANO.

LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA ESPRIMONO IL FATTO CHE SCELTI 2 PUNTI ARBITRARI, P E Q ALL'INTERNO DEL CORPO LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u, v, w E DI ROTAZIONE INFINITESIMA $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ NECESSARIE A RICOMPORRE LA CONTINUITA' DEL CORPO PER QUALSIASI PERCORSO CONGIUNGENTE P CON Q NON DIPENDANO DAL PERCORSO STESSO, MA SOLTANTO DALLA POSIZIONE DEI PUNTI ESTREMI, P E Q.



$$\vec{S} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\vec{S} = \{u, v, w\}$$

QUESTO RICHIEDE CHE RISULTI:

$$u_Q = u_P + \int_P^Q du \quad ; \quad v_Q = v_P + \int_P^Q dv \quad ; \quad w_Q = w_P + \int_P^Q dw$$

$$\omega_{xQ} = \omega_{xP} + \int_P^Q d\omega_x \quad ; \quad \omega_{yQ} = \omega_{yP} + \int_P^Q d\omega_y \quad ; \quad \omega_{zQ} = \omega_{zP} + \int_P^Q d\omega_z$$

E CHE LE QUANTITA' INTEGRANDE SIANO DEI <u>DIFFERENZIALI ESATTI</u>

SI INIZIA RICORDANDO CHE $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{\varepsilon}}$, $\quad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T)$; $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T)$

$$\underline{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ +\omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & +\omega_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

PERTANTO

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

E DUNQUE:

$$du = \varepsilon_x\,dx + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} - \omega_z\right)}_{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)} dy + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\gamma_{xz} + \omega_y\right)}_{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)} dz \qquad [1]$$

$$dv = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + \omega_z\right)}_{\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)} dx + \varepsilon_y\,dy + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz} - \omega_x\right)}_{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)} dz \qquad [2]$$

$$dw = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\gamma_{xz} - \omega_y\right)}_{\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz} + \omega_x\right)}_{\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)} dy + \varepsilon_z\, dz \qquad [3]$$

SE dG È UN DIFFERENZIALE ESATTO, ALLORA

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz \qquad [4]$$

MA SE dG HA LA FORMA:

$$dG = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \qquad [5]$$

ALLORA È RICHIESTO CHE SIA:

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial G}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial G}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{cases} \iff \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} \end{matrix} \iff \begin{matrix} \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} & [6] \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} & [7] \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} & [8] \end{matrix}$$

DOVE IL PRIMO PASSAGGIO È CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI SCHWARTZ. (PER UNA FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE LE DERIVATE PARZIALI SECONDE MISTE SONO EGUALI)

APPLICANDO LE [6]-[8] ALLA [1] SI TROVA:

(x-y) $$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \qquad [zx]$$

(x-z) $$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \qquad [yx]$$

(y-z) $$\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \qquad [yy, zz]$$

APPLICANDO LE [6]-[8] ALLA [2] SI OTTIENE:

(x-y) $$\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \qquad [zy]$$

(x-z) $$\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \qquad [xx, zz]$$

(y-z) $$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \qquad [xy]$$

APPLICANDO LE [6] - [8] ALLA [3] SI OTTIENE INFINE:

$$(x-y)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\quad [xx,yy]$$

$$(x-z)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z}-\frac{\partial \omega_y}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_y}{\partial z}=+\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}\quad [yz]$$

$$(y-z)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial \omega_x}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}\quad [xz]$$

DALLE [yy,zz], [xx,zz] E [xx,yy] SEGUE POI:

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\qquad [11]$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\qquad [12]$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\qquad [13]$$

SOMMANDO LE [11] - [13] SI TROVA:

$$2\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=0$$

COMBINANDO ORA LA [12] E LA [13] SI OTTIENE:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right)}_{0}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\quad [xx]$$

MENTRE COMBINANDO LA [11] E LA [13] SI TROVA:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right)}_{0}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\quad [yy]$$

INFINE, COMBINANDO LA [11] E LA [12] SI HA:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right)}_{0}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\quad [zz]$$

ORA SI IMPONE CHE ANCHE $d\omega_x$, $d\omega_y$, $d\omega_z$ RISULTINO DIFFERENZIALI ESATTI.
PER IL PRIMO SI HA: $d\omega_x=\frac{\partial \omega_x}{\partial x}dx+\frac{\partial \omega_x}{\partial y}dy+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}dz$

E TENENDO CONTO DELLE [xx], [xy], [xz] SI SCRIVE:

$$d\omega_x = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}\right)dz$$

DI QUI SI OTTIENE:

(x-y) $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right]} \qquad [14]$$

(x-z) $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]} \qquad [15]$$

(y-z) $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}} \qquad [16]$$

SIMILMENTE DA $d\omega_y = \frac{\partial \omega_y}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega_y}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega_y}{\partial z}dz$ SEGUE, TENENDO CONTO DELLE [yx], [yy], [yz]:

$$d\omega_y = \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)dy + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}\right)dz$$

E DUNQUE

(x-y) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]} \qquad [17]$$

(x-z) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}} \qquad [18]$$

(y-z) $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]} \qquad [19]$$

INFINE DA $d\omega_z = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega_z}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}dz$ SEGUE, TENENDO CONTO DELLE [zx], [zy], [zz]:

$$d\omega_z = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right)dz$$

PERTANTO:

(x-y)
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}} \qquad [20]$$

(x-z)
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]} \qquad [21]$$

(y-z)
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right]} \qquad [22].$$

SI NOTI CHE FRA LE [14] - [22] SOLO 6 SONO INDIPENDENTI (LE [14] E [22]; [15] E [19]; [17] E [21] COINCIDONO) E RAPPRESENTANO LE CONDIZIONI CHE GARANTISCONO (IN UN CORPO MONOCONNESSO) L'ESISTENZA E L'UNICITA' (A MENO DI UN MOTO RIGIDO) DI UN CAMPO DI SPOSTAMENTI CONTINUO CHE PRODUCA LE DEFORMAZIONI ASSEGNATE.

SI OSSERVI, PER ESEMPIO, CHE DALLA [14] SEGUE:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}\right] = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}.$$

SIMILMENTE DALLA [16] SI HA:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z}.$$