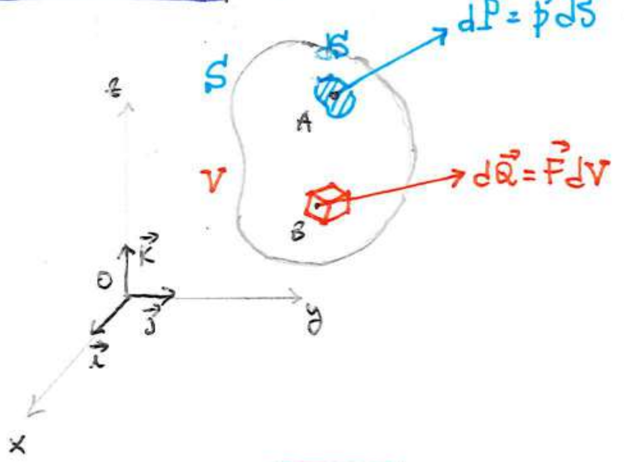
1A. – FORZE E TENSIONI IN UN MEZZO TRIDIMENSIONALE –

AZIONI ESTERNE



FORZE DI SUPERFICIE

$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} \qquad \vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} \qquad p = \frac{[F]}{[L]^2} \qquad Pa = N/m^2$$

FORZE DI VOLUME

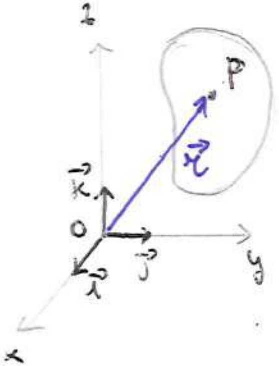
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \qquad \vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} \qquad F = \frac{[F]}{[L]^3}$$

PESO SPECIFICO N/m^3

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}} \Rightarrow R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} R_x &= \int_S p_x\,dS + \int_V F_x\,dV = 0 \\ R_y &= \int_S p_y\,dS + \int_V F_y\,dV = 0 \\ R_z &= \int_S p_z\,dS + \int_V F_z\,dV = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{M}_{(O)} = \vec{0}} \Rightarrow M_{(O)x}\vec{i} + M_{(O)y}\vec{j} + M_{(O)z}\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_{(O)x} = 0 \\ M_{(O)y} = 0 \\ M_{(O)z} = 0 \end{cases}$$



$P = (x, y, z)$

$\vec{P-O} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = \{x, y, z\}$

$$\vec{M}_{(O)} = \int_S \vec{r} \wedge d\vec{P} + \int_V \vec{r} \wedge d\vec{Q} = \int_S \vec{r} \wedge \vec{p}\,dS + \int_V \vec{r} \wedge \vec{F}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{p} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(p_z y - p_y z) + \vec{j}(p_x z - p_z x) + \vec{k}(p_y x - p_x y)$$

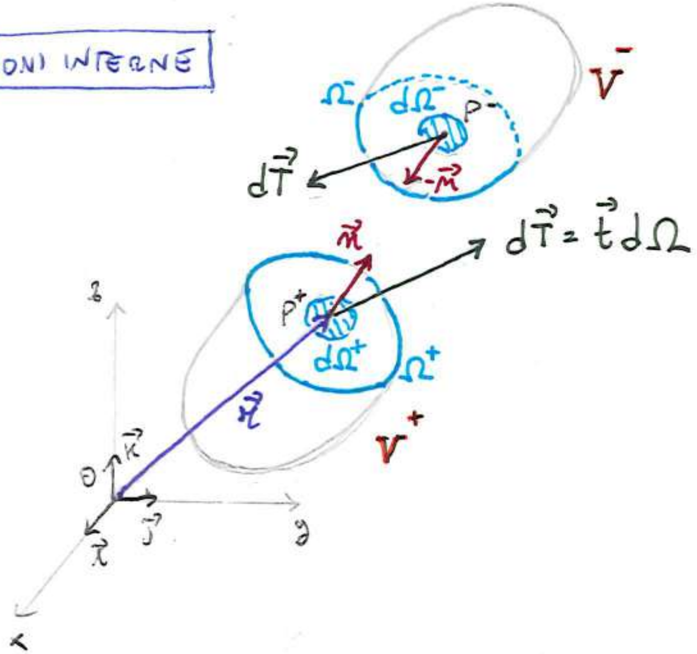
$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \vec{i}(F_z y - F_y z) + \vec{j}(F_x z - F_z x) + \vec{k}(F_y x - F_x y)$$

$$\vec M_{(O)} = \int_S \left[\vec i\,(p_z y - p_y z) + \vec j\,(p_x z - p_z x) + \vec k\,(p_y x - p_x y)\right] dS + \int_V \left[\vec i\,(F_z y - F_y z) + \vec j\,(F_x z - F_z x) + \vec k\,(F_y x - F_x y)\right] dV = \vec 0$$

$$\vec M_{(O)} = \vec i \left[\int_S (p_z y - p_y z)\,dS + \int_V (F_z y - F_y z)\,dV\right] + \vec j \left[\int_S (p_x z - p_z x)\,dS + \int_V (F_x z - F_z x)\,dV\right] + \vec k \left[\int_S (p_y x - p_x y)\,dS + \int_V (F_y x - F_x y)\,dV\right] = \vec 0$$

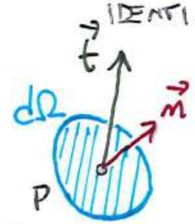
$$\boxed{\vec M_{(O)} = \vec 0} \Rightarrow \begin{cases} M_{(O)x} = 0 & M_{(O)x} = \int_S (p_z y - p_y z)\,dS + \int_V (F_z y - F_y z)\,dV = 0 \\ M_{(O)y} = 0 & M_{(O)y} = \int_S (p_x z - p_z x)\,dS + \int_V (F_x z - F_z x)\,dV = 0 \\ M_{(O)z} = 0 & M_{(O)z} = \int_S (p_y x - p_x y)\,dS + \int_V (F_y x - F_x y)\,dV = 0 \end{cases}$$

AZIONI INTERNE



$\vec t = \{t_x, t_y, t_z\}$ VETTORE SFORZO O TENSIONE

$\vec t$ NEL PUNTO P DIPENDE DALLA POSIZIONE, QUINDI DA $\vec r$, MA IN UN PUNTO PASSANO INFINITI PIANI, $\vec t$ DIPENDE ANCHE DALL'ORIENTAZIONE DEL PIANO Ω, CHE PUÒ ESSERE IDENTIFICATA DALLA NORMALE $\vec n$ $\boxed{\vec t = \vec t(\vec r, \vec n)}$

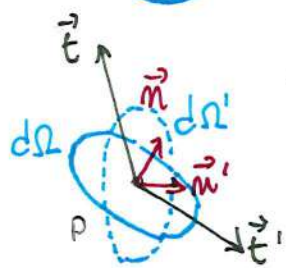


$\vec n = \{n_x, n_y, n_z\}$ VERSORE NORMALE $\qquad \vec n = \alpha_x \vec i + \alpha_y \vec j + \alpha_z \vec k$

CON $\alpha_x = \cos\{\widehat{\vec n, \vec i}\}$, $\alpha_y = \cos\{\widehat{\vec n, \vec j}\}$, $\alpha_z = \cos\{\widehat{\vec n, \vec k}\}$

COSENI DIRETTORI DELLA RETTA ORIENTATA DISTESA LUNGO $\vec n$

$\alpha_x = \vec n \times \vec i$, $\alpha_y = \vec n \times \vec j$, $\alpha_z = \vec n \times \vec k$



PER OGNI GIACITURA, IDENTIFICATA DALLA RISPETTIVA NORMALE, SI HA UN VETTORE $\vec t$

$$\vec t = \vec t(\vec r, \vec n) \neq \vec t' = \vec t'(\vec r, \vec n')$$

IL VETTORE TENSIONE DEVE GARANTIRE IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ:

$$\underbrace{\vec t(\vec x,\vec n)\,d\Omega^+}_{+\vec n} + \underbrace{\vec t(\vec x,-\vec n)\,d\Omega^-}_{-\vec n} = \vec 0$$

SONO OPPOSTI, AGISCONO SULLE 2 FACCE Ω^+ E Ω^-, SUL CORPO INTERO NON HANNO ALCUN EFFETTO SULL'EQUILIBRIO GLOBALE

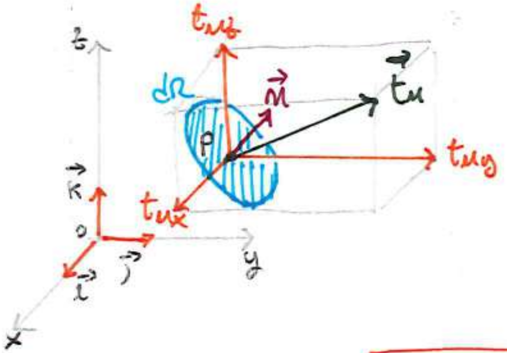
DEVE VALERE SU TUTTA LA FACCIA: $\vec t(\vec x,\vec n) + \vec t(\vec x,-\vec n) = \vec 0 \Rightarrow \vec t(\vec x,\vec n) = -\vec t(\vec x,-\vec n)$

FISSATO P RISULTA FISSATO $\vec x$, QUINDI $\vec t$ (NEL PUNTO P) DIPENDE SOLO DA $\vec n$ $\quad \vec t(\cdot,\vec n) \Rightarrow \boxed{\vec t_n}$ VETTORE SFORZO AGENTE IN P SUL PIANO DI GIACITURA $\vec n$

ALLORA PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ $\boxed{\vec t_n = -\vec t_{-n}}$ LEMMA FONDAMENTALE DI CAUCHY

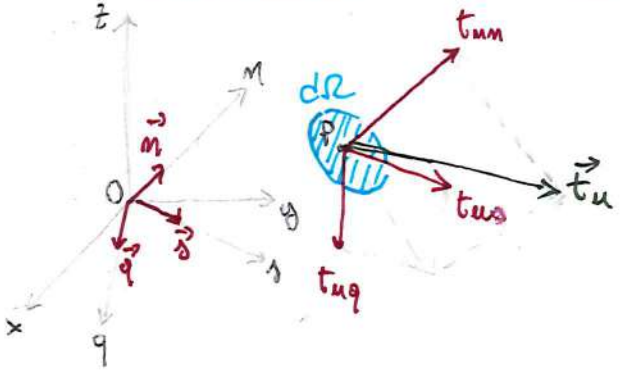
$\vec t_n$ PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO PER COMPONENTI IN 2 MODI:

1° MODO - COMPONENTI CARTESIANE



$$\vec t_n = t_{nx}\vec i + t_{ny}\vec j + t_{nz}\vec k \quad \text{o} \quad \boxed{\vec t_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}}$$

2° MODO - COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE



RIFERITE A UNA TERNA LOCALE:
L'ASSE n CHE HA COME VERSORE LA NORMALE $\vec n$
2 ASSI, PERPENDICOLARI TRA LORO, CHE GIACCIONO NEL PIANO DI Ω, INDIVIDUATI DAI VERSORI $\vec q$ E $\vec s$

$$\vec t_n = \{t_{nn}, t_{nq}, t_{ns}\}$$

A QUESTE COMPONENTI ASSEGNAMO DEI NOMI SPECIALI: σ COMPONENTE NORMALE
τ COMPONENTE TANGENZIALE

$$\vec t_n = \sigma_n \vec n + \tau_{nq}\vec q + \tau_{ns}\vec s \quad \text{o} \quad \boxed{\vec t_n = \{\sigma_n, \tau_{nq}, \tau_{ns}\}}$$

I VERSORI $\vec{n}, \vec{q}$ E $\vec{s}$ POSSONO ESSERE INDIVIDUATI DAI COSENI DIRETTORI:

$$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\} \; ; \quad \vec{q} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} \; ; \quad \vec{s} = \{\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\}$$

CON:

$$\alpha_x = \vec{n} \times \vec{i} \; ; \quad \beta_x = \vec{q} \times \vec{i} \; ; \quad \gamma_x = \vec{s} \times \vec{i} \; ;$$
$$\alpha_y = \vec{n} \times \vec{j} \; ; \quad \beta_y = \vec{q} \times \vec{j} \; ; \quad \gamma_y = \vec{s} \times \vec{j} \; ;$$
$$\alpha_z = \vec{n} \times \vec{k} \; ; \quad \beta_z = \vec{q} \times \vec{k} \; ; \quad \gamma_z = \vec{s} \times \vec{k} \; ;$$

N.B.
$$(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) = |\vec{n}|^2 = 1$$
$$(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) = |\vec{q}|^2 = 1$$
$$(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) = |\vec{s}|^2 = 1$$

1° MODO - COMPONENTI CARTESIANE DI TENSIONE - $\vec{t} = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}$ $\Rightarrow$ SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO

2° MODO - COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE - $\vec{t} = \{\sigma_n, \tau_{nq}, \tau_{ns}\}$ $\rightarrow$ SIGNIFICATO INTRINSECO

SI PUÒ PASSARE DA UNO ALL'ALTRO:

CONOSCENDO $\vec{n}, \vec{q}, \vec{s}$ POSSIAMO CALCOLARE LE COMPONENTI SPECIALI PROIETTANDO QUELLE CARTESIANE

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= t_{nx}\alpha_x + t_{ny}\alpha_y + t_{nz}\alpha_z \\ \tau_{nq} &= t_{nx}\beta_x + t_{ny}\beta_y + t_{nz}\beta_z \\ \tau_{ns} &= t_{nx}\gamma_x + t_{ny}\gamma_y + t_{nz}\gamma_z \end{aligned}}$$

COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE

$\alpha_x = \cos\{\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\}$, etc.

$\beta_x = \cos\{\widehat{\vec{q}, \vec{i}}\}$, etc.

$\gamma_x = \cos\{\widehat{\vec{s}, \vec{i}}\}$, etc.

SI PUÒ FARE ANCHE IL CONTRARIO

N.B.
$$\vec{i} = \vec{n}\alpha_x + \vec{q}\beta_x + \vec{s}\gamma_x$$
$$\vec{j} = \vec{n}\alpha_y + \vec{q}\beta_y + \vec{s}\gamma_y$$
$$\vec{k} = \vec{n}\alpha_z + \vec{q}\beta_z + \vec{s}\gamma_z$$

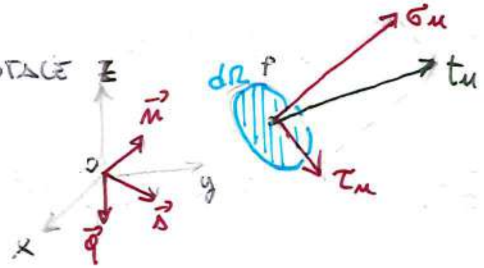
$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} t_{nx} &= \sigma_n\alpha_x + \tau_{nq}\beta_x + \tau_{ns}\gamma_x \\ t_{ny} &= \sigma_n\alpha_y + \tau_{nq}\beta_y + \tau_{ns}\gamma_y \\ t_{nz} &= \sigma_n\alpha_z + \tau_{nq}\beta_z + \tau_{ns}\gamma_z \end{aligned}}$$

COMPONENTI CARTESIANE DI TENSIONE

È POSSIBILE INDIVIDUARE τ_n, OVVERO LA COMPONENTE TANGENZIALE TOTALE

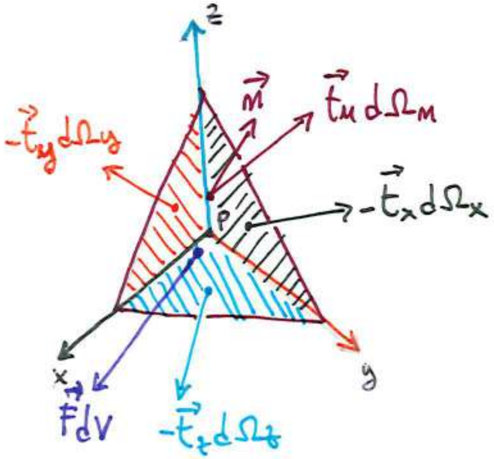
$$\boxed{\tau_n = \sqrt{\tau_{nq}^2 + \tau_{ns}^2}}$$



N.B. LA DIREZIONE DI τ_n NON È NOTA A PRIORI

ASSEGNATO UN PUNTO NELL'INTERNO DEL CORPO, IL VETTORE $\vec{t}_n$ VARIA AL VARIARE DELLA GIACITURA, OVVERO DELLA NORMALE $\vec{n}$

È SUFFICIENTE CONOSCERE LA TENSIONE $\vec{t}_n$ SU TRE GIACITURE ORTOGONALI QUALUNQUE PER POTER DEFINIRE LA TENSIONE SU QUALUNQUE ALTRA GIACITURA: CONSIDERIAMO UN VOLUME INFINITESIMO NELL'INTORNO DI P DELIMITATO DA 3 GIACITURE PARALLELE AI PIANI COORDINATI E DALLA GIACITURA $\vec{n}$



N.B. LA FACCIA Ω_n, DI NORMALE $\vec{n}$, NON COMPRENDE IL PUNTO P, CHE È INVECE SULLE FACCE PARALLELE AGLI ASSI COORDINATI Ω_x, Ω_y, Ω_z. DOBBIAMO FAR TENDERE IL VOLUME DEL TETRAEDRO A 0 PER FAR SÌ CHE Ω_n COMPRENDA P.

IL VOLUME DEL TETRAEDRO È: $dV = \frac{1}{3} d\Omega_n \cdot h_n$

L'ELEMENTO DI VOLUME COSÌ CONFIGURATO DEVE ESSERE IN EQUILIBRIO:

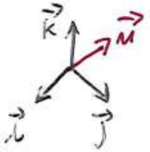
$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \Rightarrow -\vec{t}_x d\Omega_x - \vec{t}_y d\Omega_y - \vec{t}_z d\Omega_z + \vec{t}_n d\Omega_n + \vec{F} dV = \vec{0}$$

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

PER $h_n \to 0$ $\quad dV \to 0$ $\quad$ E $\quad \vec{F}dV = \vec{F}\frac{d\Omega_n h_n}{3} = \vec{0}$

$d\Omega_x = \alpha_x d\Omega_n$; $d\Omega_y = \alpha_y d\Omega_n$; $d\Omega_z = \alpha_z d\Omega_z$;

CON $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ COSENI DIRETTORI DELLA NORMALE $\vec{n}$ RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI x, y, z



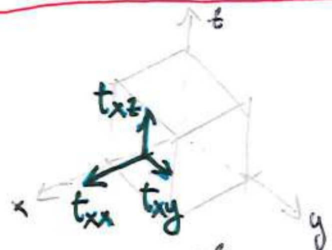
NB LE 3 FACCE DEL TETRAEDRO PARALLELE AGLI ASSI COORDINATI HANNO NORMALI PARALLELE AGLI ASSI MA DI VERSO OPPOSTO

$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \Rightarrow (-\vec{t}_x\alpha_x - \vec{t}_y\alpha_y - \vec{t}_z\alpha_z + \vec{t}_n)\, d\Omega_n = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{t}_n = \vec{t}_x\alpha_x + \vec{t}_y\alpha_y + \vec{t}_z\alpha_z}$$

LE COMPONENTI:

$$\begin{array}{cccc} & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ t_{nx} = & t_{xx}\alpha_x + & t_{yx}\alpha_y + & t_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = & t_{xy}\alpha_x + & t_{yy}\alpha_y + & t_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = & t_{xz}\alpha_x + & t_{yz}\alpha_y + & t_{zz}\alpha_z \end{array}$$



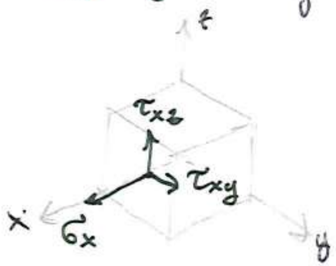
N.B.

σ = COMPONENTE NORMALE

τ = COMPONENTE TANGENZIALE

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z\alpha_z \end{cases}$$

COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE



QUINDI L'EQUILIBRIO:

$$\begin{array}{cccccc} & \vec{t}_n & & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ x & & & & & \\ y & \begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} & = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}} & \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} \\ z & & & & & \end{array}$$

$$\boxed{\vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\ \vec{n}}$$

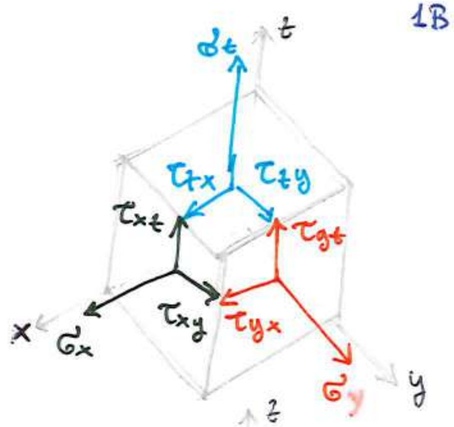
RELAZIONE DI CAUCHY

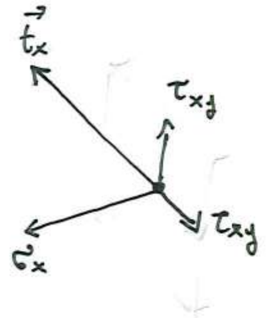
$\underline{\underline{\sigma}}$ = TENSORE DEGLI SFORZI

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

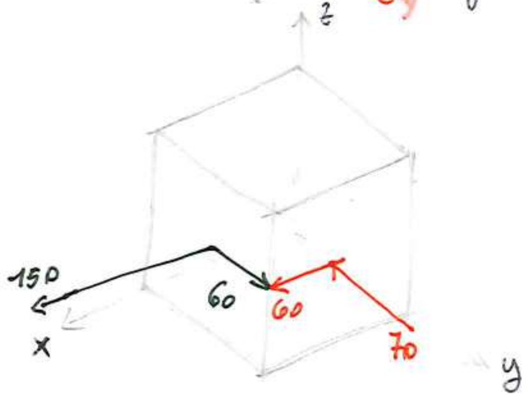
ESEMPIO APPLICATIVO

$$\begin{array}{cccc} & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \underline{\underline{\sigma}} = & \left[\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix}\right. & & \left.\right] \end{array}$$





$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 150 & 60 & 0 \\ 60 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



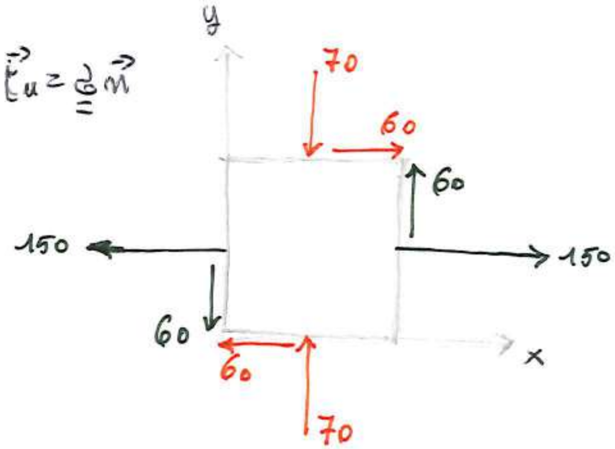
$\boxed{\sigma_x = 150 \quad \tau_{xy} = 60}$ $\vec{t}_x$ $\quad \tau_{xz} = 0 \quad$ $\boxed{\tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0 \quad \sigma_z = 0}$ $\vec{t}_z$

$\boxed{\tau_{yx} = 60 \quad \sigma_y = -70}$ $\vec{t}_y$ $\quad \tau_{yz} = 0$

STATO PIANO DI TENSIONE

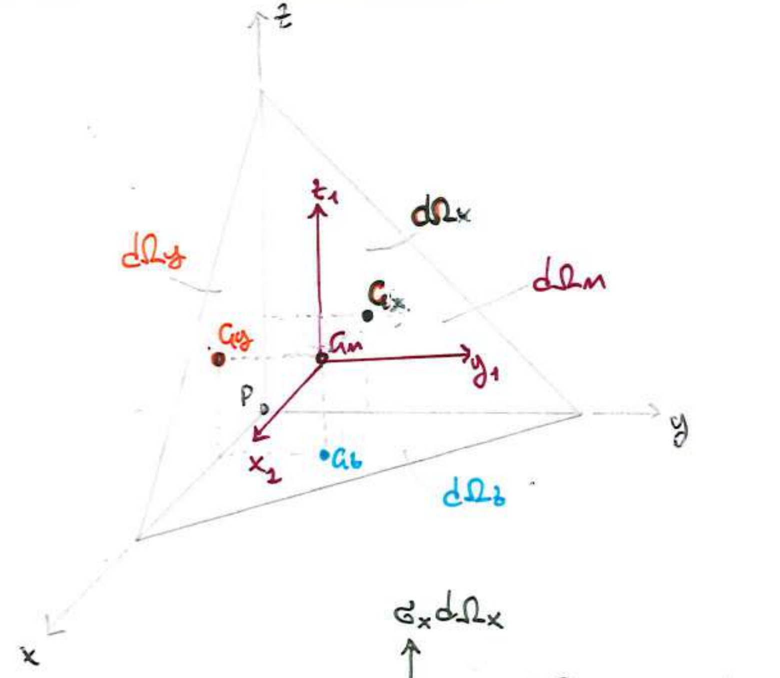
$\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$ EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE $\quad \vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}$

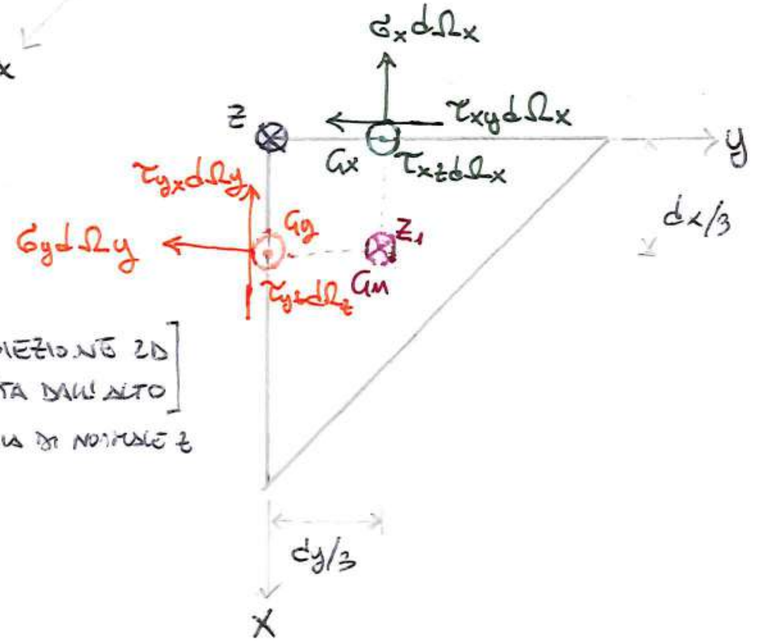
$\boxed{\vec{M}_{(o)} = \vec{0}}$ EQUILIBRIO DEI MOMENTI



N.B. LE TENSIONI SONO DIMENSIONALMENTE DELLE PRESSIONI: $\sigma = \dfrac{[F]}{[L]^2}$

SI MISURANO IN $Pa = N/m^2$ E IN PARTICOLARE IN GENERE IN $MPa = 10^6\,Pa = N/mm^2$





[PROIEZIONE 2D VISTA DALL'ALTO]

FACCIA DI NORMALE z

N.B. [IL SIMBOLO ⊗ INDICA UN VETTORE O UN ASSE PERPENDICOLARE E USCENTE DAL FOGLIO
IL SIMBOLO ⊙ INDICA UN VETTORE O UN ASSE PERPENDICOLARE E ENTRANTE NEL FOGLIO]

ABBIAMO VISTO CHE IL SISTEMA DI FORZE AGENTI SUL TETRAEDRO È IN EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

$\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$ $\quad$ $\boxed{\vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}}$

BISOGNA CONSIDERARE LE TRE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE DELL'ELEMENTO ATTORNO AI TRE ASSI $\boxed{\vec{M} = \vec{0}}$ EQUILIBRIO DEI MOMENTI

PER L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI USIAMO COME POLO G_n BARICENTRO DELLA FACCIA $d\Omega_n$ DI NORMALE $\vec{n}$ E DEFINIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO (x_1, y_1, z_1) CON ORIGINE IN G_n.
LAVORIAMO PER COMPONENTI

$\boxed{\vec{M}_{(G_n)} = \vec{0}}$ IMPLICA CHE: $\begin{cases} M_{(G_n)x} = 0 \\ M_{(G_n)y} = 0 \\ M_{(G_n)z} = 0 \end{cases}$

- LE FORZE APPLICATE IN G_n (POLO) NON GENERANO MOMENTO
- LE FORZE CHE AGISCONO SULLA FACCIA $d\Omega_z$ DI NORMALE z SONO APPLICATE SUL BARICENTRO G_z, CHE È ALLINEATO CON G_n, QUINDI NON GENERANO MOMENTO
- LA RETTA DI AZIONE DI $\sigma_x d\Omega_x$ E QUELLA DI $\sigma_y d\Omega_y$ PASSANO PER G_n, QUINDI NON GENERANO MOMENTO
- LE FORZE $\tau_{xz} d\Omega_x$ E $\tau_{yz} d\Omega_y$ SONO PARALLELE ALL'ASSE z_1, QUINDI NON GENERANO MOMENTO
- NON CONSIDERIAMO LE FORZE DI VOLUME $\vec{F}$, PER $dV \to 0$ DIMINUISCONO PIÙ RAPIDAMENTE

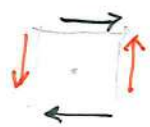
$$\boxed{M_{(G_n)z} = \tau_{xy} d\Omega_x \frac{dx}{3} - \tau_{yx} d\Omega_y \frac{dy}{3} = 0}$$

N.B. $dV = d\Omega_x \frac{dx}{3} = d\Omega_y \frac{dy}{3} = d\Omega_z \frac{dz}{3}$

$$M_{(G_n)z} = \tau_{xy} dV - \tau_{yx} dV = 0 \quad \rightsquigarrow \quad M_{(G_n)z} = (\tau_{xy} - \tau_{yx}) dV = 0$$

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \rightsquigarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

* N.B. SEBBENE τ_{xy} E τ_{yx} SIANO INDIPENDENTI (SONO LE PROIEZIONI DI $\vec{t}_x$ E $\vec{t}_y$) PER L'EQUILIBRIO DEVONO ESSERE UGUALI



ANALOGAMENTE PER $M_{(Gn)x}$ E $M_{(Gn)y}$:

N.B. [⊗ VETTORE USCENTE DAL FOGLIO ; ⊙ VETTORE ENTRANTE NEL FOGLIO]

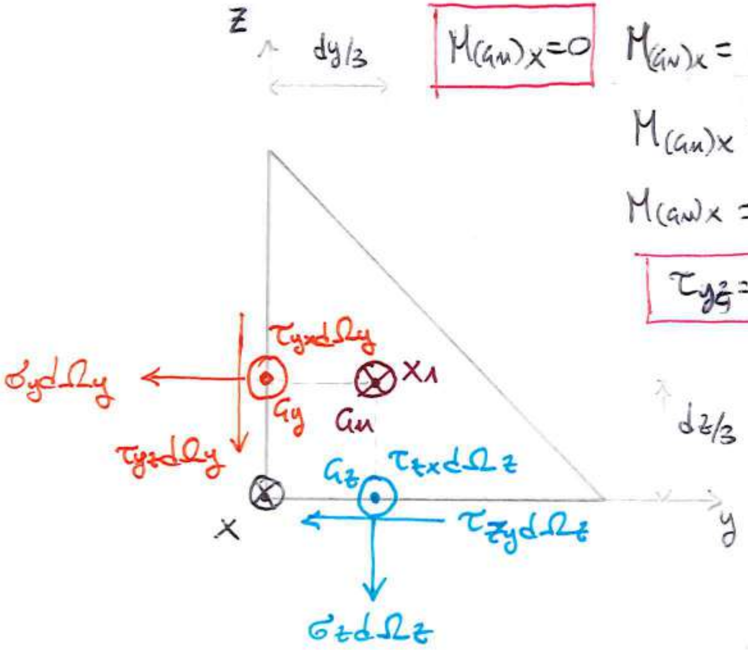
$\boxed{M_{(Gn)x}=0}$

$$M_{(Gn)x} = -\tau_{zy}\,d\Omega_z\frac{dz}{3} + \tau_{yz}\,d\Omega_y\frac{dy}{3}$$

$$M_{(Gn)x} = -\tau_{zy}\,dV + \tau_{yz}\,dV = 0$$

$$M_{(Gn)x} = -\tau_{zy} + \tau_{yz} = 0$$

$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$



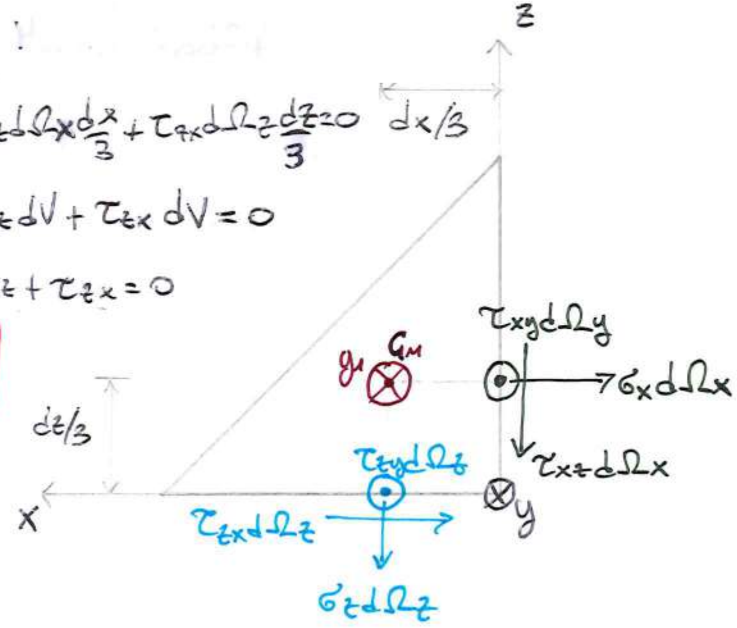
$\boxed{M_{(Gn)y}=0}$

$$M_{(Gn)y} = -\tau_{xz}\,d\Omega_x\frac{dx}{3} + \tau_{zx}\,d\Omega_z\frac{dz}{3} = 0$$

$$M_{(Gn)y} = -\tau_{xz}\,dV + \tau_{zx}\,dV = 0$$

$$M_{(Gn)y} = -\tau_{xz} + \tau_{zx} = 0$$

$$\boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz}}$$



$$\boxed{\vec{M}_{(Gn)} = \vec{0}} \iff \begin{cases} M_{(Gn)x} = 0 & \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}} \\ M_{(Gn)y} = 0 & \boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz}} \\ M_{(Gn)z} = 0 & \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \underline{\underline{\sigma}} = & \left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{array} & \left.\begin{array}{c} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{array}\right] \end{array}$$

$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \text{ É SIMMETRICO}}$

6 COMPONENTI INDIPENDENTI

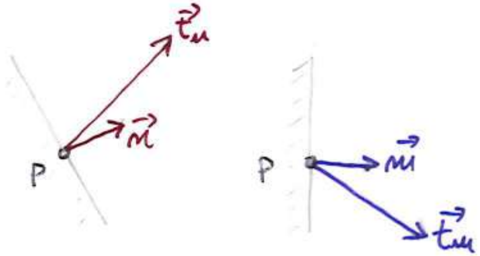
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \text{sym} & & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T}$$

- 6 COMPONENTI INDIPENDENTI : $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}]$ MA $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow$ 3 EQUAZIONI : IL CONTINUO DEFORMABILE È IPERSTATICO
- LA RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI $[\tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} ; \tau_{xy} = \tau_{yx}]$ È UNA PROPRIETÀ GENERALE *
- LE τ RECIPROCHE SONO UGUALI IN VALORE NUMERICO MA HANNO SIGNIFICATO DIVERSO:
  τ_{xy} AGISCE SU UNA FACCIA DI NORMALE x IN DIREZIONE y ED É DIVERSA DA τ_{yx}, CHE AGISCE SU UNA FACCIA DI NORMALE y IN DIREZIONE x

UN'ULTERIORE CONSEGUENZA DELLA RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI* E' CHE SE CONSIDERIAMO 2 VETTORI SFORZO $\vec{t}_n$ E $\vec{t}_m$ DI GIACITURA $\vec{n}$ E $\vec{m}$ RISPETTIVAMENTE, DETTA t_{nm} LA COMPONENTE DI $\vec{t}_n$ LUNGO $\vec{m}$ E t_{mn} LA COMPONENTE DI $\vec{t}_m$ LUNGO $\vec{n}$, RISULTA CHE:

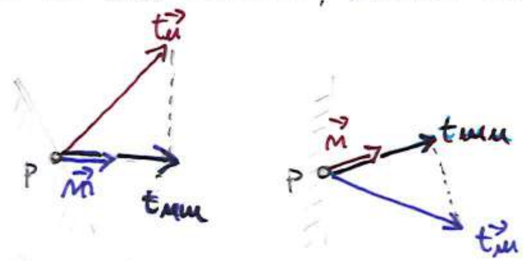
$$\boxed{t_{nm} = t_{mn}}$$

CONSIDERIAMO LO STESSO PUNTO P E LE DUE GIACITURE $\vec{n}$ E $\vec{m}$



$$\vec{t}_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}$$

$$\vec{t}_m = \{t_{mx}, t_{my}, t_{mz}\}$$



t_{nm} E t_{mn} SONO DIVERSE MA HANNO STESSO VALORE NUMERICO: $t_{nm} = t_{mn}$

$$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\} \rightsquigarrow \vec{n} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k} \qquad |\vec{n}| = 1 \longleftrightarrow \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$$

$$\vec{m} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} \rightsquigarrow \vec{m} = \beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k} \qquad |\vec{m}| = 1 \longleftrightarrow \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$$

PROIETTANDO $\vec{t}_n$ IN DIREZIONE $\vec{m}$: $\quad t_{nm} = t_{nx}\beta_x + t_{ny}\beta_y + t_{nz}\beta_z$

PROIETTANDO $\vec{t}_m$ IN DIREZIONE $\vec{n}$: $\quad t_{mn} = t_{mx}\alpha_x + t_{my}\alpha_y + t_{mz}\alpha_z$

MA:

$$\vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} \quad \boxed{1}$$

$$\vec{t}_m = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{m} \quad \boxed{2}$$

$\boxed{1}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{l} t_{nx} = \sigma_x\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z\alpha_z \end{array}\right. \quad (\text{colonne: } \vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z) \Rightarrow \boxed{\vec{t}_n = \vec{t}_x\alpha_x + \vec{t}_y\alpha_y + \vec{t}_z\alpha_z}$$

RELAZIONE DI CAUCHY

$\boxed{2}$

$$\left\{\begin{array}{l} t_{mx} = \sigma_x\beta_x + \tau_{yx}\beta_y + \tau_{zx}\beta_z \\ t_{my} = \tau_{xy}\beta_x + \sigma_y\beta_y + \tau_{zy}\beta_z \\ t_{mz} = \tau_{xz}\beta_x + \tau_{yz}\beta_y + \sigma_z\beta_z \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\vec{t}_m = \vec{t}_x\beta_x + \vec{t}_y\beta_y + \vec{t}_z\beta_z}$$

RELAZIONE DI CAUCHY

$$\vec{t}_x = \{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\} \qquad \vec{t}_y = \{\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}\} \qquad \vec{t}_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z\}$$

$$t_{mn} = \overbrace{(\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z)}^{t_{mx}} \beta_x + \overbrace{(\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z)}^{t_{my}} \beta_y + \overbrace{(\tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z)}^{t_{mz}} \beta_z$$

< COMPONENTI NORMALI > [COMPONENTI TANGENZIALI]

$$t_{mn} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z + (\tau_{yx} \alpha_y \beta_x + \tau_{xy} \alpha_x \beta_y) + (\tau_{zx} \alpha_z \beta_x + \tau_{xz} \alpha_x \beta_z) + (\tau_{zy} \alpha_z \beta_y + \tau_{yz} \alpha_y \beta_z)$$

$$t_{nm} = \overbrace{(\sigma_x \beta_x + \tau_{yx} \beta_y + \tau_{zx} \beta_z)}^{t_{nx}} \alpha_x + \overbrace{(\tau_{xy} \beta_x + \sigma_y \beta_y + \tau_{zy} \beta_z)}^{t_{ny}} \alpha_y + \overbrace{(\tau_{xz} \beta_x + \tau_{yz} \beta_y + \sigma_z \beta_z)}^{t_{nz}} \alpha_z$$

< COMPONENTI NORMALI > [COMPONENTI TANGENZIALI]

$$t_{nm} = \sigma_x \beta_x \alpha_x + \sigma_y \beta_y \alpha_y + \sigma_z \beta_z \alpha_z + (\tau_{yx} \beta_y \alpha_x + \tau_{xy} \beta_x \alpha_y) + (\tau_{zx} \beta_z \alpha_x + \tau_{xz} \beta_x \alpha_z) + (\tau_{zy} \beta_z \alpha_y + \tau_{yz} \beta_y \alpha_z)$$

- LE COMPONENTI NORMALI SONO UGUALI: $\boxed{\sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z}$
- LE COMPONENTI TANGENZIALI SONO DIVERSE: MA POICHÉ $\underline{\underline{\sigma}}$ È SIMMETRICO ALLORA $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

QUINDI POSSIAMO RAGGRUPPARLE:

$$\tau_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + \tau_{zx}(\alpha_x \beta_z + \alpha_z \beta_x) + \tau_{zy}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) \quad t_{mn}$$

$$\tau_{yx}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x \beta_z + \alpha_z \beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) \quad t_{nm}$$

ALLORA t_{mn} E t_{nm} DEVONO ESSERE UGUALI PERCHÉ LE LORO ESPRESSIONI SONO UGUALI! $\boxed{t_{mn} = t_{nm}}$

SE $\vec{m} = \vec{n}$ ALLORA $\alpha_x = \beta_x$, $\alpha_y = \beta_y$, $\alpha_z = \beta_z$ E QUINDI $\boxed{t_{mn} = t_{nm} = t_{nn} = \sigma_n}$ COMPONENTE NORMALE

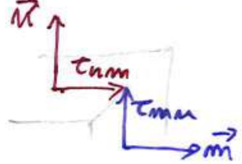
CON $\boxed{\sigma_n = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + \sigma_z \alpha_z^2 + 2\tau_{xy} \alpha_x \alpha_y + 2\tau_{xz} \alpha_x \alpha_z + 2\tau_{yz} \alpha_y \alpha_z}$ NOTE LE 6 COMPONENTI INDIPENDENTI $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ POSSIAMO RICAVARE σ_n

SE $\vec{m} \perp \vec{n}$ ALLORA $\vec{m} \times \vec{n} = 0 \iff \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = 0$ E QUINDI $\boxed{t_{mn} = \tau_{mn} \; ; \; t_{nm} = \tau_{nm}}$ COMPONENTI TANGENZIALI

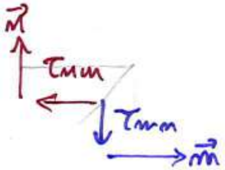
CON $\boxed{\tau_{mn} = \tau_{nm} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x \beta_z + \alpha_z \beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y)}$

È QUINDI POSSIBILE RICAVARE τ_{mn} SE FISSIAMO 2 DIREZIONI ORTOGONALI

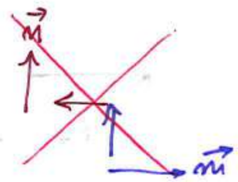
NELLO SPIGOLO:



SE SONO ENTRAMBE POSITIVE, CONVERGONO



SE SONO ENTRAMBE NEGATIVE, DIVERGONO

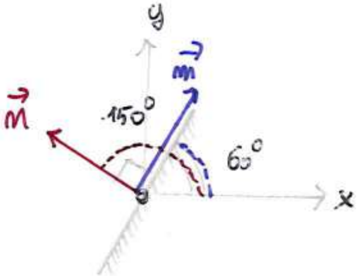


NON PUÒ MAI AVVENIRE CHE SI INSEGUANO

ESEMPIO APPLICATIVO

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{array} \begin{bmatrix} 150 & 60 & 0 \\ 60 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

QUANTO VALE σ_{nn} SU UNA GIACITURA DI NORMALE $\vec{n}$ RUOTATA DI 60° RISPETTO ALL'ASSE X? E QUANTO VALE τ_{nm}, CON $\vec{m}$ PERPENDICOLARE AD $\vec{n}$?



[$\vec{n}$ E X FORMANO UN ANGOLO DI 150°]

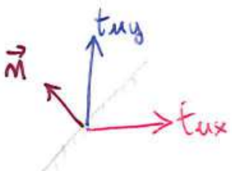
$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\}$ $\quad \alpha_x = \cos\{\overbrace{x,\hat{n}}^{150°}\}$; $\alpha_y = \cos\{\overbrace{y,\hat{n}}^{60°}\}$; $\alpha_z = \cos\{\overbrace{z,\hat{n}}^{90°}\}$ $\qquad \vec{n} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

$\vec{m} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\}$ $\quad \beta_x = \cos\{\overbrace{x,\hat{m}}^{60°}\}$; $\beta_y = \cos\{\overbrace{y,\hat{m}}^{30°}\}$; $\beta_z = \cos\{\overbrace{z,\hat{m}}^{90°}\}$ $\qquad \vec{m} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$

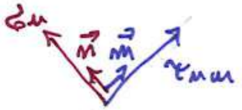
N.B. $\vec{n}$ E $\vec{m}$ SONO PERPENDICOLARI? $\vec{n} \times \vec{m} = 0 \rightsquigarrow \vec{n} \times \vec{m} = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y + \alpha_z\beta_z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + (0\cdot 0) = 0$ VERIFICATO ✓

$\vec{t}_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}$ $\quad \vec{t}_n = \vec{t}_x\alpha_x + \vec{t}_y\alpha_y + \vec{t}_z\alpha_z = \overset{\vec{t}_x}{\begin{Bmatrix}150\\60\\0\end{Bmatrix}}\cdot\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} + \overset{\vec{t}_y}{\begin{Bmatrix}60\\-70\\0\end{Bmatrix}}\cdot\left\{\frac{1}{2}\right\} + \overset{\vec{t}_z}{\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}}\cdot\{0\}$

$$\begin{cases} t_{nx} = (150)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (60)\left(\frac{1}{2}\right) = -100 \text{ MPa} \; (-99.904) \quad = 75\sqrt{3}+30 \\ t_{ny} = (60)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-70)\left(\frac{1}{2}\right) = -87 \text{ MPa} \; (-86.962) \quad = -30\sqrt{3}-35 \\ t_{nz} = 0 \end{cases}$$



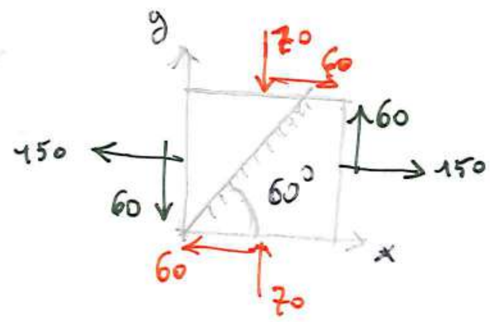
DOBBIAMO PROIETTARE t_{nx} E t_{ny} SECONDO $\vec{n}$ E $\vec{m}$ PER TROVARE σ_n E τ_{nm}

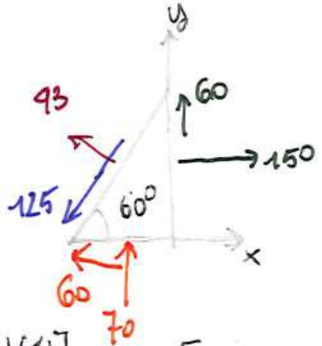


$\sigma_n = t_{nx}\alpha_x + t_{ny}\alpha_y + t_{nz}\alpha_z = (-99.904)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-86.962)(1/2) + (0)(0) = +43 \text{ MPa} \; (43.038)$

$\tau_{nm} = t_{nx}\beta_x + t_{ny}\beta_y + t_{nz}\beta_z = (-99.904)\left(\frac{1}{2}\right) + (-86.962)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -125 \text{ MPa} \; (-125.263)$

[PER GLI SFORZI NORMALI: (+) = TRAZIONE; (−) = COMPRESSIONE]





[NB POSSIAMO ANCHE RICAVARLO COSÌ:

$\sigma_n = \sigma_x\alpha_x^2 + \sigma_y\alpha_y^2 + \sigma_z\alpha_z^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y + 2\tau_{xz}\alpha_x\alpha_z + 2\tau_{yz}\alpha_y\alpha_z$

$\tau_{nm} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \sigma_z\alpha_z\beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$]

$\tau_{nm} = 150\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 70\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 60\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = -55\sqrt{3} - 30 = -125.263$

$\sigma_n = 150\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 70\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot 60\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{225-35}{2} - 30\sqrt{3} = 43.038$

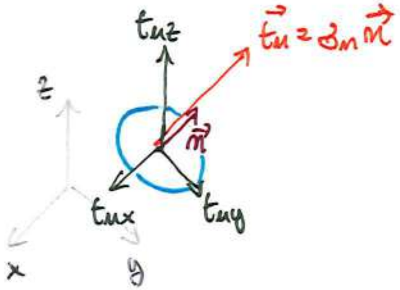
1C. – COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE –

ESISTE LA POSSIBILITÀ DI AVERE QUALCHE PARTICOLARE GIACITURA $\vec{n}$ IN CUI $\vec{t_n}$ ABBIA SOLO COMPONENTI NORMALI σ_n E SIANO NULLE TUTTE LE COMPONENTI TANGENZIALI τ?

GIACITURE CHE GODONO DI TALE PROPRIETÀ VENGONO DETTE GIACITURE PRINCIPALI, LE LORO NORMALI SI DICONO DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE E I VALORI DELLE RELATIVE TENSIONI NORMALI COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE.

○ METODO SCIENTIFICO: TRASFORMARE UN PROBLEMA FISICO IN UNO MATEMATICO E VEDERE SE ESISTONO SOLUZIONI

DOMANDA: ESISTE QUALCHE DIREZIONE $\vec{n}$ PER CUI $\vec{t_n}$ È DIRETTO COME $\vec{n}$?



COME SAREBBERO t_{nx}, t_{ny} E t_{nz} SE $\vec{t_n} = \sigma_n \cdot \vec{n}$?

$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\}$

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_n \alpha_x \\ t_{ny} = \sigma_n \alpha_y \\ t_{nz} = \sigma_n \alpha_z \end{cases}$$

COMPONENTI CARTESIANE DI $\vec{t_n} = \sigma_n \vec{n}$ $\Longleftrightarrow$ PER LA RELAZIONE DI CAUCHY: $\vec{t_n} = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}$

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{cases}$$

LE COMPONENTI CARTESIANE E QUELLE SPECIALI OTTENUTE CON LA RELAZIONE DI CAUCHY DEVONO ESSERE UGUALI

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z = \sigma_n \alpha_x \\ \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z = \sigma_n \alpha_y \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z \alpha_z = \sigma_n \alpha_z \end{cases}$$

QUALI SONO LE INCOGNITE? L'INCOGNITA È $\vec{n}$, CIOÈ $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n)\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z = 0 \\ \tau_{xy}\alpha_x + (\sigma_y - \sigma_n)\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z = 0 \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + (\sigma_z - \sigma_n)\alpha_z = 0 \end{cases} \quad [*]$$

[*] È 1 SISTEMA ALGEBRICO LINEARE DI EQUAZIONI NELLE 3 INCOGNITE $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. I TERMINI NOTI SONO NULLI → SISTEMA OMOGENEO

PER I SISTEMI OMOGENEI ESISTE SEMPRE UNA SOLUZIONE BANALE: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$, MA QUESTA SOLUZIONE NON HA SENSO DA UN PUNTO DI VISTA FISICO: α_x, α_y E α_z SONO LE COMPONENTI DI 1 VETTORE UNITARIO $(\vec{n})$ $\Rightarrow$ $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = |\vec{n}| = 1$

1) ALTRIMENTI UN VETTORE NULLO NON PUÒ RAPPRESENTARE UNA GIACITURA (OLTRE AL MODULO, NON HA NEANCHE DIREZIONE E VERSO)

MA NEI SISTEMI OMOGENEI, OLTRE ALLA SOLUZIONE BANALE POSSONO ESISTERE ALTRE SOLUZIONI SE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DIVENTA SINGOLARE:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IL DETERMINANTE DI A DEVE ESSERE UGUALE A ZERO:

$$\det[A] = 0$$

(TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI)

[A] HA UNA STRUTTURA SPECIALE :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \sigma_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow [A] = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}$$

ALLORA BISOGNA RISOLVERE: $\boxed{\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}})}$

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI : $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ con $\lambda \underline{\underline{I}}\,\underline{x} \rightsquigarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{\underline{I}}\,\underline{x} \rightsquigarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{x} = 0$

SOLUZIONE BANALE: $x = \{0\ 0\ 0\}^T$, MA POSSONO ESISTERE SOLUZIONI DIVERSE SE $\det.(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$, CHE È UNA FUNZIONE DI λ CHE CONSENTE DI CALCOLARE GLI AUTOVALORI, PER OGNI AUTOVALORE POSSO RICOSTRUIRE GLI AUTOVETTORI

* IL PROBLEMA $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n I)$ É ANALOGO : I VALORI DI σ_n PER CUI IL DETERMINANTE È UGUALE A $\emptyset$ SONO GLI AUTOVALORI CHE CONSENTONO DI TROVARE GLI AUTOVETTORI PER CUI $\vec{t_n} = \sigma_n \vec{n}$

I VALORI DI σ_n SONO LE TENSIONI PRINCIPALI

I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI SONO I VALORI DI $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ PER CUI SULLA GIACITURA $\vec{n}$ SI HANNO SOLO COMPONENTI NORMALI σ_n

$$\det. \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = \boxed{\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0}$$

SVILUPPANDO IL DETERMINANTE SI OTTIENE QUESTA EQUAZIONE CUBICA IN σ_n: EQUAZIONE CARATTERISTICA

É POSSIBILE NOTARE CHE: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = tr(\underline{\underline{\sigma}})$ É L'INVARIANTE PRIMO DI $\underline{\underline{\sigma}}$ - LINEARE

$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)$ È L'INVARIANTE SECONDO DI $\underline{\underline{\sigma}}$ - QUADRATICO

NB. $I_2 = -\left(\det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left\{tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - [tr(\underline{\underline{\sigma}})]^2\right\}$

$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$ É L'INVARIANTE TERZO DI $\underline{\underline{\sigma}}$ - CUBICO

NB $I_3 = \det|\underline{\underline{\sigma}}|$

NB GLI INVARIANTI NON POSSONO DIPENDERE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO!

IL TENSORE $\underline{\underline{\sigma}}$ HA 3 INVARIANTI - LINEARE, CUBICO E QUADRATICO - INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO

AD ESEMPIO UN VETTORE HA 1 INVARIANTE - IL MODULO - CHE NON CAMBIA RISPETTO AL RIFERIMENTO (LE COMPONENTI)

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\boxed{\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0}$ AMMETTE SEMPRE 3 RADICI REALI (PER LA SIMMETRIA DI $\underline{\underline{\sigma}}$)

CONSEGUENTEMENTE ESISTONO 3 COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE: $\boxed{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3}$ SFORZI PRINCIPALI

E SI POSSONO DETERMINARE 3 DIREZIONI PRINCIPALI (AUTOVETTORI DEL PROBLEMA) MUTUAMENTE ORTOGONALI (NB È UNIVOCAMENTE DEFINITA LA DIREZIONE MA NON IL VERSO)

È POSSIBILE INDIVIDUARE 3 CASI:

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 3 RADICI DISTINTE; LE 3 CORRISPONDENTI DIREZIONI PRINCIPALI SONO ORTOGONALI

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3)$ o $(\sigma_1 = \sigma_2) > \sigma_3$ 2 RADICI DISTINTE E 1 COINCIDENTE, SI PUÒ DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLA RADICE DISTINTA, E TUTTE LE DIREZIONI CONTENUTE NEL PIANO ORTOGONALE A QUESTA SONO PRINCIPALI

$\boxed{3° \text{ CASO}}$ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 3 RADICI COINCIDENTI, TUTTE LE DIREZIONI SONO PRINCIPALI

NEI 3 CASI È SEMPRE POSSIBILE INDIVIDUARE (UNIVOCAMENTE NEL 1° CASO, VIA VIA PIÙ ARBITRARIAMENTE NEGLI ALTRI 2 CASI) UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE IN CUI IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ ABBIA SOLO COMPONENTI NORMALI:

$\boxed{1° \text{ CASO}}$

$\sigma_1 \to \vec{n}_1$

$\sigma_2 \to \vec{n}_2$

$\sigma_3 \to \vec{n}_3$

CON $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ TERNA DESTRA

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

DOVE $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ SONO I VETTORI SULLE DIREZIONI PRINCIPALI $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$

ALLORA I COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA SONO:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}}$$

INVARIANTI DI TENSIONE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE

NB SE $I_3 = 0$ ⇝ STATO DI SFORZO PIANO

SE $I_3 = 0$ E $I_2 = 0$ ⇝ STATO DI SFORZO MONOASSIALE

I_1 È ASSOCIATO ALLO SFORZO "MEDIO": $p = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = I_1/3$ PRESSIONE IDROSTATICA

È POSSIBILE ESPRIMERE IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ COME: $\underline{\underline{\sigma}} = p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}}'$

$p\underline{\underline{I}}$ RAPPRESENTA LO STATO DI SFORZO IDROSTATICO: $p\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} \end{bmatrix}$

ALLORA $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y-\sigma_x-\sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y}{3} \end{bmatrix}$

SE IL MATERIALE È ELASTICO:
- $p\underline{\underline{I}}$ - PARTE IDROSTATICA DEL TENSORE DEGLI SFORZI - È RESPONSABILE SOLO DEL CAMBIO DI VOLUME MA NON DI FORMA
- $\underline{\underline{\sigma}}'$ - PARTE DEVIATORICA DEL TENSORE DEGLI SFORZI - È RESPONSABILE DEI CAMBIAMENTI DI FORMA A VOLUME COSTANTE

N.B. $I_1' = \frac{2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z}{3} + \frac{-\sigma_x+2\sigma_y-\sigma_z}{3} + \frac{-\sigma_x-\sigma_y+2\sigma_z}{3} = 0$ $I_1 = 0$ SE LO STATO DI SFORZO È PURAMENTE DEVIATORICO

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$\vec{n}_i, \vec{n}_j$ $\vec{t}_i = \sigma_i \vec{n}_i$ $\vec{t}_j = \sigma_j \vec{n}_j$ $t_{ij} = \sigma_i \vec{n}_i \times \vec{n}_j$ $t_{ji} = \sigma_j \vec{n}_j \times \vec{n}_i$ $\vec{n}_i \times \vec{n}_j = 1 \cdot 1 \cdot \cos\vartheta_{ij} = \cos\vartheta_{ij}$ $\vartheta_{ij} = \{\widehat{n_i, n_j}\}$

MA: $\boxed{t_{ij} = t_{ji}}$ PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI $\rightarrow$ $t_{ij} - t_{ji} = 0$ $t_{ij} = \sigma_i \cos\vartheta_{ij}$ $t_{ji} = \sigma_j \cos\vartheta_{ij}$ $(\sigma_i - \sigma_j)\cos\vartheta_{ij} = 0$

SE $\sigma_i \neq \sigma_j$ $\rightarrow$ $\cos\vartheta_{ij} = 0$ $\vartheta_{ij} = 90°$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ALLORA $\boxed{\vartheta_{12} = \vartheta_{13} = \vartheta_{23} = 90°}$ $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ SONO MUTUAMENTE ORTOGONALI

ESEMPIO APPLICATIVO

ASSEGNATO UNO STATO DI SFORZO $\underline{\underline{\sigma}}$ CALCOLARE LE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

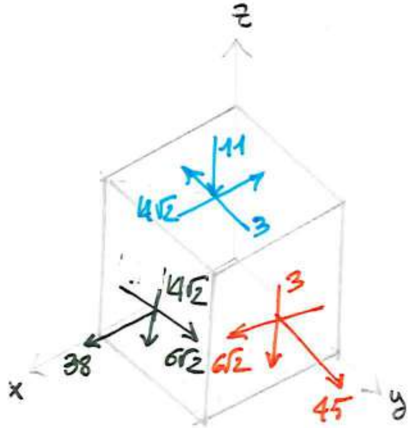
$$\begin{array}{c} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \end{array} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 38 & 6\sqrt{2} & -14\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 45 & -3 \\ -14\sqrt{2} & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

[N.B. VALORI IN MPa]

DOBBIAMO RISOLVERE:
$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_u)\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z = 0 \\ \tau_{xy}\alpha_x + (\sigma_y - \sigma_u)\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z = 0 \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + (\sigma_z - \sigma_u)\alpha_z = 0 \end{cases}$$

PIÚ LA CONDIZIONE: $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = |\vec{n}| = 1$



TIPICO PROBLEMA AGLI AUTOVALORI: $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_u \underline{\underline{I}})\underline{\vec{n}} = \vec{0}$

ALLORA $\boxed{\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_u \underline{\underline{I}}) = 0}$ DETERMINA SOLUZIONI NON BANALI DEL SISTEMA

$$\det \begin{bmatrix} (38-\sigma_u) & 6\sqrt{2} & -14\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & (45-\sigma_u) & -3 \\ -14\sqrt{2} & -3 & (-11-\sigma_u) \end{bmatrix} = 0$$

MOLTO COMPLICATO... MA POSSIAMO USARE GLI INVARIANTI: $\rightsquigarrow$ $\boxed{\sigma_u^3 - I_1\sigma_u^2 - I_2\sigma_u - I_3 = 0}$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$I_1 = tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 38 + 45 - 11 = 72$ $\quad\boxed{I_1 = 72}$

$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) = \frac{1}{2}\left\{tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - [tr(\underline{\underline{\sigma}})]^2\right\}$

$$I_2 = -\left[\det\begin{vmatrix} 38 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 45 \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} 38 & -14\sqrt{2} \\ -14\sqrt{2} & -11 \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} 45 & -3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix}\right] = -\left[(38)(45) - (6\sqrt{2})(6\sqrt{2}) + (38)(-11) - (-14\sqrt{2})(-14\sqrt{2}) + \right.$$

$$\left. + (45)(-11) - (-3)(-3)\right] = -\left[1638 + (-810) + (-504)\right] = -324 \qquad \boxed{I_2 = -324}$$

$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_z\tau_{xy}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$

$$I_3 = \det|\underline{\underline{\sigma}}| = 38\begin{vmatrix} 45 & -3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} - 6\sqrt{2}\begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & -3 \\ -14\sqrt{2} & -11 \end{vmatrix} - 14\sqrt{2}\begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & 45 \\ -14\sqrt{2} & -3 \end{vmatrix} = 38\left[(45)(-11) - (-3)(-3)\right] - 6\sqrt{2}\left[(6\sqrt{2})(-11) + \right.$$

$$\left. - (-3)(-14\sqrt{2})\right] - 14\sqrt{2}\left[(6\sqrt{2})(-3) - (45)(-14\sqrt{2})\right] = -19152 + 1296 - 17136 = -34992 \qquad \boxed{I_3 = -34992}$$

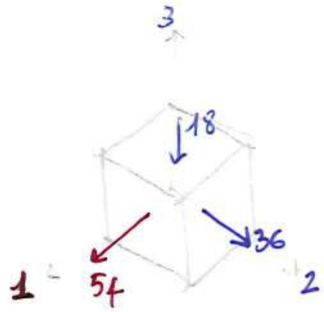
DETERMINATI GLI INVARIANTI, L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DIVENTA: $\boxed{\sigma_n^3 - 72\sigma_n^2 + 324\sigma_n + 34992 = 0}$

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA SONO I VALORI DELLE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$\boxed{\sigma_1 = 54}$ $\boxed{\sigma_2 = 36}$ $\boxed{\sigma_3 = -18}$

N.B. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \end{array}$$



N.B. NON SAPPIAMO LE DIREZIONI MA SARÀ DI QUESTO TIPO CON LORO SFORZI NORMALI

COME POSSIAMO VERIFICARE CHE SIANO GIUSTE?

1° MODO LE METTIAMO NELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$\sigma_1 \rightarrow (54)^3 - 72(54)^2 + 324(54) + 34992 = 0$ ✓

$\sigma_2 \rightarrow (36)^3 - 72(36)^2 + 324(36) + 34992 = 0$ ✓

$\sigma_3 \rightarrow (-18)^3 - 72(-18)^2 + 324(-18) + 34992 = 0$ ✓

2° MODO CON GLI INVARIANTI:

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 54 + 36 - 18 = 72$ ✓

$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = -\left[(54)(36) + (54)(-18) + (36)(-18)\right] = -324$ ✓

$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (54)(36)(-18) = -34992$ ✓

16.- COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE-

IL PASSO SUCCESSIVO È DETERMINARE LE DIREZIONI PRINCIPALI $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ E $\vec{n}_3$ DELLE TRE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

ESSENDO 3 SOLUZIONI DISTINTE, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ESISTONO 3 DIREZIONI DISTINTE MUTUAMENTE ORTOGONALI

PER DETERMINARLE UTILIZZIAMO LA CONDIZIONE $\boxed{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = |\vec{n}| = 1}$

POSSIAMO ESPRIMERE $\boxed{\vec{n}_1 = (\alpha_{x1}, \alpha_{y1}, \alpha_{z1})}$, $\boxed{\vec{n}_2 = (\alpha_{x2}, \alpha_{y2}, \alpha_{z2})}$, $\boxed{\vec{n}_3 = (\alpha_{x3}, \alpha_{y3}, \alpha_{z3})}$

SOSTITUIAMO NEL SISTEMA INIZIALE A σ_u VOLTA PER VOLTA LA RADICE CHE CI SERVE, OVVERO σ_1 PER CALCOLARE $\vec{n}_1$, σ_2 PER $\vec{n}_2$ E σ_3 PER $\vec{n}_3$:

$$\begin{cases} (38 - \sigma_u)\alpha_x + 6\sqrt{2}\alpha_y - 14\sqrt{2}\alpha_z = 0 \\ 6\sqrt{2}\alpha_x + (45 - \sigma_u)\alpha_y - 3\alpha_z = 0 \\ -14\sqrt{2}\alpha_x + 3\alpha_y + (-11 - \sigma_u)\alpha_z = 0 \end{cases}$$

AD ESEMPIO PER CALCOLARE $\vec{n}_1$ SOSTITUIAMO $\boxed{\sigma_u = \sigma_1}$ E RICAVIAMO α_{x1}, α_{y1} E α_{z1}

$$\begin{cases} (38 - 54)\alpha_{x1} + 6\sqrt{2}\alpha_{y1} - 14\sqrt{2}\alpha_{z1} = 0 \quad (*) \\ 6\sqrt{2}\alpha_{x1} + (45 - 54)\alpha_{y1} - 3\alpha_{z1} = 0 \quad (**) \\ -14\sqrt{2}\alpha_{x1} + 3\alpha_{y1} + (-11 - 54)\alpha_{z1} = 0 \end{cases}$$

UTILIZZIAMO LE PRIME 2 (NON POSSIAMO USARLE TUTTE E 3 PERCHÉ NON SONO INDIPENDENTI)

$(*)$ $-16\alpha_{x1} + 6\sqrt{2}\alpha_{y1} - 14\sqrt{2}\alpha_{z1} = 0$ $\rightsquigarrow$ DIVIDIAMO PER 2 $\rightsquigarrow$ $-8\alpha_{x1} + 3\sqrt{2}\alpha_{y1} - 7\sqrt{2}\alpha_{z1} = 0$

$(**)$ $6\sqrt{2}\alpha_{x1} - 9\alpha_{y1} - 3\alpha_{z1} = 0$ $\rightsquigarrow$ DIVIDIAMO PER 3 $\rightsquigarrow$ $2\sqrt{2}\alpha_{x1} - 3\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0$

DALLA $(*)$ $\alpha_{x1} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{y1} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1}$ E SOSTITUENDO IN $(**)$ $2\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{y1} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1}\right) - 3\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0$ $\rightsquigarrow$ $\frac{3}{2}\alpha_{y1} - \frac{7}{2}\alpha_{z1} - 3\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0$

RACCOGLIENDO: $-\frac{3}{2}\alpha_{y1} - \frac{9}{2}\alpha_{z1} = 0$ $\rightsquigarrow$ DIVIDENDO PER 2 E POI PER 3 $\rightsquigarrow$ $\boxed{\alpha_{y1} = -3\alpha_{z1}}$

ESPRIMIAMO α_{y1} IN FUNZIONE DI α_{z1} IN α_{x1}: $\alpha_{x1} = \frac{3\sqrt{2}}{8}(-3\alpha_{z1}) - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1} = -\frac{9\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1} = -2\sqrt{2}\alpha_{z1}$ $\boxed{\alpha_{x1} = -2\sqrt{2}\alpha_{z1}}$

IMPONENDO $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$: $(-2\sqrt{2}\alpha_{z1})^2 + (-3\alpha_{z1})^2 + \alpha_{z1}^2 = 1$ $\rightsquigarrow$ $18\alpha_{z1}^2 = 1$ $\boxed{\alpha_{z1} = +/- \frac{1}{\sqrt{18}} = +/- \frac{\sqrt{2}}{6}}$

E RICAVIAMO $\boxed{\alpha_{x1} = -2\sqrt{2}(+\sqrt{2}/6) = -2/3}$ E $\boxed{\alpha_{y1} = -3(+\sqrt{2}/6) = -\sqrt{2}/2}$ QUINDI: $\vec{n}_1 = (-2/3, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/6)$

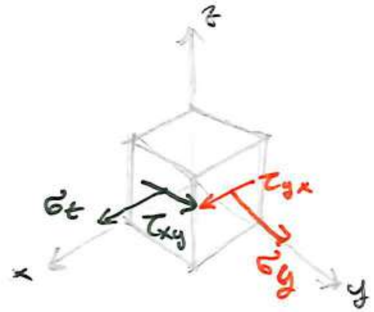
ANALOGAMENTE SI PROCEDE PER $\vec{n}_2$ E $\vec{n}_3$ (VEDI PERÒ NOTA 4)

STATO DI SFORZO PIANO

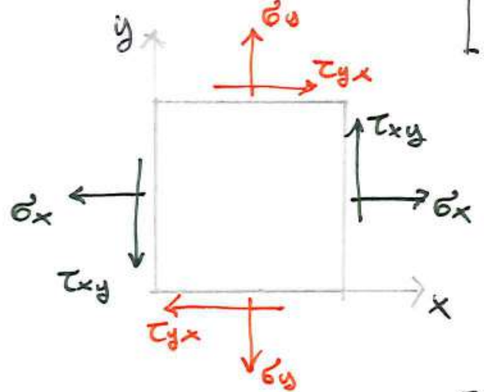
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \vec{t}_z = \vec{0}$$

N.B. z è 1 direzione principale, non ci sono tensioni tangenziali (ovviamente anche normali)

$\sigma_z = 0$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ *



POSSIAMO RAPPRESENTARLO NEL PIANO x,y



COME TROVARE LE TENSIONI PRINCIPALI?

$$\sigma_n \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \qquad \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = 0 \qquad \det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$$-\sigma_n \left[(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n) - \tau_{xy}^2 \right] = 0 \rightsquigarrow -\sigma_n \left[\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \right] = 0 \quad (*)$$

N.B.:

$$\sigma_n^3 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n^2 - (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y)\sigma_n = 0 \longleftrightarrow \boxed{\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$^* I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \cancel{\sigma_z}$; $^* I_2 = \tau_{xy}^2 + \cancel{\tau_{xz}^2} + \cancel{\tau_{yz}^2} - (\sigma_x \sigma_y + \cancel{\sigma_x \sigma_z} + \cancel{\sigma_y \sigma_z})$; $^* I_3 = \cancel{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} + \cancel{2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}} - (\cancel{\sigma_z \tau_{xy}^2} + \cancel{\sigma_y \tau_{xz}^2} + \cancel{\sigma_x \tau_{yz}^2})$

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$; $I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y$; $I_3 = 0$ $\boxed{\text{STATO PIANO DI TENSIONE}}$

$$\sigma_n^3 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n^2 - (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y)\sigma_n = 0$$

$$(*) \quad -\sigma_n \left[\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \right] = 0$$

$\sigma_n = 0 \rightsquigarrow \sigma_3 = 0$ TERZO SFORZO PRINCIPALE NULLO (STATO PIANO)

$\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (**)$

LA (**) È UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO; LE RADICI SONO LE TENSIONI PRINCIPALI σ_1 E σ_2

* [NB $ax^2+bx+c=0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

$$* \ \sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x+\sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x+\sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

SVILUPPANDO IL TERMINE SOTTO LA RADICE: $\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\sigma_x\sigma_y - 4\sigma_x\sigma_y - 4\tau_{xy}^2 = \sigma_x^2+\sigma_y^2-2\sigma_x\sigma_y+4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2$

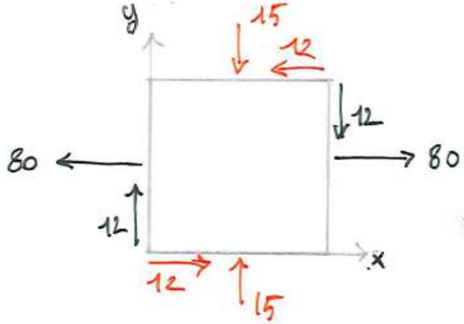
$$\boxed{\sigma_{1,2}} = \frac{(\sigma_x+\sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}{4}} = \boxed{\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

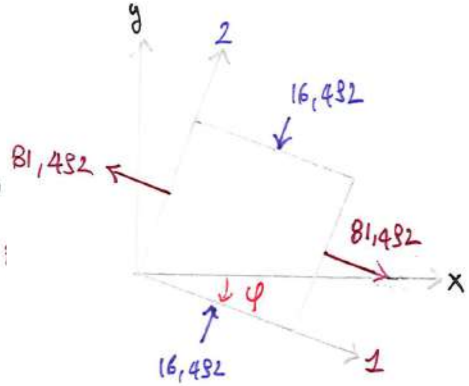
CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI σ_1 E σ_2 IN STATO PIANO DI TENSIONE

ESEMPIO APPLICATIVO

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \text{ MPa}$$

STATO PIANO DI TENSIONE





φ ANGOLO DI DOBBIAMO RUOTARE LA FACCIA DEL CUBO PER ESSERE NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE

VOGLIAMO CALCOLARE σ_1 E σ_2:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \left(\frac{80-15}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{80+15}{2}\right)^2+(-12)^2} = \begin{cases} \boxed{\sigma_1 = 81{,}492 \text{ MPa}} \\ \boxed{\sigma_2 = -16{,}492 \text{ MPa}} \end{cases}$$

N.B. $\boxed{\sigma_3 = 0}$

NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 81{,}492 & 0 & 0 \\ 0 & -16{,}492 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

N.B. $I_1 = \sigma_x+\sigma_y = 80-15 = 65$

$I_1 = \sigma_1+\sigma_2 = 81{,}492-16{,}492 = 65$

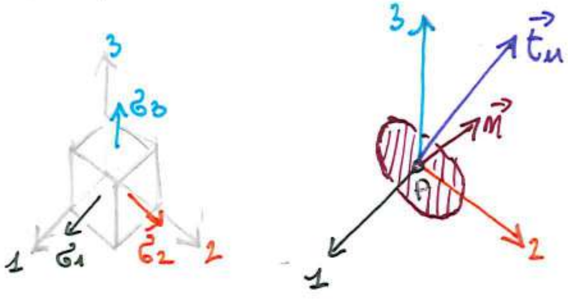
$I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y = 144+1200 = 1344$

$I_2 = -\sigma_1\sigma_2 = 1344$

PER TROVARE LE DIREZIONI PRINCIPALI, $\vec{n}_1$ E $\vec{n}_2$ USIAMO LA CONDIZIONE $\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2 = 1$ [PER IL CALCOLO DELL'ANGOLO φ VEDI NOTA 7]

PERÒ ESISTE UN MODO PIÙ COMODO PER CALCOLARE φ → $\boxed{\text{CERCHI DI MOHR}}$

DATO UN PUNTO P, ASSUMIAMO COME ASSI DI RIFERIMENTO LE TRE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE 1, 2, 3, E CONSIDERIAMO UN PIANO PASSANTE PER P AVENTE UNA GIACITURA GENERICA DI NORMALE $\vec{n}$ SU CUI AGISCE LA TENSIONE $\vec{t_n}$



$$\boxed{\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} \quad \alpha_1 = \cos\{\widehat{1,n}\}, \quad \alpha_2 = \cos\{\widehat{2,n}\}, \quad \alpha_3 = \cos\{\widehat{3,n}\}$$

LA RELAZIONE DI CAUCHY CONSENTE DI DETERMINARE $\vec{t_n}$ NOTI $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$ e $\vec{t_3}$, OVVERO LE SUE COMPONENTI RISPETTO ALLE DIREZIONI 1 2 3 (3 PIANI ORTOGONALI $\Rightarrow$ È POSSIBILE DETERMINARE $\vec{t}$ PER QUALSIASI GIACITURA)

$$\boxed{\vec{t_n} = \vec{t_1}\alpha_1 + \vec{t_2}\alpha_2 + \vec{t_3}\alpha_3}$$

$$\vec{t_1} = \{\sigma_1, 0, 0\}, \quad \vec{t_2} = \{0, \sigma_2, 0\}, \quad \vec{t_3} = \{0, 0, \sigma_3\}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{t_1} & \vec{t_2} & \vec{t_3} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

ALLORA LE COMPONENTI DI t_n RISPETTO AL RIFERIMENTO PRINCIPALE

$$\boxed{\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1\alpha_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2\alpha_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3\alpha_3 \end{aligned}}$$

QUANTO VALE LA COMPONENTE NORMALE σ_n DI $\vec{t_n}$?

$$\sigma_n = t_{n1}\alpha_1 + t_{n2}\alpha_2 + t_{n3}\alpha_3 \rightsquigarrow \boxed{\sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2} \quad [\bullet]$$

[N.B. È L'ESPRESSIONE $\sigma_n = \sigma_x\alpha_x^2 + \sigma_y\alpha_y^2 + \sigma_z\alpha_z^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y + 2\tau_{xz}\alpha_x\alpha_z + 2\tau_{yz}\alpha_y\alpha_z$]

QUANTO VALE LA COMPONENTE TANGENZIALE τ_{nm} DI $\vec{t_n}$, CON $\vec{m}$ PERPENDICOLARE A $\vec{n}$?

$\vec{m}$ È UNA QUALUNQUE RETTA PERPENDICOLARE A $\vec{n}$, OVVERO APPARTENENTE AL PIANO DI GIACITURA $\vec{m}$

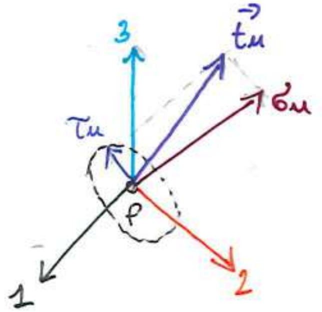
$$\boxed{\vec{m} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}} \quad \beta_1 = \cos\{\widehat{1,m}\}, \quad \beta_2 = \cos\{\widehat{2,m}\}, \quad \beta_3 = \cos\{\widehat{3,m}\}$$

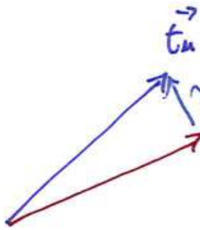
$$\tau_{nm} = t_{n1}\beta_1 + t_{n2}\beta_2 + t_{n3}\beta_3 \rightsquigarrow \boxed{\tau_{nm} = \sigma_1\alpha_1\beta_1 + \sigma_2\alpha_2\beta_2 + \sigma_3\alpha_3\beta_3} \quad [\circ]$$

[N.B. È L'ESPRESSIONE $\tau_{nm} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \sigma_z\alpha_z\beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$]

* LE ESPRESSIONI [•] E [∘] QUINDI CONSENTONO DI VALUTARE LE TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI SU UNA QUALUNQUE GIACITURA IN FUNZIONE DELLE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

AL FINE DI AVERE UNA CHIARA RAPPRESENTAZIONE DELLO STATO DI SFORZO SU UNA GENERICA GIACITURA $\vec{n}$ È OPPORTUNO AFFIANCARE ALLA TENSIONE NORMALE σ_n LA TENSIONE TANGENZIALE TOTALE τ_n, CHE RAPPRESENTA LA PROIEZIONE DI $\vec{t}_n$ SULLA GIACITURA $\perp$ A $\vec{n}$





APPLICANDO IL TEOREMA DI PITAGORA $|t_n|^2 = |\sigma_n^2 + \tau_n^2|$ $\qquad |\vec{t}_n|^2 = \vec{t}_n \times \vec{t}_n = (t_{n1})^2 + (t_{n2})^2 + (t_{n3})^2 =$

$$t_n^2 = \sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2$$

ALLORA: $\boxed{\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2}$

QUINDI ABBIAMO 2 RELAZIONI: [*] $\boxed{\sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2}$ CONSENTE DI CALCOLARE σ_n NOTE $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ E $\vec{n}$

[**] $\boxed{\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2}$ CONSENTE DI CALCOLARE $\vec{t}_n$ IN FUNZIONE DI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ E $\vec{n}$

TENENDO CONTO CHE $\vec{n}$ DEVE ESSERE UNA DIREZIONE VALIDA: $\boxed{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1}$ [***]

METTIAMO A SISTEMA [*], [**] E [***]:

$$\begin{cases} \sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 & [**] \\ \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 = \sigma_n & [*] \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 & [***] \end{cases}$$

IPOTESI: $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ E $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ \alpha_2^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ \alpha_3^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

NB. PERMUTAZIONE DEGLI INDICI

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

N.B. $\alpha_1^2 \geq 0$, $\alpha_2^2 \geq 0$, $\alpha_3^2 \geq 0$ → LE FRAZIONI DEVONO ESSERE POSITIVE (NUMERATORE E DENOMINATORE DELLO STESSO SEGNO)

AD ESEMPIO $\boxed{\alpha_1^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}} \to \dfrac{-----}{\underbrace{(\sigma_1 - \sigma_2)}_{\oplus}\underbrace{(\sigma_1 - \sigma_3)}_{\oplus}} \longrightarrow \dfrac{----}{\oplus \neq 0}$ SE $\dfrac{----}{\geq 0}$ ALLORA ANCHE $\dfrac{\geq 0}{----} \to \dfrac{\geq 0}{\geq 0}$

$\sigma_1 > \sigma_2 \qquad \sigma_1 > \sigma_3 \qquad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

DEVE ESSERE $\tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_2)(\sigma_u-\sigma_3) \geq 0$ $\tau_u^2 + \sigma_u^2 - \sigma_u(\sigma_2+\sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 \geq 0$

POSSIAMO SCRIVERE $\sigma_u^2 - \sigma_u(\sigma_2+\sigma_3) + \sigma_2\sigma_3$ COME LO SVILUPPO DI 1 QUADRATO DI UN BINOMIO DEL TIPO $(a-b)^2$:

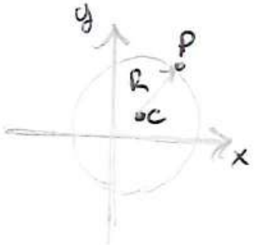
$$\sigma_u^2 - 2\sigma_u\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{2} + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

[AGGIUNGIAMO $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2$ E LEVIAMO $\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$]

$$\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{\sigma_2^2}}{4} + \frac{\cancel{\sigma_3^2}}{4} + 2\frac{\sigma_2\sigma_3}{4} - \left[\frac{\cancel{\sigma_2^2}}{4} + \frac{\cancel{\sigma_3^2}}{4} - 2\frac{\sigma_2\sigma_3}{4}\right] = \frac{2}{4}\sigma_2\sigma_3 + \frac{2}{4}\sigma_2\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3$$

ALLORA $\tau_u^2 + \boxed{\sigma_u^2 - 2\sigma_u\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{2} + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2} - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \geq 0 \;\rightarrow\; \boxed{\tau_u^2 + \left(\sigma_u - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2}$

QUESTA ESPRESSIONE HA UN SIGNIFICATO GEOMETRICO PRECISO: NEL PIANO x,y UN CERCHIO DI CENTRO $C=(x_c,y_c)$ E RAGGIO R HA EQUAZIONE: $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$

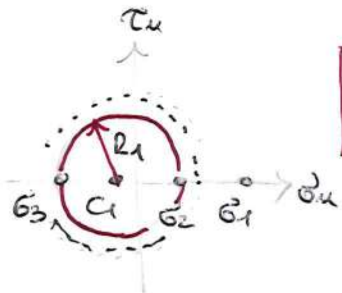


$C = (x_c, y_c)$

$P = (x, y)$

$R = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$

SE RIPORTIAMO L'EQUAZIONE SU UN PIANO σ,τ — PIANO DI MOHR —



$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_u = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2}$$

È LA CIRCONFERENZA DI CENTRO $C_1 = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$

E RAGGIO $R_1 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)$

C_1 = PUNTO MEDIO TRA σ_2 E σ_3 ; $\overline{\sigma_2\sigma_3}$ È IL DIAMETRO DEL CERCHIO

$\boxed{\alpha_1^2 \geq 0}$ È SODDISFATTA DA TUTTI I PUNTI CHE STANNO SULLA CIRCONFERENZA CON CENTRO C_1 E DI RAGGIO R_1 E AL DI FUORI

IN MANIERA ANALOGA SI PROCEDE CON $\alpha_2^2 \geq 0$ E $\alpha_3^2 \geq 0$

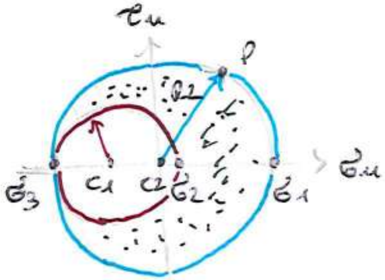
$$\boxed{\alpha_2^2 = \frac{\tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_3)(\sigma_u-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}}$$

$$\alpha_2^2 \geq 0 \rightarrow \frac{\geq 0}{\geq 0} \text{ o } \frac{\leq 0}{\leq 0} \rightarrow \frac{-------}{\underset{\oplus}{(\sigma_2-\sigma_3)}\underset{\ominus}{(\sigma_2-\sigma_1)}} \rightarrow \frac{---}{\leq 0} \quad \text{ALLORA} \quad \frac{\leq 0}{---} \qquad \tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_3)(\sigma_u-\sigma_1) \leq 0$$

$\neq 0$

$\sigma_2 > \sigma_3$ $\quad \sigma_2 < \sigma_1$ $\quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

N.B. PERMUTAZIONE DEGLI INDICI $3 \to 1 \to 2$ SI OTTIENE: $\boxed{\tau_u^2 + \left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2}$



$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2}$$

È LA CIRCONFERENZA DI CENTRO

$C_2 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right)$

E RAGGIO $R_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

C_2 = PUNTO MEDIO TRA σ_1 E σ_3

$\overline{\sigma_1\sigma_3}$ = DIAMETRO

$\boxed{\alpha_2^2 \geq 0}$ È SODDISFATTA DA TUTTI I PUNTI CHE STANNO SULLA CIRCONFERENZA DI CENTRO C_2 E RAGGIO R_2 E AL SUO INTERNO, MA ALL'ESTERNO DEL CERCHIO DI CENTRO C_1 E RAGGIO R_1

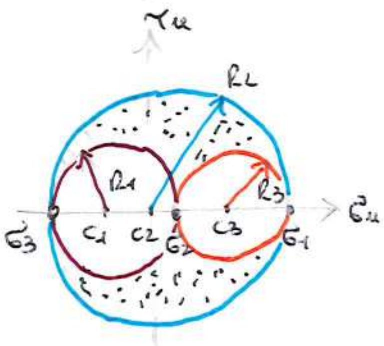
$$\boxed{\alpha_3^2 = \frac{\tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_1)(\sigma_u-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}}$$

$$\alpha_3^2 \geq 0 \rightarrow \frac{\geq 0}{\geq 0} \text{ o } \frac{\leq 0}{\leq 0} \rightarrow \frac{---------}{\underset{\ominus}{(\sigma_3-\sigma_1)}\underset{\ominus}{(\sigma_3-\sigma_2)}} \rightarrow \frac{---}{\geq 0} \quad \text{ALLORA} \quad \frac{\geq 0}{---} \qquad \tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_1)(\sigma_u-\sigma_2) \geq 0$$

$\neq 0$

$\sigma_3 < \sigma_1$ $\quad \sigma_3 < \sigma_2$ $\quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

N.B. PERMUTAZIONE DEGLI INDICI $3 \to 1 \to 2$ SI OTTIENE $\boxed{\tau_u^2 + \left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2}$



$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2}$$

È LA CIRCONFERENZA DI CENTRO

$C_3 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$

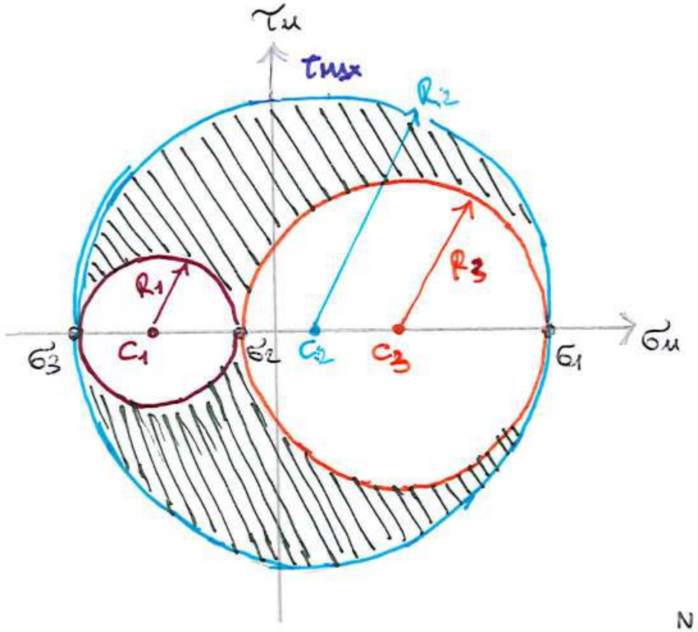
E RAGGIO $R_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

C_3 = PUNTO MEDIO TRA σ_1 E σ_2 ; $\overline{\sigma_1\sigma_2}$ = DIAMETRO

$\boxed{\alpha_3^2 \geq 0}$ È SODDISFATTA DA TUTTI I PUNTI CHE STANNO SULLA CIRCONFERENZA DI CENTRO C_3 E RAGGIO R_3 E AL DI FUORI, MA ALL'ESTERNO DEL CERCHIO $\overline{C}_1$ E ALL'INTERNO DEL CERCHIO $\overline{C}_2$

[N.B. $\overline{C}_1$ È IL CERCHIO DI RAGGIO R_1 E CENTRO C_1; $\overline{C}_2$ È IL CENTRO DI RAGGIO R_2 E CENTRO C_2]

ARBELO DI MOHR



CERCHIO 1: $C_1 = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right) \quad R_1 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$

CERCHIO 2: $C_2 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right) \quad R_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

CERCHIO 3: $C_3 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right) \quad R_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

//// PUNTI DEL PIANO DI MOHR CHE SODDISFANO $\alpha_1^2 \geq 0, \alpha_2^2 \geq 0, \alpha_3^2 \geq 0$

OVVERO: STATI TENSIONALI AMMISSIBILI

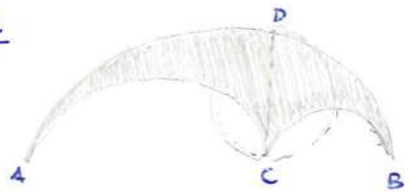
N.B. • NON SONO POSSIBILI VALORI DI $\sigma_n > \sigma_1$ E $\sigma_n < \sigma_3$: $\boxed{\sigma_3 < \sigma_n < \sigma_1}$

• LO SFORZO TANGENZIALE τ_n NON PUÒ SUPERARE IL RAGGIO DELLA MASSIMA CIRCONFERENZA R_2:

$$R_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \Rightarrow \boxed{|\tau_n| \leq \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}$$

• $\boxed{\tau_n = 0}$ SOLO IN CORRISPONDENZA DI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

N.B.



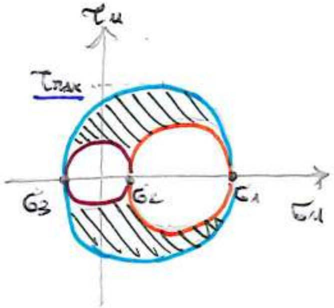
ARBELO: FIGURA PIANA LIMITATA DA 3 CIRCONFERENZE, STUDIATA DA ARCHIMEDE. IL TERMINE DERIVA DAL GRECO, E INDICA UN "TRINCETTO DA CALZOLAIO"

NOTI I VALORI DELLE TENSIONI PRINCIPALI, σ_1, σ_2 E σ_3, È POSSIBILE TRACCIARE I CERCHI E L'ARBELO E DETERMINARE GLI STATI TENSIONALI AMMISSIBILI; LA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA E, IN GENERALE, LE TENSIONI RELATIVE A TUTTE LE INFINITE GIACITURE CHE SI POSSONO CONSIDERARE PER IL PUNTO IN OGGETTO.

1° CASO

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$



$\overline{C_1}$ E $\overline{C_3}$ SONO TANGENTI IN σ_2

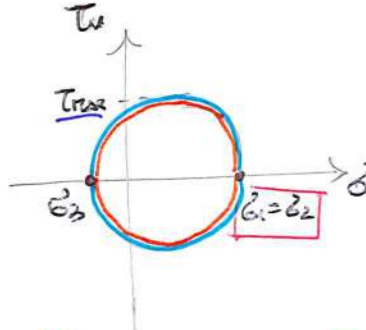
$\overline{C_2}$ È TANGENTE A C_1 IN σ_3 E A $\overline{C_3}$ IN σ_1

$|\tau_u| \leq R_2 \Rightarrow |\tau_u| \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$

2° CASO

$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$

$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$



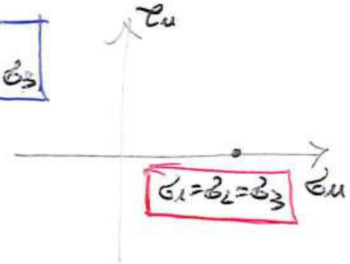
$\overline{C_3}$ CRESCE, MENTRE $\overline{C_1}$ DIMINUISCE FINCHÉ $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \overline{C_1}$ DEGENERA IN UN PUNTO E $\overline{C_3}$ DIVENTA UGUALE A $\overline{C_2}$

* GLI STATI AMMISSIBILI SONO SOLO I PUNTI DELLA CIRCONFERENZA $\overline{C_2} = \overline{C_3}$ (E NON ALL'INTERNO)

$\tau_{max} = R_2 = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$

3° CASO

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$



I 3 CERCHI DEGENERANO IN UN PUNTO, STATO IDROSTATICO

$\tau_u = 0$

ESEMPIO APPLICATIVO

TRACCIAMO I CERCHI DI MOHR E L'ARBELO PER LO STATO DI SFORZO UTILIZZATO NEL PRECEDENTE ESERCIZIO:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

RIFERIMENTO CARTESIANO

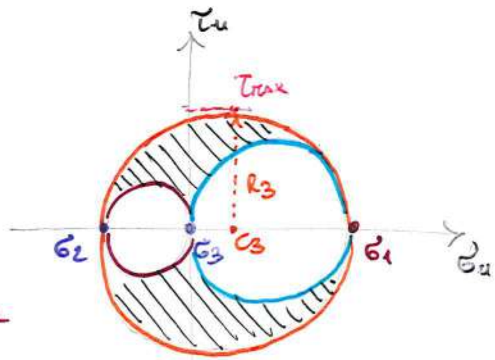
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 81{,}482 & 0 & 0 \\ 0 & -16{,}482 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

RIFERIMENTO PRINCIPALE

$\sigma_1 = 81{,}482$

$\sigma_2 = -16{,}482$

$\sigma_3 = 0$

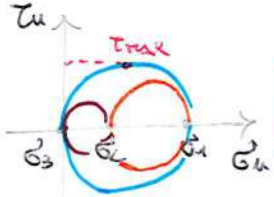


SE σ_1 E σ_2 HANNO SEGNI DIVERSI, ALLORA τ_{max} APPARTIENE AL CERCHIO C_3, DI DIAMETRO $\overline{\sigma_1 \sigma_2}$, ED È NEL PIANO (x, y)

$$\boxed{\tau_{max} = R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}}$$

N.B.

SE σ_1 E σ_2 HANNO LO STESSO SEGNO, ALLORA τ_{max} NON SI TROVA NEL PIANO (x, y), OVVERO NON APPARTIENE AL CERCHIO C_3 $(\overline{\sigma_1 \sigma_2})$ MA AL CERCHIO C_2 $(\overline{\sigma_1 \sigma_3})$



τ_{max} = RAGGIO DEL CERCHIO PIÙ GRANDE:

$$\tau_{max} = \max\left\{ \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right| \right\}$$

IN MOLTI PROBLEMI STRUTTURALI LO STATO TENSIONALE GODE DI PARTICOLARI PROPRIETA' CHE SEMPLIFICANO NOTEVOLMENTE LA TRATTAZIONE GENERALE; LO STATO TENSIONALE È TALE CHE IL VETTORE $\vec{t_n}$ AGENTE SU UNA QUALUNQUE GIACITURA PASSANTE PER IL PUNTO SIA SEMPRE CONTENUTO IN UNO STESSO PIANO, IL PIANO DELLE TENSIONI. → $\boxed{\text{STATI TENSIONALI PIANI}}$

FACENDO RIFERIMENTO AL VETTORE TENSIONE AGENTE SULLE TRE GIACITURE PRINCIPALI, LA CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ DI $\vec{t_n}$ PUÒ ESSERE SODDISFATTA SOLO SE UNA DELLE TRE TENSIONI PRINCIPALI È NULLA E IL PIANO DELLE TENSIONI È INDIVIDUATO DALLE ALTRE DUE, AD ESEMPIO $\boxed{\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0 \ \text{E} \ \sigma_3 = 0}$

ALLORA SU UNA QUALUNQUE GIACITURA $\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ SI HA $t_{n1} = \sigma_1 \alpha_1$, $t_{n2} = \sigma_2 \alpha_2$ E $t_{n3} = 0$, PERTANTO $\vec{t_n}$ NON PUÒ CHE ESSERE CONTENUTO NEL PIANO (1,2)

PER RICONOSCERE SE UNO STATO TENSIONALE È PIANO È SUFFICIENTE DEFINIRE LE CONDIZIONI SOTTO LE QUALI UNA DI ESSE È NULLA. RICORDANDO CHE I VALORI DELLE TENSIONI PRINCIPALI SI DETERMINANO CON L'ANNULLAMENTO DEL DETERMINANTE $\det(\underline{\sigma} - \sigma_n \underline{I}) = 0$, LA CONDIZIONE DI NULLITÀ DI UNA DI ESSE È CERTAMENTE VERIFICATA SE SI ANNULLA IL DETERMINANTE PONENDO $\sigma_n = 0$ ALLORA LO STATO TENSIONALE È PIANO SE $\boxed{\det \underline{\sigma} = 0}$, CHE PERALTRO CORRISPONDE A $\boxed{I_3 = 0}$

ASSUMENDO COME PIANO DELLE TENSIONI IL PIANO (x,y), ALLORA z DEVE ESSERE DIREZIONE PRINCIPALE CON RELATIVA COMPONENTE PRINCIPALE NULLA: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ $[\sigma_3 = 0]$ E LO STATO TENSIONALE È DEFINITO DALLE TRE COMPONENTI NON NULLE $\boxed{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}}$

LA RICERCA DELLE COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE RICHIEDE CHE

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

ESCLUDENDO LA OVVIA RADICE $\sigma_n = \sigma_3 = 0$

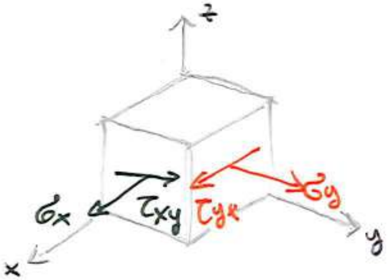
$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) \end{bmatrix} = 0$$

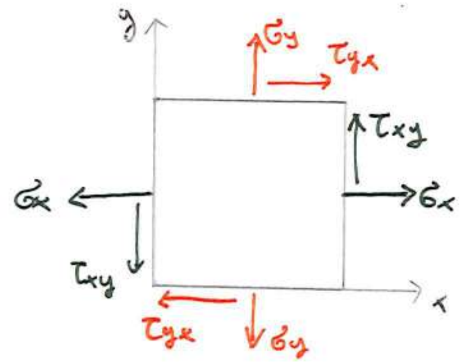
CHE SVILUPPATA FORNISCE L'EQUAZIONE: $\boxed{\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0}$ LE CUI RADICI $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ SONO LE COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE σ_1 E σ_2

* LO STUDIO DELLO $\boxed{\text{STATO PIANO DI TENSIONE}}$ PUÒ ESSERE CONDOTTO IN MANIERA MOLTO VANTAGGIOSA PER VIA GRAFICA ATTRAVERSO L'APPLICAZIONE DEI $\boxed{\text{CERCHI DI MOHR}}$

1E. – I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI –

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{array}$$
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

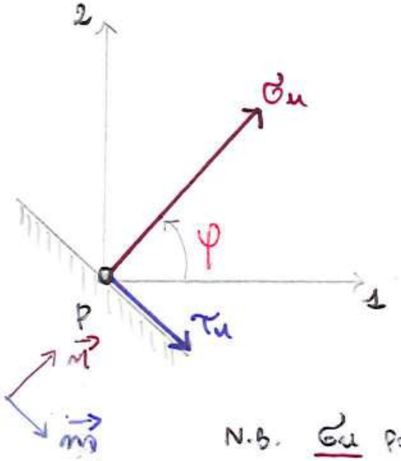




$$\sigma_3 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} +/- \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

CONSIDERIAMO UNA GIACITURA $\vec{n}$ APPARTENENTE AL PIANO DELLE TENSIONI (1,2), INCLINATA RISPETTO ALL'ASSE 1 DI UN ANGOLO φ E SIANO σ_n E τ_n LE COMPONENTI NORMALI E TANGENZIALI SU TALE GIACITURA (τ_n INDIVIDUATA DA $\vec{m}$, $\perp$ A $\vec{n}$)



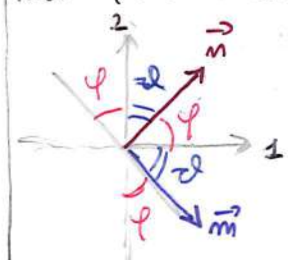
$$\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \boxed{\{\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0\}}$$

$$\alpha_1 = \cos(1,\hat{\vec{n}}) = \cos\varphi$$
$$\alpha_2 = \cos(2,\hat{\vec{n}}) = \operatorname{sen}\varphi$$
$$\alpha_3 = \cos(3,\hat{\vec{n}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{m} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \boxed{\{\operatorname{sen}\varphi, -\cos\varphi, 0\}}$$

$$\beta_1 = \cos(1,\hat{\vec{m}}) = \operatorname{sen}\varphi$$
$$\beta_2 = \cos(2,\hat{\vec{m}}) = -\cos\varphi$$
$$\beta_3 = \cos(3,\hat{\vec{m}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

N.B. $\varphi + \vartheta = \pi/2$



N.B. σ_n POSITIVA QUANDO COINCIDE CON $\vec{n}$

τ_n POSITIVA QUANDO TENDE A "FAR RUOTARE" IN SENSO ORARIO L'ELEMENTINO MATERIALE $+\circlearrowright$

$$\sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 = \boxed{\sigma_1\cos^2\varphi + \sigma_2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$\tau_n = \sigma_1\alpha_1\beta_1 + \sigma_2\alpha_2\beta_2 + \sigma_3\alpha_3\beta_3 = \sigma_1\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \sigma_2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \boxed{(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}$$

RICORDANDO CHE: $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi$

$$\sigma_n = \sigma_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) + \sigma_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) = \boxed{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cdot\cos 2\varphi}$$

E

$$\tau_n = (\sigma_1-\sigma_2)\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi = \boxed{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{sen}2\varphi}$$

RISCRIVIAMO σ_u :

$$\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\cos 2\varphi$$

METTIAMO ENTRAMBE AL QUADRATO :

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\cos^2 2\varphi$$

$$\tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi$$

LE SOMMIAMO :

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\cos^2 2\varphi + \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi$$

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \left(\cos^2 2\varphi + \operatorname{sen}^2 2\varphi\right) \rightarrow \text{NB} \quad \cos^2 2\varphi + \operatorname{sen}^2 2\varphi = 1$$

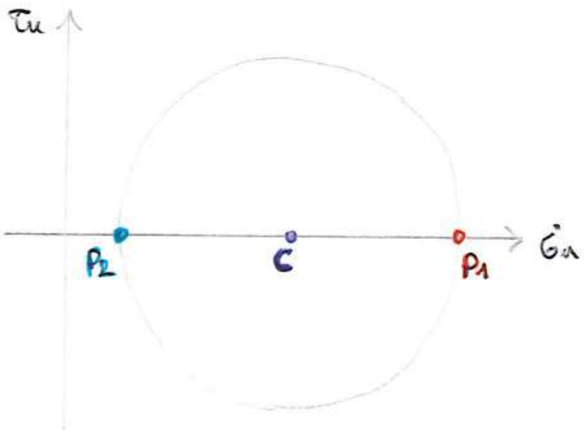
OTTENIAMO :

$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2} \quad [\circ]$$

N.B. $(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = R^2$ E' L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO $C=(x_C, y_C)$

ALLORA LA $[\circ]$ RAPPRESENTA LA CIRCONFERENZA DI CENTRO $\boxed{C = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)}$ E RAGGIO $\boxed{R = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)}$ NEL PIANO (σ_u, τ_u) [PIANO DI MOHR]

I PUNTI DEL CERCHIO RAPPRESENTANO TUTTI I POSSIBILI STATI TENSIONALI SULLE GIACITURE AVENTI NORMALE CONTENUTA NEL PIANO DELLE TENSIONI (σ_1, σ_2)

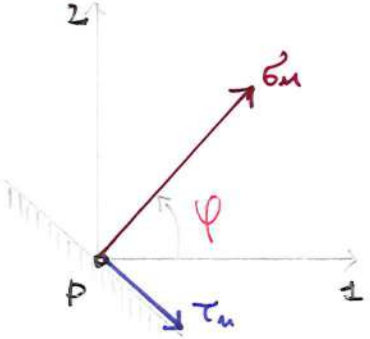


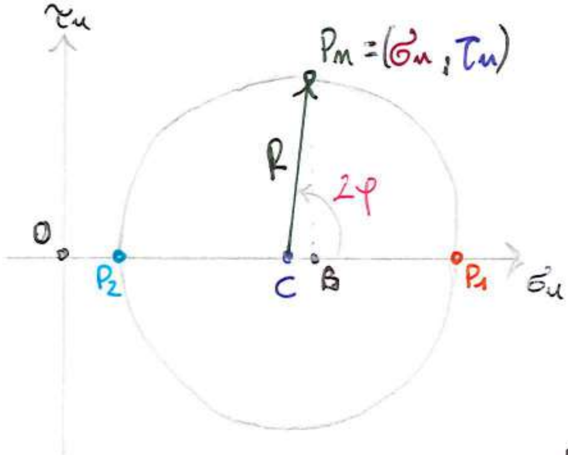
IN PARTICOLARE I PUNTI P_1 E P_2 RAPPRESENTANO LO STATO TENSIONALE SULLE GIACITURE PRINCIPALI DI NORMALE 1 E 2

$\boxed{P_1 = (\sigma_1, 0)}$ $\boxed{P_2 = (\sigma_2, 0)}$ $C = (\sigma_C, 0)$ CON $\sigma_C = \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$

$$R = \overline{P_1C} = \sqrt{\Big(\sigma_1 - \underbrace{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}_{\sigma_C}\Big)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)$$

PER OTTENERE IL PUNTO $\boxed{P_M=(\sigma_M,\tau_M)}$ CORRISPONDENTE ALLA GIACITURA LA CUI NORMALE $\vec{M}$ FORMA L'ANGOLO φ CON L'ASSE 1 È SUFFICIENTE COSTRUIRE IL RAGGIO $\overline{CP_M}$ RUOTATO RISPETTO AL RAGGIO $\overline{CP_1}$, NELLO STESSO SENSO IN CUI $\vec{M}$ È RUOTATA RISPETTO ALL'ASSE 1, DELL'ANGOLO DOPPIO, 2φ





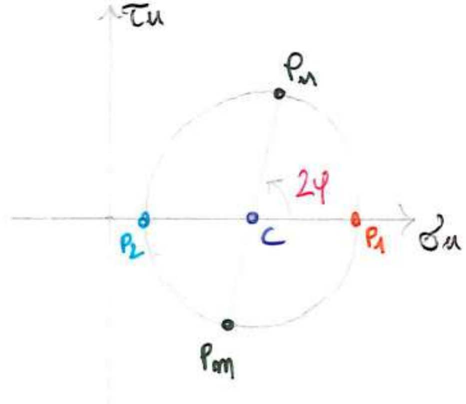
$$\sigma_M = \overline{OC}+\overline{CB} = \overbrace{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}^{\sigma_c} + \overbrace{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}}^{R}\cos 2\varphi = \overline{OC}+R\cos 2\varphi$$

$$\tau_M = \overline{BP_M} = R\,\mathrm{sen}\,2\varphi = \overbrace{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}}^{R}\,\mathrm{sen}\,2\varphi$$

* NEL PIANO DI MOHR GLI ANGOLI SONO DOPPI RISPETTO AL PIANO FISICO

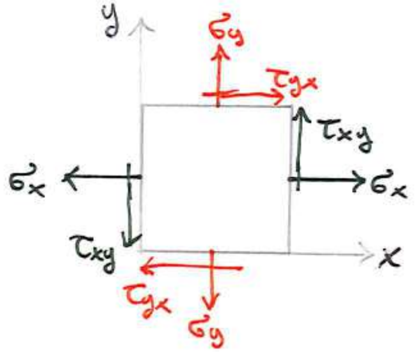
N.B. SE AD OGNI NORMALE $\vec{M}$ DEL PIANO DELLE TENSIONI SI ASSOCIA UN RAGGIO $\overrightarrow{CP_M}$ NEL PIANO DI MOHR, LO SFASAMENTO ANGOLARE TRA DUE RAGGI $\overline{CP_M}$ E $\overline{CP_m}$ È IL DOPPIO DELLO SFASAMENTO ANGOLARE DELLE CORRISPONDENTI $\vec{M}$ E $\vec{m}$ NEL PIANO DELLE TENSIONI.

SE $\vec{M}$ E $\vec{m}$ SONO ORTOGONALI, I CORRISPONDENTI RAGGI $\overline{CP_M}$ E $\overline{CP_m}$ DEVONO FORMARE UN ANGOLO DI 180°, SONO PERTANTO DISPOSTI SU UNO STESSO DIAMETRO



TIPICAMENTE, SE CONOSCIAMO LE TENSIONI SU DUE FACCE PERPENDICOLARI POSSIAMO COSTRUIRE DIRETTAMENTE IL CERCHIO DI MOHR RIPORTANDO SUL PIANO DI MOHR (σ_u, τ_u) I PUNTI P_x E P_y CORRISPONDENTI ALLE GIACITURE DI NORMALE x E y

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

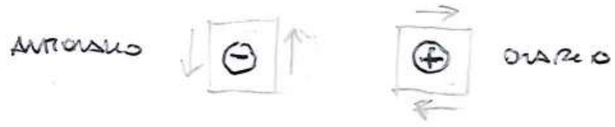


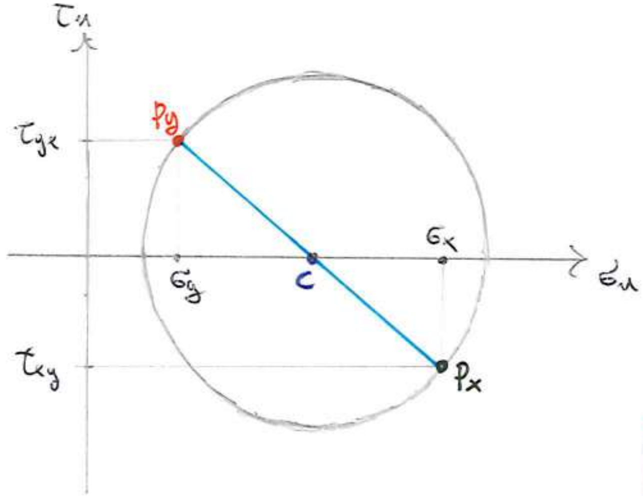
$$\boxed{P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy})}$$

$$\boxed{P_y = (\sigma_y, \tau_{yx})}$$

N.B. NELL'ELEMENTINO LE τ POSITIVE CONVERGONO SULLO SPIGOLO:

NEL CERCHIO DI MOHR LE τ SONO POSITIVE QUANDO FANNO RUOTARE L'ELEMENTINO IN SENSO ORARIO:





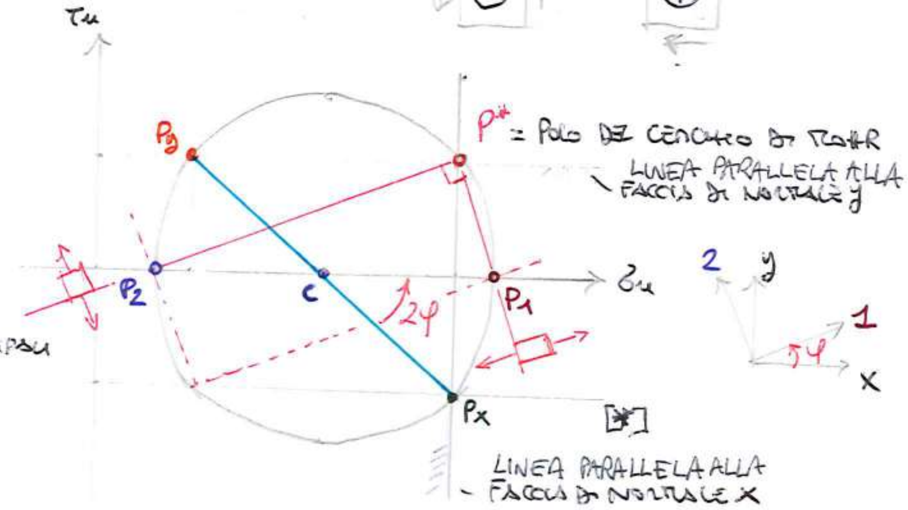
N.B. È LO STESSO CERCHIO DI PRIMA:

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

POSSIAMO INDIVIDUARE P_1 E P_2 DOVE ABBIAMO SOLO TENSIONI PRINCIPALI

$\boxed{P_1 = \sigma_1, 0}$ $\boxed{P_2 = \sigma_2, 0}$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$



N.B. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ STESSA DISTANZA DA σ_u MA SEGNI OPPOSTI τ_{xy} ⊖ E τ_{yx} ⊕

C GIACE SEMPRE SU σ_u

$$C = \left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right), \left(\frac{\tau_{xy}+(-\tau_{xy})}{2}\right)\right] \rightsquigarrow \boxed{C = \left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right), 0\right]}$$

$$D = \sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\tau_{yx}-(-\tau_{xy}))^2} = \sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$R = D/2 = \sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}{4}} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

N.B.

$$\cos 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_c}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \qquad \text{sen}\, 2\varphi = \frac{-\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\text{sen}\, 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \boxed{\frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_c}}$$

INCLINAZIONE DEL PIANO (1,2)

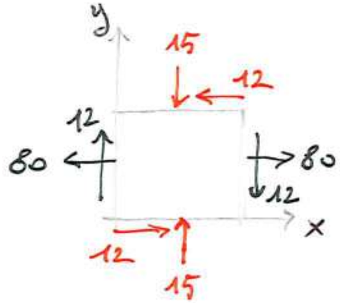
MA $\sigma_c = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \rightarrow \tan 2\varphi = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

[*] GLI ANGOLI AL CENTRO $P_1\hat{C}P_2$ E $P_x\hat{C}P_y$ SONO DOPPI DEGLI ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA $P_1\hat{P}^*P_2$ E $P_x\hat{P}^*P_y$; LE DIREZIONI INDICATE DAL POLO SONO LE EFFETTIVE INCLINAZIONI DELLE FACCE

ESEMPIO APPLICATIVO

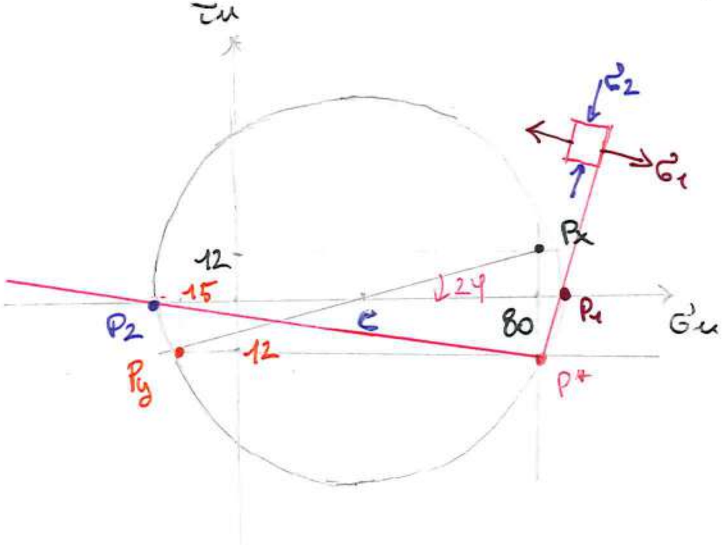
(HP0)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\boxed{P_x = (80, 12)}$ [τ_{xy} PRODUCE QUESTA VOLTA ROTAZIONE ↻]

$\boxed{P_y = (-15, -12)}$ [τ_{yx} PRODUCE QUESTA VOLTA ROTAZIONE ↺]



$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 - 15}{2} = 32,5 \qquad C = (32,5\,,\ 0)$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2} = \frac{12 - 12}{2} = 0$$

$$R = \overline{P_x C} = \sqrt{\underbrace{(80 - 32,5)^2}_{(x - x_c)^2} + \underbrace{(12 - 0)^2}_{(y - y_c)^2}} = 48,992$$

$\sigma_1 = \sigma_c + R = 32,5 + 48,992 = \underline{81,492}$ $\qquad \boxed{P_1 = (81,492\,,\ 0)}$

$\sigma_2 = \sigma_c - R = 32,5 - 48,992 = \underline{-16,492}$ $\qquad \boxed{P_2 = (-16,492\,,\ 0)}$

$$\varphi = ? \qquad \tan 2\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \overset{[*]}{=} \frac{\overbrace{12}^{-\tau_{xy}}}{\underbrace{(80 - 32,50)}_{\sigma_x - \sigma_c}} = \frac{12}{47,5} = 0,2526$$

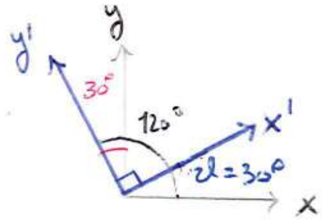
$$2\varphi = \arctan(0,2526) = 0,2472 \text{ rad} \qquad 0,2472 \cdot \frac{180}{\pi} = 14,177°$$

$$\boxed{\varphi = 7,089°}$$

[*] SI OSSERVA CHE $\tan 2\varphi$ È ANCHE PARI A $\dfrac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = -\dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_c}$.

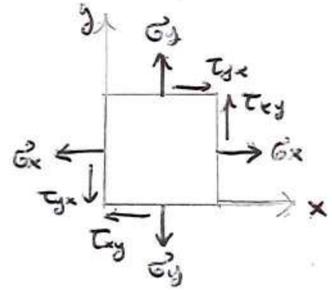
IN QUANTO $\sigma_x - \sigma_c = \sigma_x - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{2\sigma_x - \sigma_x - \sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

CAMBIO DI RIFERIMENTO: VOGLIAMO TROVARE LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z}$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x', y', z', IN CUI IL PIANO $x'y'$ È RUOTATO RISPETTO AL PIANO x,y DI UN ANGOLO ϑ, AD ESEMPIO $\vartheta = 30°$, RISPETTO ALL'ASSE z $(z' \equiv z)$

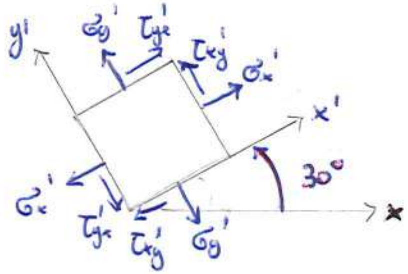


$\vartheta = (\widehat{x, x'}) = 30°$

$(\widehat{x, y'}) = 120°$



$\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{x',y',z'}$

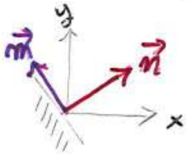


RICORDANDO CHE:

$$\sigma_{nn} = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + \sigma_z \alpha_z^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y + 2\tau_{xz}\alpha_x\alpha_z + 2\tau_{yz}\alpha_y\alpha_z$$

$$\tau_{nm} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$$

CON $\vec{n} \perp \vec{m}$:



$\vec{n} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ E $\vec{m}\,(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$

ANALOGAMENTE POSSIAMO RICAVARE $\underline{\underline{\sigma}}_{x',y',z'}$ CON $\vec{n} \rightarrow x'$ E $\vec{m} \rightarrow y'$

CASO PARTICOLARE: STATO DI SFORZO PIANO

$[\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0]$

* NB $z = z'$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{x',y',z'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x' & \vec{t}_y' & \vec{t}_z' \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x' & \tau_{yx}' & 0 \\ \tau_{xy}' & \sigma_y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\varphi = 30°$

$\alpha_x = \cos 30° = \sqrt{3}/2$

$\alpha_y = \cos 60° = 1/2$

$\alpha_z = \cos 90° = 0$

$\beta_x = \cos 120° = -1/2$

$\beta_y = \cos 30° = \sqrt{3}/2$

$\beta_z = \cos 90° = 0$

$\boxed{\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$

$\boxed{\vec{m} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)}$

UTILIZZANDO IL TENSORE DEL PRECEDENTE ESERCIZIO:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\sigma_x \rightarrow \sigma_u$ $\quad$ $\boxed{\sigma_x'} = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y = 80\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2(-12)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \underline{45{,}858 \text{ MPa}}$

$\tau_{xy}' \rightarrow \tau_{uw}$ $\quad$ $\boxed{\tau_{xy}'} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) =$

$= 80\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - 15\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 12\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \underline{-47{,}136 \text{ MPa}}$

N.B. $\sigma_y' \rightarrow \sigma_w$ $\quad$ $\boxed{\sigma_y'} = \sigma_x \beta_x^2 + \sigma_y \beta_y^2 + 2\tau_{xy}\beta_x\beta_y = 80\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2(-12)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{13{,}142 \text{ MPa}}$

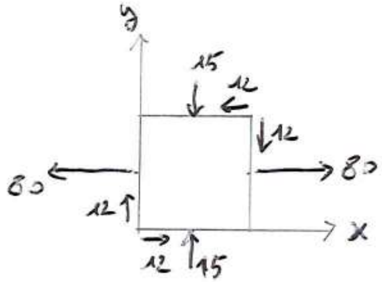
$\tau_{yx}' \rightarrow \tau_{wu}$ $\quad$ $\boxed{\tau_{xy}'} = \sigma_x \beta_x \alpha_x + \sigma_y \beta_y \alpha_y + \tau_{xy}(\beta_x\alpha_y + \beta_y\alpha_x) =$

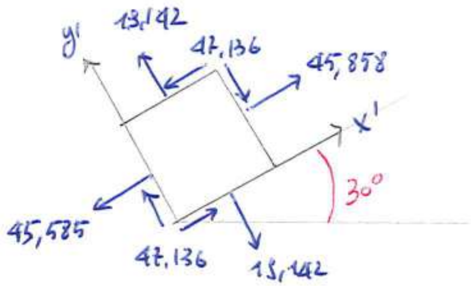
$= 80\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 15\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 12\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \underline{-47{,}136 \text{ MPa}}$

E INFATI $\boxed{\tau_{xy}' = \tau_{yx}'}$ $\quad$ $(\tau_{uw} = \tau_{wu})$

QUINDI:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{x',y',z'} = \begin{bmatrix} 45{,}858 & -47{,}136 & 0 \\ -47{,}136 & 13{,}142 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$





N.B. :

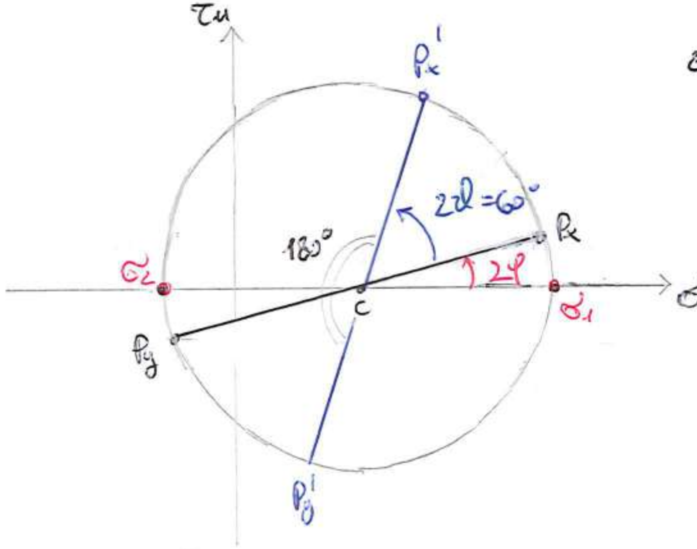
$I_1 = \sigma_x + \sigma_y = 80 - 15 = 65$

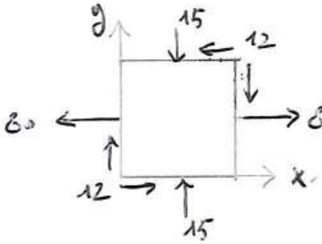
$I_1 = \sigma_x' + \sigma_y' = 45{,}858 + 13{,}142 = 65$

$I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y = 144 + 1200 = 1344$

$I_2 = \tau_{xy}'^2 - \sigma_x'\sigma_y' = 2221{,}802 - 877{,}814 = 1343{,}990 \cong 1344$

È POSSIBILE CALCOLARE LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z}$ SU UNA QUALUNQUE GIACITURA - AD ESEMPIO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x'y'z'$, IN CUI IL PIANO x',y' È RUOTATO DI 30° RISPETTO AL PIANO x,y E $z'=z$ - UTILIZZANDO I CERCHI DI MOHR





$P_x = (80; 12) \qquad P_y = (-15; -12)$

$\sigma_c = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 32,5$

$R = \overline{P_x C} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_c)^2 + \tau_{xy}^2} = 48,932$

$\sigma_1 = C + R = 81,432$ MPa $\qquad \boxed{P_1 = (81,432; 0)}$

$\sigma_2 = C - R = -16,432$ MPa $\qquad \boxed{P_2 = (-16,432; 0)}$

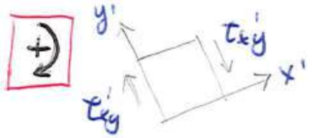
* PER RICAVARE I VALORI DELLO SFORZO SU x' E y' DOBBIAMO RUOTARE NEL PIANO DI MOHR DEL DOPPIO RISPETTO AL PIANO DELLE TENSIONI: $\theta = 30° \rightarrow 2\theta = 60°$

ALLORA L'ANGOLO TRA $P_{x'}$ E L'ASSE σ_u SARÀ PARI A $2\theta + 2\varphi = 60° + 14,177° = 74,177°$

$P_{x'} = (\sigma_u, \tau_u) \qquad \sigma_u = \sigma_c + R\cos(74,177°) = 32,5 + (48,932)(0,342) = \underline{45,858 \text{ MPa}}$

$\tau_u = R\,\text{sen}(74,177°) = 48,932\,(0,962) = \underline{47,136 \text{ MPa}}$

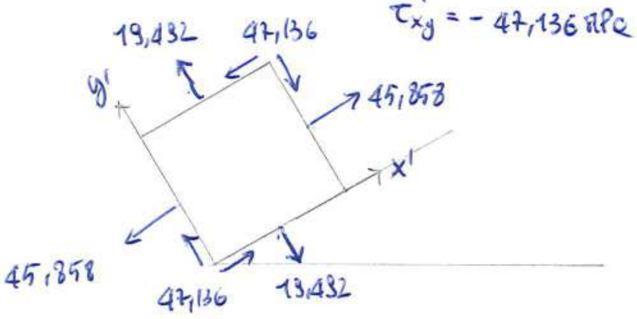
N.B.: τ_u POSITIVO → L'ELEMENTINO DEVE RUOTARE IN SENSO ORARIO: $\boxed{+}$



QUINDI NEL PIANO DELLE TENSIONI τ'_{xy} È NEGATIVO, OVVERO IN VERSO OPPOSTO RISPETTO ALL'ASSE y'

$\sigma'_x = 45,858$ MPa ← $\underline{P_{x'} = (45,858; 47,136)}$

$\tau'_{xy} = -47,136$ MPa



L'ANGOLO TRA $P_{y'}$ E L'ASSE σ_u SARÀ PARI A $2\varphi + 2\theta + 180° = 74,177° + 180° = 254,177°$

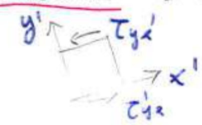
$P_{y'} = (\sigma_u, \tau_u) \qquad \sigma_u = \sigma_c + R\cos(254,177°) = 32,5 + (48,932)(-0,273) = \underline{19,142}$

$\tau_u = R\,\text{sen}(254,177°) = 48,932\,(-0,962) = \underline{-47,136 \text{ MPa}}$

NB: τ_u NEGATIVO → L'ELEMENTINO DEVE RUOTARE IN SENSO ANTIORARIO: $\boxed{-}$

$\sigma'_y = +19,432$ MPa ← $P_{y'} = (+19,432; -47,136)$

$\tau'_{yx} = -47,136$ MPa



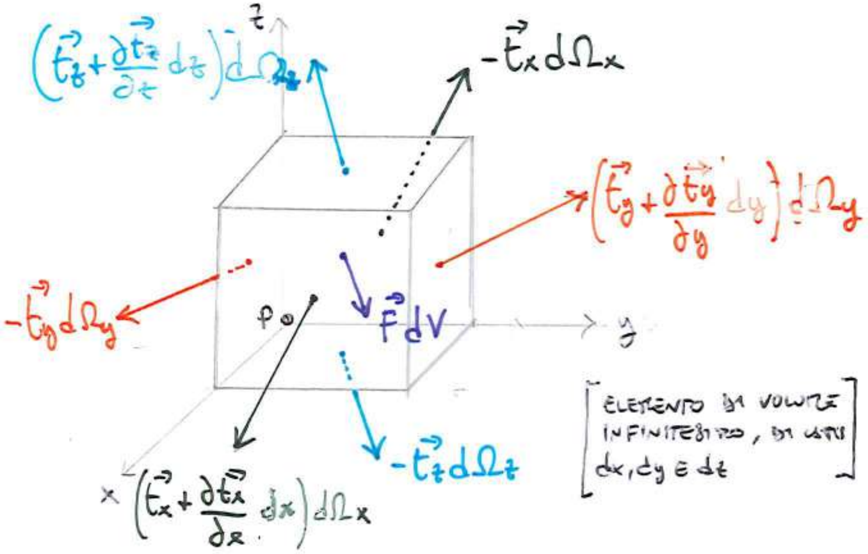
QUINDI NEL PIANO DELLE TENSIONI τ'_{yx} È NEGATIVO, OVVERO OPPOSTO RISPETTO ALL'ASSE x'

ABBIAMO DEFINITO LE PROPRIETÀ GENERALI DELLO STATO DI TENSIONE IN UN PUNTO, ED ESSO RISULTA DEFINITO NOTE LE 6 COMPONENTI DEL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$, OVVERO $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ E τ_{yz}.

COME VARIA LO STATO DI SFORZO QUANDO PASSIAMO DA UN PUNTO AD UN ALTRO?

PER DETERMINARE LO STATO DI TENSIONE IN UN CORPO, OVVERO CONOSCERE $\underline{\underline{\sigma}}$ IN OGNI PUNTO DEL CORPO, BISOGNA DEFINIRE LE FUNZIONI DELLE 6 COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$, CHE VARIANO IN TUTTO IL CORPO (RICORDANDO CHE LE TENSIONI TANGENZIALI SONO A DUE A DUE RECIPROCHE)

$$\sigma_x = \sigma_x(x,y,z)\ ;\ \sigma_y = \sigma_y(x,y,z)\ ;\ \sigma_z = \sigma_z(x,y,z)\ ;\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z)\ ;\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y,z)\ ;\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y,z)$$



N.B. $d\Omega_x = dy\,dz\ ;\ d\Omega_y = dx\,dz\ ;\ d\Omega_z = dx\,dy\ ;\ dV = dx\,dy\,dz$

PASSANDO DALLA FACCIA CHE CONTIENE P A UNA FACCIA POSTA A UNA DISTANZA INFINITESIMA dx, dy o dz SI HA UN INCREMENTO DELLA TENSIONE:

AD ESEMPIO $\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dx$ È L'INCREMENTO DI $\vec{t}_x$ SULLA FACCIA DI NORMALE x POSTA A DISTANZA dx DALLA FACCIA CONTENENTE P

PER L'EQUILIBRIO: $\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$ E $\boxed{\vec{M}_{(\cdot)} = \vec{0}}$

$$\vec{R} = \vec{0} \iff -\vec{t}_x \cancel{dy\,dz} + \vec{t}_x \cancel{dy\,dz} + \frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dx\,dy\,dz - \vec{t}_y \cancel{dx\,dz} + \vec{t}_y \cancel{dx\,dz} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} dy\,dx\,dz - \vec{t}_z \cancel{dx\,dy} + \vec{t}_z \cancel{dx\,dy} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} dz\,dx\,dy + \vec{F} dx\,dy\,dz = \vec{0}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} + \vec{F}\right) dx\,dy\,dz = \vec{0}$$

DEVE VALERE IN OGNI PUNTO DEL CORPO, QUINDI PER OGNI dV, CON $dV \neq 0$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}} \iff \boxed{\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} + \vec{F} = \vec{0}}$$

RESTA SOLO IL CONTRIBUTO DI VARIAZIONE DOVUTO AL PASSAGGIO DA UNA FACCIA ALL'ALTRA

[N.B. $\frac{\partial}{\partial i}$ È UNA DERIVATA PARZIALE: VARIAZIONE SOLO IN DIREZIONE i, CON $i = x, y, z$]

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO CHE CONTIENE I VETTORI TENSIONE $\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z$ E LA FORZA DI VOLUME $\vec{F}$

POSSIAMO SCRIVERLA PER COMPONENTI, RICORDANDO CHE $\vec{t}_x, \vec{t}_y$ E $\vec{t}_z$ SONO LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$ E $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \iff \boxed{\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z}+\vec{F}=\vec{0}} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}+F_z=0 \end{cases}$$

(columns: $\vec{t}_x$, $\vec{t}_y$, $\vec{t}_z$, $\vec{F}$)

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

$\vec{F}$ È NOTA, MA ABBIAMO 3 EQUAZIONI E 9 INCOGNITE

CON LE SOLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO NON POSSIAMO DETERMINARE IL PROBLEMA (N° INCOGNITE > N° EQUAZIONI)

IL CONTINUO È IPERSTATICO

NOTANDO CHE $\vec{t}_x$ È SEMPRE DERIVATO RISPETTO A x, $\vec{t}_y$ RISPETTO A y E $\vec{t}_z$ RISPETTO A z, POSSIAMO SCRIVERE L'EQUILIBRIO IN MANIERA COMPATTA:

t_{ij} = COMPONENTE DI $\vec{t}_i$ IN DIREZIONE $\vec{j}$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0 \quad j=1,2,3$ CON $i,j=1\to x$; $i,j=2\to y$; $i,j=3\to z$

SE SI ADOTTA LA SOMMA SOTTOINTESA SUGLI INDICI RIPETUTI POSSIAMO SCRIVERE L'EQUILIBRIO NELLA FORMA COMPATTA $\boxed{\dfrac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0}$ $\quad i,j=1,2,3$

ANCHE $\boxed{\vec{M}_{(\cdot)}=\vec{0}}$ PUÒ ESSERE ESPRESSA IN FUNZIONE DELLE COMPONENTI RISPETTO A x,y,z, COME ABBIAMO VISTO NELLA PRIMA LEZIONE E POI PER LA RELAZIONE DI CAUCHY. SI DIMOSTRA CHE:

$$\boxed{\vec{M}=\vec{0}} \iff \begin{cases} M_{(\cdot)x}=0 \\ M_{(\cdot)y}=0 \\ M_{(\cdot)z}=0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} \tau_{yz}=\tau_{zy} \\ \tau_{xz}=\tau_{zx} \\ \tau_{xy}=\tau_{yx} \end{matrix}}$$

RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI

SISTEMA DI 3 EQUAZIONI ALGEBRICHE

ANCHE QUESTE EQUAZIONI POSSONO ESSERE ESPRESSE IN FORMA COMPATTA: $\boxed{\tau_{ij}=\tau_{ji}}$

QUINDI, L'EQUILIBRIO RICHIEDE CHE:

$$\vec{R}=\vec{0} \iff \boxed{\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0} \quad \text{EQUILIBRIO INTERNO}$$

$$\vec{M}_{(\cdot)}=\vec{0} \iff \boxed{\tau_{ij}=\tau_{ji}} \quad \text{CONDIZIONI DI RECIPROCITÀ}$$

6 INCOGNITE

3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

3 EQUAZIONI ALGEBRICHE

LA DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO RICHIEDE DI CONOSCERE IN OGNI PUNTO LE FUNZIONI INCOGNITE:

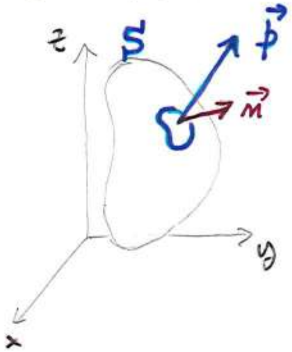
$$\begin{aligned} &\sigma_x=\sigma_x(x,y,z) && \tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y,z) \leftrightarrow \tau_{yx}=\tau_{yx}(x,y,z) \\ &\sigma_y=\sigma_y(x,y,z) && \tau_{xz}=\tau_{xz}(x,y,z) \leftrightarrow \tau_{zx}=\tau_{zx}(x,y,z) \\ &\sigma_z=\sigma_z(x,y,z) && \tau_{yz}=\tau_{yz}(x,y,z) \leftrightarrow \tau_{zy}=\tau_{zy}(x,y,z) \end{aligned}$$

CHE DEVONO SODDISFARE NEI PUNTI INTERNI:

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0$$

E RISPETTARE LA CONDIZIONE $\tau_{ij}=\tau_{ji}$

Sulla superficie di contorno S del corpo deve essere soddisfatta la relazione di Cauchy: $\vec{t}_x \alpha_x + \vec{t}_y \alpha_y + \vec{t}_z \alpha_z = \vec{t}_n$



Nei punti esterni del corpo, se $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ è il vettore rappresentante la forza di superficie (per unità di area) esterna, allora il vettore $\vec{t}_n$ sulla giacitura di normale $\vec{n}$ appartenente a S coincide proprio con $\vec{p}$:

$$t_{nx} = p_x \qquad t_{ny} = p_y \qquad t_{nz} = p_z$$

Allora per la relazione di Cauchy in ogni punto della superficie S che contorna il corpo devono essere soddisfatte le 3 relazioni:

$$\begin{array}{cccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z & \vec{p} \end{array}$$

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z = p_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z = p_y \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z = p_z \end{cases}$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AL CONTORNO

(EQUILIBRIO ESTERNO)

Dove $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sono i coseni direttori della normale esterna $\vec{n}$ del generico punto di S

In forma compatta: $\boxed{t_{ij} n_i = p_i}$ $\quad i = 1,2,3$

N.B. Le condizioni di equilibrio interno ed equilibrio esterno sono condizioni necessarie ma non sufficienti per la definizione dello stato tensionale in un corpo di cui siano assegnate le forze superficiali $\vec{p}$ e di massa $\vec{F}$

CONTINUO IPERSTATICO

Le ulteriori condizioni non possono che trarsi tenendo in gioco le deformazioni che il corpo subisce per effetto delle tensioni

CONTINUO DEFORMABILE

NOTA 1. SVILUPPO DEL DETERMINANTE DI $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}})$.

RISULTA:

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix}$$

SE ORA SI SVILUPPA IL DETERMINANTE RISPETTO AGLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA SI HA: $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) =$

$$(\sigma_x - \sigma_n) \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} - \tau_{yx} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} + \tau_{zx} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA E' DISPARI!

NE SEGUE

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = (\sigma_x - \sigma_n)\left[(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{zy}\right] - \tau_{yx}\left[\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{xz}\tau_{zy}\right] + $$
$$+ \tau_{zx}\left[\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n)\right]$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = (\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - (\sigma_x - \sigma_n)\tau_{yz}\tau_{zy} - \tau_{xy}\tau_{yx}(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xz}\tau_{zy}\tau_{yx} +$$
$$+ \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{zx}\tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n)$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \left[\sigma_x\sigma_y - \sigma_n(\sigma_y + \sigma_x) + \sigma_n^2\right](\sigma_z - \sigma_n) - \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} + \sigma_n\tau_{yz}\tau_{zy} - \sigma_z\tau_{xy}\tau_{yx} +$$
$$+ \sigma_n\tau_{xy}\tau_{yx} + (\tau_{xz}\tau_{zy}\tau_{yx} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz}) - \sigma_y(\tau_{zx}\tau_{xz}) + \sigma_n\tau_{zx}\tau_{xz}$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_n\sigma_x\sigma_y - \sigma_n\sigma_y\sigma_z - \sigma_n\sigma_x\sigma_z + \sigma_n^2(\sigma_y + \sigma_x) + \sigma_n^2\sigma_z - \sigma_n^3 +$$
$$- \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} + \sigma_n\tau_{yz}\tau_{zy} - \sigma_z\tau_{xy}\tau_{yx} + \sigma_n\tau_{xy}\tau_{yx} + (\tau_{xz}\tau_{zy}\tau_{yx} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz}) +$$
$$- \sigma_y\tau_{zx}\tau_{xz} + \sigma_n\tau_{zx}\tau_{xz}.$$

RICORDANDO ORA CHE $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ SI PUÒ RISCRIVERE COME:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_n(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \sigma_n^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma_n^3 +$$
$$- \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_n\tau_{yz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + \sigma_n\tau_{xy}^2 + 2(\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) +$$
$$- \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_n\tau_{zx}^2$$

SE ORA SI RACCOLGONO I TERMINI IN σ_n E POI SI ORDINA LO SVILUPPO PER POTENZE

DECRESCENTI DI σ_n SI TROVA:

$$\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}\right) = -\sigma_n^3 + \sigma_n^2 \overbrace{\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)}^{I_1} + \sigma_n \overbrace{\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2-\sigma_x\sigma_y-\sigma_x\sigma_z-\sigma_y\sigma_z\right)}^{I_2} + \underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \left(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{zx}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2\right)}_{I_3}$$

SI OTTIENE QUINDI IL POLINOMIO CARATTERISTICO.

$$\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}\right) = -\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n + I_3 .$$

NE SEGUE CHE LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DI AUTOSOLUZIONI, $\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}\right) = 0$ COMPORTA

$$\boxed{\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0}$$

EQUAZIONE CUBICA A COEFFICIENTI REALI. $\square$

<u>NOTA 2.</u> GLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE <u>REALE SIMMETRICA</u> SONO REALI.

SIA $[A]$ UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE N SIMMETRICA - CIOÈ TALE CHE $[A] = [A]^T$ - E A COEFFICIENTI REALI.

SE λ È UN AUTOVALORE, ALLORA SODDISFA L'EQUAZIONE

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\} \qquad [I]$$

DOVE $\{x\}$ È IL CORRISPONDENTE AUTOVETTORE.

IN GENERALE, L'AUTOVALORE POTREBBE ESSERE COMPLESSO, CIOÈ $\lambda = a + ib$, CON $a, b \in \mathbb{R}$ E i UNITÀ IMMAGINARIA, $i = \sqrt{-1}$ (OVVERO $i^2 = -1$).

SI DENOTA CON $\bar{\lambda} = a - ib$ IL COMPLESSO CONIUGATO DI λ.

ANALOGAMENTE, LE COMPONENTI DEL VETTORE COLONNA $\{x\}$ POSSONO ESSERE NUMERI COMPLESSI:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} y_1 + iz_1 \\ y_2 + iz_2 \\ \vdots \\ y_N + iz_N \end{Bmatrix} \qquad \text{CON } y_1, y_2, \dots, y_N; z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}.$$

ALLORA $\{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} y_1 - iz_1 \\ y_2 - iz_2 \\ \vdots \\ y_N - iz_N \end{Bmatrix}$

D'ALTRA PARTE $\overline{\lambda\{x\}} = \bar{\lambda}\{\bar{x}\}$, MENTRE $[A] = [\bar{A}] = [A]^T$, SICCHÉ $\overline{[A]\{x\}} = [\bar{A}]\{\bar{x}\} = [A]\{\bar{x}\}$

MA ALLORA SE SI CONSIDERA LA CONTROPARTE COMPLESSA CONIUGATA DELLA [I] SI HA:

$$\overline{[A]\{x\} = \lambda\{x\}} \Rightarrow [A]\{\bar{x}\} = \bar{\lambda}\{\bar{x}\} \quad [2]$$

SE SI PREMOLTIPLICA LA [1] PER $\{\bar{x}\}^T$ E LA [2] PER $\{x\}^T$ SI OTTIENE:

$$\{\bar{x}\}^T[A]\{x\} = \{\bar{x}\}^T\lambda\{x\} \quad [1']$$

$$\{x\}^T[A]\{\bar{x}\} = \{x\}^T\bar{\lambda}\{\bar{x}\} \quad [2']$$

D'ALTRA PARTE PER LA PROPRIETA' DEL PRODOTTO DI MATRICI TRASPOSTE SI HA, DALLA [2'] (SI NOTI: LA TRASPOSTA DEL PRODOTTO È EGUALE AL PRODOTTO DELLE TRASPOSTE, PRESE IN ORDINE INVERSO):

$$\left(\{x\}^T[A]\{\bar{x}\}\right)^T = \left(\{x\}^T\bar{\lambda}\{\bar{x}\}\right)^T \Rightarrow \{\bar{x}\}^T[A]^T\{x\} = \{\bar{x}\}^T\bar{\lambda}\{x\}$$

E POICHE' $[A]^T = [A]$ SI RICAVA

$$\{\bar{x}\}^T[A]\{x\} = \{\bar{x}\}^T\bar{\lambda}\{x\} \quad [2'']$$

DOVE IL PRIMO MEMBRO COINCIDE CON QUELLO DELLA [1']; NE SEGUE CHE DEVONO COINCIDERE ANCHE I SECONDI MEMBRI:

$$\{\bar{x}\}^T\lambda\{x\} = \{\bar{x}\}^T\bar{\lambda}\{x\} \Rightarrow \lambda\{\bar{x}\}^T\{x\} = \bar{\lambda}\{\bar{x}\}^T\{x\}$$

MA $\{\bar{x}\}^T\{x\} = \left[(y_1 - iz_1)(y_1 + iz_1) + (y_2 - iz_2)(y_2 + iz_2) + \dots (y_N - iz_N)(y_N + iz_N)\right] =$

$$= \left[(y_1^2 + z_1^2) + (y_2^2 + z_2^2) + \dots + (y_N^2 + z_N^2)\right] = k, \in \mathbb{R} > 0.$$

PERTANTO $\lambda k = \bar{\lambda} k \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})k = 0$ E CIÒ COMPORTA $\lambda = \bar{\lambda}$, CIOÈ $\lambda \in \mathbb{R}$, IN QUANTO SE $a + ib = a - ib$ SEGUE $b = 0$ E IL NUMERO "COMPLESSO" λ HA PARTE IMMAGINARIA NULLA. INOLTRE POICHÉ $\{x\}$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE A COEFFICIENTI REALI $([A] - \lambda[I])\{x\} = \{0\}$ ANCHE $\{x\}$ È REALE □

NOTA 3. RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0$.

LA FORMULA RISOLVENTE DELLA GENERICA EQUAZIONE CUBICA A COEFFICIENTI REALI:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1,2,3)$$

DATA NEL 1515 DA SCIPIONE DAL FERRO E PUBBLICATA DA GIROLAMO CARDANO RICHIEDE DI DEFINIRE QUESTE QUANTITA':

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}; \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}; \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

A SECONDA DEL SEGNO DEL DISCRIMINANTE $\Delta = Q^3 + R^2$ SI HANNO QUESTI 3 CASI: 4

1) $\Delta > 0$: UNA RADICE È REALE, LE ALTRE 2 SONO COMPLESSE CONIUGATE.

2) $\Delta = 0$: TUTTE LE RADICI SONO REALI; ALMENO 2 SONO COINCIDENTI

3) $\Delta < 0$: TUTTE LE RADICI SONO REALI E DISTINTE

LE SOLUZIONI SONO:

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3} a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\,(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\,(S-T)$$

SI OSSERVI CHE ANCHE NEL CASO 3) IN CUI LE RADICI SONO TUTTE REALI LA FORMULA RISOLVENTE RICHIEDE L'USO DI NUMERI COMPLESSI.

NEL CASO IN ESAME È: $a_1 = -72$; $a_2 = 324$; $a_3 = 34992$.

SEGUE POI:

$Q = -468$; $R = -7560$; $\Delta = -45'349'632 < 0 \Rightarrow$ 3 RADICI REALI DISTINTE!

$$S = \sqrt[3]{-7560 + 3888 i\sqrt{3}}$$

$$T = \sqrt[3]{-7560 - 3888 i\sqrt{3}}$$

PERTANTO $x_1 = 54 \Rightarrow \sigma_1 = 54$ MPa

$x_2 = 36 \Rightarrow \sigma_2 = 36$ MPa

$x_3 = -18 \Rightarrow \sigma_3 = -18$ MPa $\square$

NOTA 4 CALCOLO DELLE DIREZIONI PRINCIPALI (E DETERMINAZIONE DEGLI ASSI PRINCIPALI DI SFORZO).

PER QUANTO VISTO, QUANDO GLI SFORZI PRINCIPALI SONO DISTINTI, LE DIREZIONI PRINCIPALI SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE E RISULTANO FRA LORO ORTOGONALI; GLI ASSI PRINCIPALI NON SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATI; TUTTAVIA SE SI FISSANO AD ARBITRIO I VERSI DI 2 DIREZIONI PRINCIPALI, INDIVIDUANDO COSÌ 2 ASSI PRINCIPALI, SI HA CHE IL VERSO DEL TERZO ASSE È UNIVOCAMENTE INDIVIDUATO DALLA CONDIZIONE CHE I TRE ASSI FORMINO UNA <u>TERNA DESTRA</u>, COSÌ DA POTERE "COMBACIARE", MEDIANTE UNA ROTAZIONE RIGIDA, CON GLI ASSI X, Y, Z.
SE INVECE SI FISSA IL VERSO DEL TERZO ASSE COSÌ DA FORMARE UNA TERNA SINISTRA NON È POSSIBILE RIPORTARLI, CON UNA ROTAZIONE RIGIDA,

AL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE DI PARTENZA

SIA $\vec{n}_1 = \{\alpha_{1x}, \alpha_{1y}, \alpha_{1z}\}$ LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLO SFORZO PRINCIPALE σ_1,
SIA $\vec{n}_2 = \{\alpha_{2x}, \alpha_{2y}, \alpha_{2z}\}$ LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLO SFORZO PRINCIPALE σ_2,
SIA $\vec{n}_3 = \{\alpha_{3x}, \alpha_{3y}, \alpha_{3z}\}$ LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLO SFORZO PRINCIPALE σ_3.

GLI SFORZI PRINCIPALI SONO STATI "ETICHETTATI" COSÌ CHE RISULTI $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

PER DETERMINARE $\vec{n}_1$ SI RISOLVE IL SISTEMA DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n)\alpha_{1x} + \tau_{yx}\alpha_{1y} + \tau_{zx}\alpha_{1z} = 0 \\ \tau_{xy}\alpha_{1x} + (\sigma_y - \sigma_n)\alpha_{1y} + \tau_{zy}\alpha_{1z} = 0 \\ \tau_{xz}\alpha_{1x} + \tau_{yz}\alpha_{1y} + (\sigma_z - \sigma_n)\alpha_{1z} = 0 \end{cases} \qquad [3]$$

QUANDO SI SOSTITUISCE $\sigma_n = \sigma_1$.

IN TAL CASO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DIVENTA SINGOLARE E IL SISTEMA [3] NON PUÒ ESSERE RISOLTO. SI SCARTA ALLORA UNA DELLE EQUAZIONI, PER ESEMPIO LA TERZA, E SI DETERMINANO DUE INCOGNITE IN FUNZIONE DELLA TERZA; AGGIUNGENDO POI LA CONDIZIONE CHE $|\vec{n}_1| = 1 \iff \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1$ SI GIUNGE A DEFINIRE, <u>A MENO DEL SEGNO</u> IL VETTORE $\vec{n}_1$.

L'AMBIGUITA' DI SEGNO È LEGATA AL FATTO CHE UNA DIREZIONE PRINCIPALE NON FORNISCE INDICAZIONI IN MERITO A QUEST'ULTIMO. SE SI FISSA ARBITRARIAMENTE IL SEGNO SI GIUNGE A DEFINIRE L'ASSE PRINCIPALE "1", ORIENTATO COME $\vec{n}_1$.

OPERATIVAMENTE SI HA:

$$\begin{cases} (38-54)\alpha_{1x} + 6\sqrt{2}\,\alpha_{1y} - 14\sqrt{2}\,\alpha_{1z} = 0 \\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{1x} + (45-54)\alpha_{1y} - 3\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{16}^{\,8}\alpha_{1x} + \cancel{6}^{\,3}\sqrt{2}\,\alpha_{1y} - \cancel{14}^{\,7}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} = 0 \\ \cancel{6}^{\,2}\sqrt{2}\,\alpha_{1x} - \cancel{9}^{\,3}\alpha_{1y} - \cancel{3}^{\,1}\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8\alpha_{1x} + 3\sqrt{2}\,\alpha_{1y} - 7\sqrt{2}\,\alpha_{1z} = 0 \\ 2\sqrt{2}\,\alpha_{1x} - 3\alpha_{1y} - \alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7}{8}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ 2\sqrt{2}\left[\frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7}{8}\sqrt{2}\,\alpha_{1z}\right] - 3\alpha_{1y} - \alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7}{8}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ \left(\frac{3}{2} - 3\right)\alpha_{1y} - \left(\frac{7}{2} + 1\right)\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{1z} \\ -\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{2}}\alpha_{1y} - \frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{2}}\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{1z} \\ \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x} = \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = -\frac{\cancel{16}^{\,2}}{\cancel{8}}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = -2\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

UTILIZZANDO ORA L'ULTIMA EQUAZIONE SI OTTIENE:

$$\left(-2\sqrt{2}\,\alpha_{1z}\right)^2+\left(-3\alpha_{1z}\right)^2+\alpha_{1z}^2=1 \Rightarrow 8\alpha_{1z}^2+9\alpha_{1z}^2+\alpha_{1z}^2=1 \Rightarrow 18\alpha_{1z}^2=1$$

SI OTTIENE COSÌ: $\alpha_{1z}^2=\frac{1}{18} \Rightarrow \alpha_{1z}=\pm\frac{1}{\sqrt{18}}=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

SE SI SCEGLIE LA SOLUZIONE POSITIVA, $\alpha_{1z}=+\sqrt{2}/6$ SI OTTIENE:

$$\alpha_{1x}=-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=-\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}}=-\frac{2}{3}\;;\quad \alpha_{1y}=-\cancel{3}^{\,1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{6}_{\,2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

PERTANTO $\vec{n}_1=\left\{-\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{6}\right\}$

PER LA SECONDA DIREZIONE PRINCIPALE SI SOSTITUISCONO $\sigma_n=\sigma_2$ E $\alpha_{2x},\alpha_{2y},\alpha_{2z}$ A $\alpha_{1x},\alpha_{1y},\alpha_{1z}$ NELLA [3] E SI PROCEDE IN MODO ANALOGO. SI TROVA:

$$\begin{cases}(38-36)\alpha_{2x}+6\sqrt{2}\alpha_{2y}-14\sqrt{2}\alpha_{2z}=0\\ 6\sqrt{2}\alpha_{2x}+(45-36)\alpha_{2y}-3\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cancel{2}^{\,1}\alpha_{2x}+\cancel{6}^{\,3}\sqrt{2}\alpha_{2y}-\cancel{14}^{\,7}\sqrt{2}\alpha_{2z}=0\\ \cancel{6}^{\,2}\sqrt{2}\alpha_{2x}+\cancel{9}^{\,3}\alpha_{2y}-\cancel{3}^{\,1}\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_{2x}+3\sqrt{2}\alpha_{2y}-7\sqrt{2}\alpha_{2z}=0\\ 2\sqrt{2}\alpha_{2x}+3\alpha_{2y}-\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ 2\sqrt{2}\left(-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\right)+3\alpha_{2y}-\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ (-12+3)\alpha_{2y}+(28-1)\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ -\cancel{9}^{\,1}\alpha_{2y}+\cancel{27}^{\,3}\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ \alpha_{2y}=3\alpha_{2z}\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_{2x}=\left(-9\sqrt{2}+7\sqrt{2}\right)\alpha_{2z}\\ \alpha_{2y}=3\alpha_{2z}\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-2\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ \alpha_{2y}=3\alpha_{2z}\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

DALL'ULTIMA EQUAZIONE SI RICAVA:

$$\left(-2\sqrt{2}\,\alpha_{2z}\right)^2+\left(3\alpha_{2z}\right)^2+\alpha_{2z}^2=1 \Rightarrow 8\alpha_{2z}^2+9\alpha_{2z}^2+\alpha_{2z}^2=1 \Rightarrow 18\alpha_{2z}^2=1$$

OVVERO $\alpha_{2z}^2=\frac{1}{18} \Rightarrow \alpha_{2z}=\pm\frac{1}{\sqrt{18}} \Rightarrow \alpha_{2z}=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

E SE SI SCEGLIE ANCORA LA DIREZIONE POSITIVA, $\alpha_{2z}=+\frac{\sqrt{2}}{6}$ SI OTTIENE:

$$\alpha_{2x}=-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=-\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}}=-\frac{2}{3}\;;\quad \alpha_{2y}=\cancel{3}^{\,1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{6}_{\,2}}=+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

PERTANTO $\vec{n}_2 = \left\{ -\frac{2}{3}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{6} \right\}$.

SI OSSERVI CHE $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) = +\frac{4}{9} - \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}} + \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,18}} =$

$= \frac{4}{9} - \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{8-9+1}{18} = 0$

PERTANTO $\vec{n}_1$ E $\vec{n}_2$ SONO $\perp$.

PER DETERMINARE $\vec{n}_3$ SI POTREBBE NUOVAMENTE PARTIRE DALLE [3], SOSTITUENDO $\sigma_n = \sigma_3$ E PONENDO $\alpha_{3x}, \alpha_{3y}, \alpha_{3z}$ IN LUOGO DI $\alpha_{1x}, \alpha_{1y}, \alpha_{1z}$.
TUTTAVIA QUESTA VOLTA IL VERSO DI $\vec{n}_3$ <u>NON</u> PUÒ ESSERE SCELTO ARBITRARIAMENTE, SE SI VUOLE CHE $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ FORMINO UNA TERNA DESTRA.

CONVIENE ALLORA PARTIRE DA QUI E DETERMINARE $\vec{n}_3$ CON LA CONDIZIONE:

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 .$$

COSÌ FACENDO SI HA:

$$\vec{n}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix} = +\vec{i} \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

DUNQUE $\vec{n}_3 = \vec{i}\left(-\frac{2}{12} - \frac{2}{12}\right) - \vec{j}\left(-\cancel{\frac{2\sqrt{2}}{18}} + \cancel{\frac{2\sqrt{2}}{18}}\right) + \vec{k}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

PERTANTO $\vec{n}_3 = -\frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,3}}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k}$

NE SEGUE $\vec{n}_3 = \left\{ -\frac{1}{3}, 0, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right\}$.

IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI PRODOTTO VETTORIALE $\vec{n}_3$ RISULTA $\perp$ A $\vec{n}_1$ E A $\vec{n}_2$; È INOLTRE DI MODULO UNITARIO IN QUANTO

$$\vec{n}_3 \times \vec{n}_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = \frac{\cancel{9}^{\,1}}{\cancel{9}_{\,1}} = 1$$

SI LASCIA COME ESERCIZIO VERIFICARE CHE LE PRIME 2 EQUAZIONI [3] RISULTANO IDENTICAMENTE SODDISFATTE:

$$\begin{cases} [38-(-18)]\,\alpha_{3x} + 6\sqrt{2}\,\alpha_{3y} - 14\sqrt{2}\,\alpha_{3z} = 0 \\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{3x} + (45-(-18))\,\alpha_{3y} - 3\alpha_{3z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 56\,\alpha_{3x} + 6\sqrt{2}\,\alpha_{3y} - 14\sqrt{2}\,\alpha_{3z} = 0 \\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{3x} + 63\,\alpha_{3y} - 3\alpha_{3z} = 0 \end{cases}$$

□

NOTA 5 SVILUPPO DELLE EQUAZIONI PER LA COSTRUZIONE DEI CERCHI DI MOHR.

LE EQUAZIONI CHE COSTITUISCONO IL SISTEMA DA RISOLVERE RISPETTO ALLE INCOGNITE $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ SONO LE SEGUENTI:

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = 1-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_1(1-\alpha_2^2-\alpha_3^2) + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 \\ \sigma_n^2+\tau_n^2 = \sigma_1^2(1-\alpha_2^2-\alpha_3^2) + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 1-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \quad [**] \\ \sigma_n = \sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\alpha_2^2 + (\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2 \\ \sigma_n^2+\tau_n^2 = \sigma_1^2 + (\sigma_2^2-\sigma_1^2)\alpha_2^2 + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 1-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \\ (\sigma_n-\sigma_1) = (\sigma_2-\sigma_1)\alpha_2^2 + (\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2 \\ (\sigma_n^2-\sigma_1^2)+\tau_n^2 = (\sigma_2^2-\sigma_1^2)\alpha_2^2 + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ SE $\underline{(\sigma_2-\sigma_1) \neq 0}$ SI TROVA:

$$\alpha_2^2 = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)-(\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2}{(\sigma_2-\sigma_1)} \quad [*]$$

SOSTITUENDO NELL'ULTIMA EQUAZIONE SI TROVA:

$$(\sigma_n^2-\sigma_1^2)+\tau_n^2 = (\sigma_2^2-\sigma_1^2)\,\frac{(\sigma_n-\sigma_1)-(\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2}{(\sigma_2-\sigma_1)} + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2$$

MA $(\sigma_2^2-\sigma_1^2) = (\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1)$ PERTANTO:

$$(\sigma_n^2-\sigma_1^2)+\tau_n^2 = \cancel{(\sigma_2-\sigma_1)}(\sigma_2+\sigma_1)\,\frac{(\sigma_n-\sigma_1)-(\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2}{\cancel{(\sigma_2-\sigma_1)}} + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2$$

SIMILMENTE:

$$(\sigma_n^2-\sigma_1^2) = (\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n+\sigma_1)$$

PER CUI:

$$(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n+\sigma_1)+\tau_n^2 = (\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1) - (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1)\alpha_3^2 + (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3+\sigma_1)\alpha_3^2$$

$$(\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_n+\cancel{\sigma_1}) - (\sigma_2+\cancel{\sigma_1})\right]+\tau_n^2 = (\sigma_3-\sigma_1)\left[(\sigma_3+\cancel{\sigma_1}) - (\sigma_2+\cancel{\sigma_1})\right]\alpha_3^2$$

$$(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^2 = (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)\alpha_3^2$$

SE $\underline{(\sigma_3-\sigma_1) \neq 0}$ E $\underline{(\sigma_3-\sigma_2) \neq 0}$ SI TROVA:

$$\boxed{\alpha_3^2 = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}} \quad [4]$$

SE SI SOSTITUISCE NELLA [*] SI TROVA:

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_1)} - \frac{\cancel{(\sigma_3-\sigma_1)}}{(\sigma_2-\sigma_1)}\,\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}}{\cancel{(\sigma_3-\sigma_1)}(\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{\sigma_n-\sigma_1}{(\sigma_2-\sigma_1)} - \left[\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}\right]$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2) - \left[(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}\right]}{(\sigma_2-\sigma_1)\,(\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\cancel{\sigma_2})-(\sigma_n-\cancel{\sigma_2})\right]-\tau_n^{\,2}}{(\sigma_2-\sigma_1)\,(\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{-(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)-\tau_n^{\,2}}{(\sigma_2-\sigma_1)\,(\sigma_3-\sigma_2)} = -\,\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_1)} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)}$$

DUNQUE

$$\boxed{\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)}} \qquad [5]$$

SI SOSTITUISCE INFINE NELLA [**]:

$$\alpha_1^{\,2} = 1 - \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)} - \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)\cdot(\sigma_3-\sigma_1)\right] - (\sigma_3-\sigma_1)\left[(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_1-\sigma_2)\left[(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)\,.\,(\sigma_3-\sigma_1)\right]}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1) - \tau_n^{\,2}\left[(\sigma_3-\cancel{\sigma_1})+(\cancel{\sigma_1}-\sigma_2)\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_2)\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[\sigma_3\sigma_n - \cancel{\sigma_1\sigma_n} - \sigma_3^{\,2} + \sigma_1\sigma_3 + \cancel{\sigma_1\sigma_n} - \sigma_2\sigma_n - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^{\,2}\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\sigma_2)\sigma_n - (\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3+\sigma_2) + \sigma_1(\sigma_3-\sigma_2)\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\sigma_2)\,(\sigma_n-\sigma_3-\sigma_2+\sigma_1)\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\left[\cancel{(\sigma_3-\sigma_2)}\right]\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^2-(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3-\sigma_2+\sigma_1)\right]}{\cancel{(\sigma_3-\sigma_2)}(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\cancel{\sigma_1\sigma_3}-\sigma_2\sigma_3-\cancel{\sigma_1^2}+\cancel{\sigma_1\sigma_2}-\tau_n^2-\sigma_n^2+\cancel{\sigma_1\sigma_n}+\sigma_3\sigma_n-\cancel{\sigma_1\sigma_3}+\sigma_2\sigma_n-\cancel{\sigma_1\sigma_2}-\cancel{\sigma_1\sigma_n}+\cancel{\sigma_1^2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{-\sigma_2\sigma_3-\sigma_n^2+\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)-\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{-(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)-\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = -\frac{(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$ O, ANCHE:

$$\boxed{\alpha_1^2 = \frac{(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}} \quad [6]$$

SI OSSERVI ORA CHE:

$$(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3) = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3. \quad [\circ]$$

D'ALTRA PARTE È ANCHE

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\cancel{\frac{\sigma_2^2}{4}}+\cancel{\frac{\sigma_3^2}{4}}+\frac{\sigma_2\sigma_3}{2}-\cancel{\frac{\sigma_2^2}{4}}-\cancel{\frac{\sigma_3^2}{4}}+\frac{\sigma_2\sigma_3}{2}$$

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3. \quad [\circ\circ]$$

DALL'EGUAGLIANZA DEI SECONDI MEMBRI DELLE [∘] E [∘∘] SEGUE L'EGUAGLIANZA DEI PRIMI MEMBRI:

$$(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3) = \left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2.$$

IL NUMERATORE DELLA [6] (E SIMILMENTE, CON LE DEBITE SOSTITUZIONI, QUELLI DELLA [5] E DELLA [4]) PUÒ ESSERE SCRITTO NELLA FORMA:

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau_n^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2. \quad [+]$$

EGUAGLIATO A ZERO LA [+] RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$ E RAGGIO $\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$.

NOTA 6.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CUBICA

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

DOVE $a_1 = -72$; $a_2 = 324$; $a_3 = 34992$

LE SOLUZIONI SONO DATE DA:

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3} a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{2} i \sqrt{3}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{2} i \sqrt{3}(S-T)$$

DOVE $S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$ $\qquad Q = \dfrac{3a_2 - a_1^2}{9}$

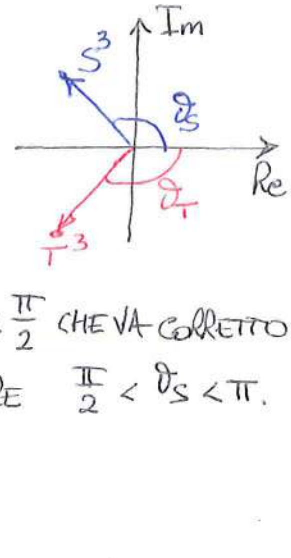
$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$ $\qquad R = \dfrac{9a_1 a_2 - 27 a_3 - 2a_1^3}{54}$

$$\Delta = Q^3 + R^2$$

NEL CASO IN ESAME:

$Q = -468$; $R = -7560$; $\Delta = -45\,349\,632 < 0 \Rightarrow$ 3 RADICI REALI DISTINTE!

$$S^3 = -7560 + i\, 3888\sqrt{3} = \rho_S (\cos\vartheta_S + i \sin\vartheta_S)$$



$$\rho_S = \sqrt{(-7560)^2 + (3888\sqrt{3})^2} = 2808\sqrt{13}$$

$$\vartheta_S = \pi - \arctan\left(\frac{3888\sqrt{3}}{+7560}\right) = 138°,306$$

LA FUNZIONE arctan RESTITUISCE UN VALORE NELL'INTERVALLO $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ CHE VA CORRETTO IN QUANTO, ESSENDO $\sin\vartheta_S > 0$ E $\cos\vartheta_S < 0$ ϑ_S DEVE RISULTARE $\frac{\pi}{2} < \vartheta_S < \pi$.

$$T^3 = -7560 - i\, 3888\sqrt{3} = \rho_T (\cos\vartheta_T + i \sin\vartheta_T)$$

$$\rho_T = \sqrt{(-7560)^2 + (-3888\sqrt{3})^2} = 2808\sqrt{13}$$

$$\vartheta_T = -\pi + \arctan\left(\frac{+3888\sqrt{3}}{+7560}\right) = -138°,306$$

DI NUOVO IL VALORE FORNITO DALLA FUNZIONE arctan NELL'INTERVALLO $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ DEVE ESSERE CORRETTO; ESSENDO $\sin\vartheta_T < 0$, $\cos\vartheta_T < 0$, ϑ_T DEVE RISULTARE $-\pi < \vartheta_T < -\frac{\pi}{2}$

SEGUE POI:

$$S = \rho_S^{1/3}\left(\cos\frac{\vartheta_S}{3} + i \sin\frac{\vartheta_S}{3}\right) = 6\sqrt{13}\,(0{,}693375 + i\, 0{,}720577) = 15 + i\, 15{,}5885$$

$$T = \rho_T^{1/3}\left(\cos\frac{\vartheta_T}{3} + i\sin\frac{\vartheta_T}{3}\right) = 6\sqrt{13}\,(0.693375 - i\,0.720577) = 15 - i\,15.5885$$

PERTANTO:

$$S+T = (15 + i\,\cancel{15.5885}) + (15 - i\,\cancel{15.5885}) = 30$$

$$S-T = (\cancel{15} + i\,15.5885) - (\cancel{15} - i\,15.5885) = i\,31.1769$$

$$i\sqrt{3}(S-T) = i^2\,31.1769 \cdot \sqrt{3} = (-1)\cdot 54 = -54$$

$$\frac{1}{3}a_1 = -\frac{72}{3} = -24$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$x_1 = S+T - \frac{1}{3}a_1 = 30 - (-24) = 54$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}(30) - (-24) - \frac{1}{2}(-54) = -15 + 24 + 27 = 36$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}(30) - (-24) + \frac{1}{2}(-54) = -15 + 24 - 27 = -18$$

$\square$

NOTA 7 DETERMINAZIONE DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI SFORZO PER UNO STATO DI SFORZO PIANO.

SI CONSIDERI IL PROBLEMA GIA' ESAMINATO A PAG. 20.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(TENSIONI ESPRESSE IN MPa.)}$$

$$\vec{t}_x \quad \vec{t}_y \quad \vec{t}_z$$

LO STATO DI SFORZO È PIANO, E POICHÉ $\vec{t}_z = \vec{0}$ SI HA CHE LA DIREZIONE Z È DIREZIONE PRINCIPALE: SU UN PIANO ORTOGONALE ALL'ASSE Z, INFATTI NON SI HANNO TENSIONI TANGENZIALI.

PER IL CALCOLO DEGLI SFORZI PRINCIPALI SI DETERMINANO I COEFFICIENTI DELL'EQ. CARATTERISTICA:

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

CON $I_1 = tr(\underline{\underline{\sigma}}) = 80 + (-15) = +65$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - [tr(\underline{\underline{\sigma}})]^2 \right] = \frac{1}{2}\left\{ \overbrace{(6544+369)}^{6913} - \overbrace{(65)^2}^{4225} \right\} = 1344$$

IN QUANTO

$$\underline{\underline{\sigma}}^2 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{80^2 + (-12)^2}^{6544} & \overbrace{80\cdot(-12)+(-12)(-15)}^{-780} & 0 \\ \underbrace{(-12)(80)+(-15)(-12)}_{-780} & \underbrace{(-12)^2+(-15)^2}_{369} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = 0$$

SI OTTIENE QUINDI:

$$\sigma_n^3 - 65\sigma_n^2 - 1344\sigma_n = 0$$

$$\sigma_n \left[\sigma_n^2 - 65\sigma_n - 1344 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2}(65 + \sqrt{9601}) \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(65 - \sqrt{9601}) \\ \sigma_3 = 0. \end{cases}$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE IL TENSORE DEGLI SFORZI HA QUESTO ASPETTO:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{65+\sqrt{9601}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{65-\sqrt{9601}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81.4923 & 0 & 0 \\ 0 & -16.4923 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}_1 \quad \vec{t}_2 \quad \vec{t}_3 \qquad\qquad \vec{t}_1 \quad \vec{t}_2 \quad \vec{t}_3$$

È AGEVOLE VERIFICARE CHE

$$I_1 = tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \cancel{2} \cdot \frac{65}{\cancel{2}} = 65$$

$$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = -\left(\frac{65+\sqrt{9601}}{2}\right)\left(\frac{65-\sqrt{9601}}{2}\right) = -\frac{65^2-9601}{4} = \frac{9601-4225}{4}$$

$$= \frac{5376}{4} = 1344$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

PER IL CALCOLO DELLE DIREZIONI PRINCIPALI IL SISTEMA DI EQUAZIONI DA RISOLVERE È IL SEGUENTE:

$$\begin{cases} (80-\sigma_n)\alpha_{nx} - 12\alpha_{ny} = 0 \\ -12\alpha_{nx} \quad (-15-\sigma_n)\alpha_{ny} = 0 \\ -\sigma_n\alpha_{nz} = 0 \end{cases} \qquad [*]$$

CON LA CONDIZIONE $\alpha_{nx}^2 + \alpha_{ny}^2 + \alpha_{nz}^2 = 1$.

PER $\sigma_n = \sigma_1$ IL SISTEMA [*] DIVIENE:

$$\begin{cases} \left(80 - \frac{65+\sqrt{9601}}{2}\right)\alpha_{1x} - 12\alpha_{1y} = 0 \\ -12\alpha_{1x} \quad \left(-15 - \frac{65+\sqrt{9601}}{2}\right)\alpha_{1y} = 0 \\ -\frac{65+\sqrt{9601}}{2}\alpha_{1z} = 0 \end{cases} \qquad [**]$$

E SI OSSERVA CHE IL SISTEMA FORMATO DALLE PRIME 2 EQ. DELLA [**] È SINGOLARE POICHÉ IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DAI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE:

$$\det\begin{bmatrix} 80 - \frac{65+\sqrt{9601}}{2} & -12 \\ -12 & -15 - \frac{65+\sqrt{9601}}{2} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{+95-\sqrt{9601}}{2} & -12 \\ -12 & \frac{-95-\sqrt{9601}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{-(95^2)+9601}{4} - (-12)^2 = \frac{-9025+9601}{4} - 144 = \frac{\overset{144}{576}}{\cancel{4}} - 144 = 0$$

OCCORRE QUINDI CONSIDERARE IL SISTEMA FORMATO DALLA <u>TERZA</u> EQUAZIONE E DA UNA A SCELTA FRA LA PRIMA E LA SECONDA, OTTENENDO:

$$\begin{cases} \frac{95-\sqrt{9601}}{2}\alpha_{1x} - 12\alpha_{1y} = 0 \\ -\frac{65+\sqrt{9601}}{2}\alpha_{1z} = 0 \end{cases} \qquad [**']$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} \alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1y} = \dfrac{95-\sqrt{9601}}{24}\,\alpha_{1x} \\ \alpha_{1x}^2+\alpha_{1y}^2+\alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{1x}^2\left[1+\left(\frac{95-\sqrt{9601}}{24}\right)^2\right]=1$$

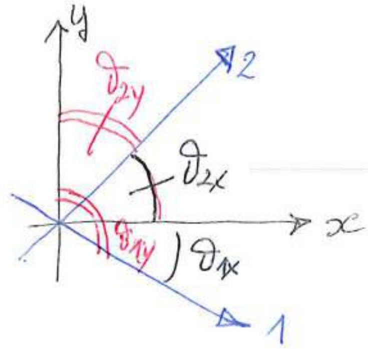
CIOÈ

$$\alpha_{1x}^2\left[\frac{\overbrace{576+9025+9601}^{19202\ \ 9601}-\cancel{196}^{\,95}\sqrt{9601}}{\cancel{576}\ 288}\right]=1 \Rightarrow \alpha_{1x}^2 = \frac{288}{9601-95\sqrt{9601}}\cdot\frac{9601+95\sqrt{9601}}{9601+95\sqrt{9601}}$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$\alpha_{1x} = \pm\sqrt{\frac{288(9601+95\sqrt{9601})}{\underset{2}{\cancel{576}}\cdot 9601}} = \pm\sqrt{\frac{9601+95\sqrt{9601}}{19202}}$$

E SCEGLIENDO LA SOLUZIONE CON IL (+):



$$\alpha_{1x} = \sqrt{\frac{9601+95\sqrt{9601}}{19202}} = 0.992356$$

$$\alpha_{1y} = \frac{95-\sqrt{9601}}{24}\cdot\sqrt{\frac{9601+95\sqrt{9601}}{19202}} = -0.123412$$

$$\alpha_{1z} = 0$$

SI VEDE COSÌ CHE LA DIREZIONE "1" FORMA CON L'ASSE x UN ANGOLO ϑ_{1x} TALE CHE

$$\cos\vartheta_{1x} = \alpha_{1x} \quad\rightarrow\quad \vartheta_{1x} = \arccos\sqrt{\frac{9601+95\sqrt{9601}}{19202}} = 7.08903^\circ$$

E CON L'ASSE y UN ANGOLO ϑ_{1y} TALE CHE

$$\cos\vartheta_{1y} = \alpha_{1y} \quad\rightarrow\quad \vartheta_{1y} = \arccos\left(\frac{95-\sqrt{9601}}{24}\cdot\sqrt{\frac{9601+95\sqrt{9601}}{19202}}\right) = 97.08903^\circ$$

PER LA SECONDA DIREZIONE PRINCIPALE SI PONE $\sigma_n = \sigma_2$ NELLA [*] E SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \left(80-\dfrac{65-\sqrt{9601}}{2}\right)\alpha_{2x} - 12\alpha_{2y} = 0 \\ -12\,\alpha_{2x} + \left(-15-\dfrac{65-\sqrt{9601}}{2}\right)\alpha_{2y} = 0 \\ -\dfrac{65-\sqrt{9601}}{2}\,\alpha_{2z} = 0 \end{cases} \qquad [***]$$

E SI OSSERVA CHE DI NUOVO IL SISTEMA FORMATO DALLE PRIME 2 EQ. [***] È SINGOLARE, POICHÉ IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DAI

COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE VALE:

$$\det\begin{bmatrix} \frac{95+\sqrt{9601}}{2} & -12 \\ -12 & \frac{-95+\sqrt{9601}}{2} \end{bmatrix} = \frac{-(95)^2+9601}{4}-(-12)^2 = \frac{-9025+9601}{4}-144$$

$$= \frac{\cancel{576}^{144}}{\cancel{4}} - 144 = 0.$$

OCCORRE QUINDI CONSIDERARE IL SISTEMA FORMATO DALLA TERZA EQUAZIONE E DA UNA A SCELTA FRA LA PRIMA E LA SECONDA, OTTENENDO:

$$\begin{cases} \frac{95+\sqrt{9601}}{2}\alpha_{2x} - 12\alpha_{2y} = 0 \\ -\frac{65-\sqrt{9601}}{2}\alpha_{2z} = 0 \end{cases} \qquad [***']$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} \alpha_{2z} = 0 \\ \alpha_{2y} = \frac{95+\sqrt{9601}}{24}\alpha_{2x} \\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{2x}^2\left[1+\left(\frac{95+\sqrt{9601}}{24}\right)^2\right] = 1.$$

CIOÈ:

$$\alpha_{2x}^2\left[\frac{576+\overbrace{9025+9601}^{\cancel{19202}\ 9601}+\cancel{190}^{95}\sqrt{9601}}{\cancel{576}\ 288}\right] = 1 \Rightarrow \alpha_{2x}^2 = \frac{288}{9601+95\sqrt{9601}}\ \frac{9601-95\sqrt{9601}}{9601-95\sqrt{9601}}$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$\alpha_{2x} = \pm\sqrt{\frac{9601-95\sqrt{9601}}{19202}}$$

E SCEGLIENDO ANCORA LA SOLUZIONE CON IL (+)

$$\alpha_{2x} = \sqrt{\frac{9601-95\sqrt{9601}}{19202}} = 0,123412$$

$$\alpha_{2y} = \frac{95+\sqrt{9601}}{24}\sqrt{\frac{9601-95\sqrt{9601}}{19202}} = 0.992356$$

$$\alpha_{2z} = 0$$

SI HA COSÌ CHE LA DIREZIONE "2" FORMA CON L'ASSE X UN ANGOLO ϑ_{2x} TALE CHE

$$\cos\vartheta_{2x} = \alpha_{2x} \rightarrow \vartheta_{2x} = \arccos\left(\sqrt{\frac{9601-95\sqrt{9601}}{19202}}\right) = 82,91097^\circ$$

E CON L'ASSE y UN ANGOLO ϑ_{2y} TALE CHE

$$\cos\vartheta_{2y} = \alpha_{2y} \rightarrow \vartheta_{2y} = \arccos\left(\frac{95+\sqrt{9601}}{24}\sqrt{\frac{9601-95\sqrt{9601}}{19022}}\right) = 7.08903^\circ.$$

INFINE, PER LA TERZA DIREZIONE PRINCIPALE SI PONE $\sigma_n = \sigma_3$ NELLA [*] E SI OTTIENE:

$$\begin{cases} (80-0)\alpha_{3x} \quad -12\alpha_{3y} = 0 \\ -12\alpha_{3x} \quad (-15-0)\alpha_{3y} = 0 \qquad [****] \\ (-0)\alpha_{3z} = 0 \end{cases}$$

QUESTA VOLTA IL SISTEMA FORMATO DALLE PRIME 2 EQ. [****] È NON SINGOLARE POICHÉ IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DAI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE FORNISCE:

$$\det\begin{bmatrix} 80 & -12 \\ -12 & -15 \end{bmatrix} = (80)(-15)-(12)^2 = -1200-144 = -1344 \neq 0 \quad (= -I_2 !)$$

E QUINDI UTILIZZANDO LE PRIME 2 EQUAZIONI L'UNICA SOLUZIONE DEL SISTEMA OMOGENEO [****] FORNISCONO

$$\begin{cases} \alpha_{3x} = 0 \\ \alpha_{3y} = 0 \\ \alpha_{3x}^2 + \alpha_{3y}^2 + \alpha_{3z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{3z}^2 = 1 \qquad [x]$$

E DUNQUE $\alpha_{3z} = \pm 1$.

IMPONENDO CHE $\vec{n}_1 = \{\alpha_{1x}, \alpha_{1y}, \alpha_{1z}\}$, $\vec{n}_2 = \{\alpha_{2x}, \alpha_{2y}, \alpha_{2z}\}$ E $\vec{n}_3 = \{\alpha_{3x}, \alpha_{3y}, \alpha_{3z}\}$ FORMINO UNA TERNA DESTRA, $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$, SI RICONOSCE CHE NELLA [x] SI DEVE PRENDERE IL SEGNO $+$. DUNQUE $\vec{n}_3 = \{0, 0, +1\}$, CIOÈ ORTOGONALE AL PIANO FORMATO DAGLI ASSI x E y.

SI OSSERVI ANCHE CHE NEL SISTEMA [****] L'INCOGNITA α_{3z} NON COMPARE (IL SUO COEFFICIENTE È NULLO) E QUESTO CONFERMA CHE α_{3z} PUÒ ASSUMERE, (A DIFFERENZA DI α_{3x} E α_{3y} CHE DEBBONO ESSERE NULLI PER SODDISFARE IL SISTEMA [****]) QUALSIASI VALORE.

LA CONDIZIONE $|\vec{n}_3| = 1$ FISSA POI IL VALORE $\alpha_{3z}^2 = 1$.