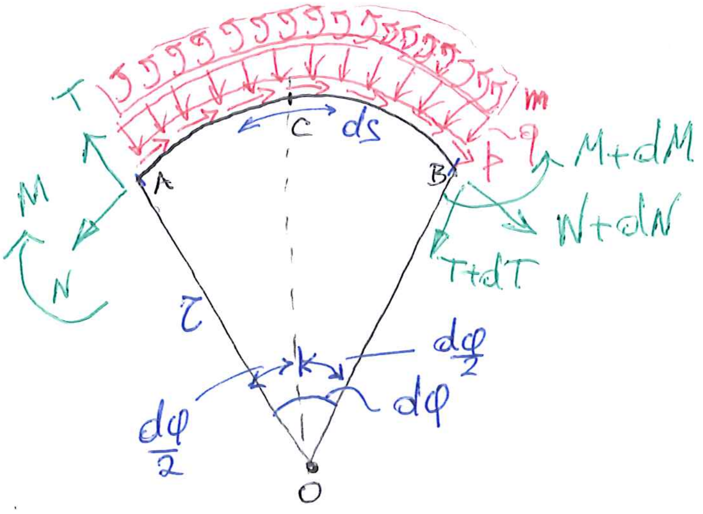
EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA PER TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO.

IN ANALOGIA CON QUANTO VISTO PER TRAVI PIANE AD ASSE RETTILINEO, È POSSIBILE, ANCHE PER TRAVI AD ASSE CURVO, DETERMINARE LE RELAZIONI DIFFERENZIALI CHE LEGANO FRA LORO LE COMPONENTI DELL'AZIONE INTERNA E LE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICO (SIA PER QUANTO RIGUARDA FORZE PARALLELE E PERPENDICOLARI ALL'ASSE DELLA TRAVE, SIA PER QUANTO RIGUARDA COPPIE DISTRIBUITE).

A QUESTO SCOPO SI CONSIDERA UN ELEMENTO INFINITESIMO DI TRAVE DI LUNGHEZZA ds (MISURATA LUNGO L'ASCISSA CURVILINEA) CHE PUÒ ESSERE ASSIMILATO, LOCALMENTE, A UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO r E ANGOLO AL CENTRO DI APERTURA $d\varphi$.
COME CONDIZIONE DI CARICO SI ASSUME LA CONTEMPORANEA PRESENZA DI FORZE CIRCONFERENZIALI $p(s)$, DI FORZE RADIALI $q(s)$ E DI COPPIE DISTRIBUITE $m(s)$.
STANTE IL FATTO CHE L'ELEMENTO HA DIMENSIONI INFINITESIME, A LIVELLO LOCALE SI POSSONO ASSIMILARE LE DISTRIBUZIONI DI FORZE E COPPIE CON VALORI COSTANTI p_0, q_0, m_0 (IL CHE CORRISPONDE AD ASSUMERE, $p(s) = p_0$; $q(s) = q_0$, $m(s) = m_0$) DAL MOMENTO CHE UNA LORO VARIABILITÀ ALL'INTERNO (LOCALMENTE) DELL'ELEMENTO CONSIDERATO DAREBBE LUOGO A QUANTITÀ INFINITESIME DI ORDINE SUPERIORE.

I VERSI POSITIVI DEI CARICHI E DELLE AZIONI INTERNE (QUELLE IN (B) INCREMENTATE) SONO INDICATI IN FIGURA.

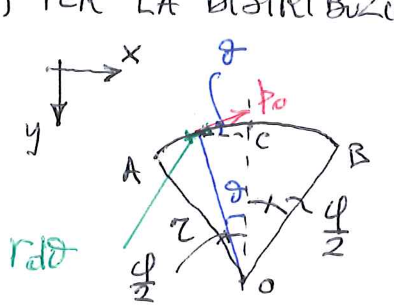


$$ds = r\,d\varphi$$

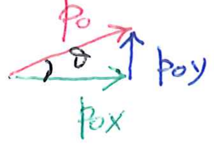
SI OSSERVA CHE LE DISTRIBUZIONI p E q SONO COSTITUITE DA FORZE NON PARALLELE, LE CUI RISULTANTI, PER RAGIONI DI SIMMETRIA, DEBBONO RISULTARE DIRETTE COME LA AZIONE ASSIALE N E IL TAGLIO T (RISPETTIVAMENTE) IN CORRISPONDENZA DEL CENTRO DELL'ARCO (PUNTO (C)).

SE L'ARCO AVESSE <u>AMPIEZZA FINITA φ</u>, SI DOVREBBE PROCEDERE COME SEGUE PER DETERMINARE ESATTAMENTE IL VALORE DELLA RISULTANTE E DEL RELATIVO PUNTO DI APPLICAZIONE, VALUTATO RISPETTO AL PUNTO O.

I) PER LA DISTRIBUZIONE $p = p_0$ (CIRCONFERENZIALE) SI HA:



SI MISURA L'ANGOLO ϑ <u>A PARTIRE DAL RAGGIO OC</u>, POSITIVO SE ORARIO; $-\varphi/2 \leq \vartheta \leq \varphi/2$



LE COMPONENTI CARTESIANE DI p_0 SECONDO x E y SONO:

$$p_{0x} = p_0 \cos\vartheta \;;\quad p_{0y} = p_0 \sin\vartheta$$

LA RISULTANTE ELEMENTARE $dP = p_o\,ds = p_o r\,d\vartheta$ DÀ QUINDI LUOGO ALLE 2 COMPONENTI

$$dP_x = p_o \cos\vartheta\, r\, d\vartheta$$

$$dP_y = p_o \sin\vartheta\, r\, d\vartheta \qquad \text{[NEGATIVA PER } \vartheta<0 \text{]}$$

INTEGRANDO SULL'INTERO ARCO SI TROVA:

$$P_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\varphi/2} p_o \cos\vartheta\, r\, d\vartheta = p_o r \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta = p_o r \left[\sin\vartheta\right]_{-\varphi/2}^{\varphi/2} = p_o r\Big[\sin\frac{\varphi}{2} - \underbrace{\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ -\sin\frac{\varphi}{2}}}\Big] \quad [1]$$

$$P_x = p_o r\left[\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right] = 2 p_o r \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$P_y = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\varphi/2} p_o \sin\vartheta\, r\, d\vartheta = p_o r \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta = p_o r\left[-\cos\vartheta\right]_{-\varphi/2}^{\varphi/2} = p_o r\Big[-\cos\frac{\varphi}{2} + \underbrace{\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ +\cos\frac{\varphi}{2}}}\Big] \quad [2]$$

$$P_y = p_o r\left[\cancel{-\cos\frac{\varphi}{2}} + \cancel{\cos\frac{\varphi}{2}}\right] = 0$$

IL RISULTATO NON È INATTESO! LE COMPONENTI VERTICALI p_{oy} HANNO VERSO OPPOSTO SULLE DUE METÀ DELL'ARCO E SI ELIDONO; LE COMPONENTI ORIZZONTALI p_{ox} HANNO SEGNO EGUALE E I LORO CONTRIBUTI SI SOMMANO.

INOLTRE LE [1] E [2] SONO CONSEGUENZA DIRETTA CHE UNA FUNZIONE PARI (COME $\cos\vartheta$) INTEGRATA SU UN INTERVALLO SIMMETRICO DA UN VALORE DOPPIO DI QUELLO CHE SI OTTIENE INTEGRANDOLA SU METÀ DELL'INTERVALLO, MENTRE UNA FUNZIONE DISPARI (COME $\sin\vartheta$) INTEGRATA SU UN INTERVALLO SIMMETRICO FORNISCE RISULTATO NULLO.

PER VALUTARE IL MOMENTO RISPETTO A O SI PUÒ CONSIDERARE SEMPLICEMENTE CHE LA RISULTANTE ELEMENTARE dP È SEMPRE DIRETTA PERPENDICOLARMENTE AL RAGGIO, E HA QUINDI BRACCIO COSTANTE E PARI A r. NE SEGUE:

$$M_z(O) = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} r \cdot dP = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\varphi/2} r \cdot p_o r\, d\vartheta = p_o r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} d\vartheta = p_o r^2 \left[\vartheta\right]_{-\varphi/2}^{\varphi/2} = p_o r^2\left[\frac{\varphi}{2} - \left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad [3]$$

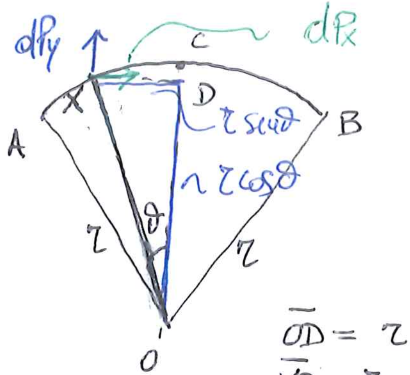
$$M_z(O) = 2 p_o r^2 \frac{\varphi}{2}$$

SI OTTIENE QUINDI CHE LA RISULTANTE P (CHE HA SOLO LA COMPONENTE P_x) DEVE ESSERE APPLICATA A UNA DISTANZA d DA O (MISURATA IN DIREZIONE VERTICALE) PARI A:

$$d = \frac{M_z(O)}{P_x} = \frac{\cancel{2} \cancel{p_o} r^{\cancel{2}} \frac{\varphi}{2}}{\cancel{2}\cancel{p_o}\cancel{r} \sin\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow d = \frac{r\,\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = r\,\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad [4]$$

POICHÉ $|x| \geq |\sin x|$ SI HA INFATTI CHE $d \geq r$. $\qquad \geq r$!

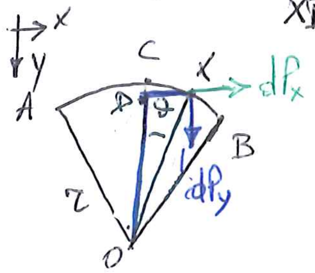
NOTA 1. SI POTEVA CALCOLARE IL MOMENTO RISPETTO A O CONSIDERANDO LE 2 COMPONENTI dP_x e dP_y DELLA RISULTANTE ELEMENTARE. CON CONSIDERAZIONI DI TRIGONOMETRIA SI TROVA FACILMENTE



CHE I RELATIVI BRACCI SONO RISPETTIVAMENTE $r\cos\vartheta$ E $r\sin\vartheta$ SI TROVA ALLORA:

$$\curvearrowright M_{z(O)} = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\cos\vartheta\, dP_x + \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\sin\vartheta\, dP_y$$

$\overline{OD} = r\cos\vartheta$
$\overline{XD} = r\sin\vartheta$



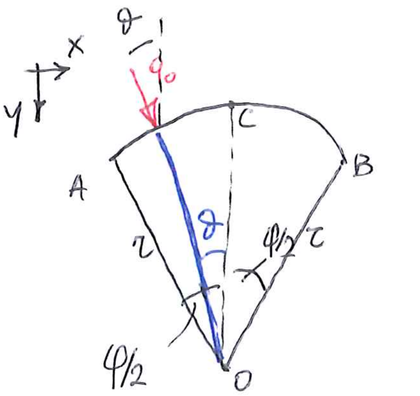
OVVERO:

$$M_{z(O)} = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\cos\vartheta \cdot p_0\cos\vartheta\, r\, d\vartheta + \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\sin\vartheta \cdot p_0\sin\vartheta\, r\, d\vartheta$$

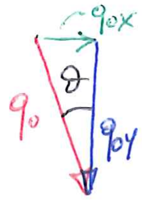
$$M_{z(O)} = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta + p_0 r^2 \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} [\underbrace{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{=1}]\, d\vartheta$$

SICCHE' $M_z(O) = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} 1 \cdot d\vartheta = 2 p_0 r^2 \frac{\varphi}{2}$, COME GIA' OTTENUTO $\square$

II) PER LA DISTRIBUZIONE $q = q_0$ (RADIALE) SI HA:



ASSUMENDO SEMPRE LE COMPONENTI RISPETTO AGLI ASSI INDICATI E MISURANDO L'ANGOLO ϑ A PARTIRE DAL RAGGIO OC, POSITIVAMENTE IN VERSO ORARIO, SI TROVA:



$q_{ox} = -q_0 \sin\vartheta$ [POSITIVA SE $\vartheta < 0$]

$q_{oy} = q_0 \cos\vartheta$

PERTANTO, PROCEDENDO COME GIA' VISTO SI OTTIENE CHE LA RISULTANTE ELEMENTARE $dQ = q_0 ds = q_0 r\, d\vartheta$ DA LUOGO ALLE 2 COMPONENTI

$dQ_x = -q_0 \sin\vartheta\, r\, d\vartheta$ [POSITIVA SE $\vartheta < 0$!]

$dQ_y = +q_0 \cos\vartheta\, r\, d\vartheta$

SE ORA SI INTEGRA SULL' INTERO ARCO SI TROVA:

$$Q_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} -q_0 \sin\vartheta\, r\, d\vartheta = -q_0 r \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta = -q_0 r \left[-\cos\vartheta\right]_{-\varphi/2}^{\varphi/2} = 0 \qquad [5]$$

$$Q_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} q_0 \cos\vartheta\, r\, d\vartheta = q_0 r \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta = q_0 r \left[\sin\vartheta\right]_{-\varphi/2}^{\varphi/2} = 2 q_0 r \sin\frac{\varphi}{2} \qquad [6]$$

PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO, OSSERVANDO CHE LA RISULTANTE ELEMENTARE dQ È SEMPRE DIRETTA RADIALMENTE, SI CONCLUDE CHE ESSA HA SEMPRE BRACCIO NULLO RISPETTO AL PUNTO O ; NE SEGUE:

$$\curvearrowright M_{z(O)} = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} 0 \cdot dQ = 0 \qquad [7]$$

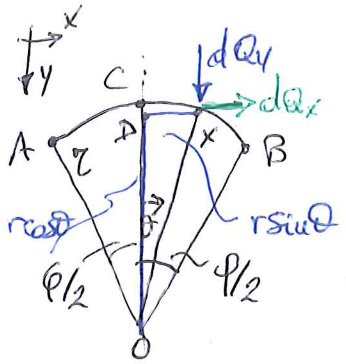
E DUNQUE LA RISULTANTE È DA APPLICARE A UNA DISTANZA d DAL PUNTO O

PARI A:

$$d = \frac{M_{z(0)}}{Q_y} = \frac{0}{2q_0 r \sin\frac{\varphi}{2}} = 0 \qquad [8]$$

MISURATA QUESTA VOLTA SECONDO LA DIREZIONE ORIZZONTALE

NOTA 2: SE INVECE SI CALCOLASSE IL MOMENTO RISPETTO A Ⓞ MANTENENDO SEPARATI I CONTRIBUTI DELLE COMPONENTI dQ_x E dQ_y SI OTTERREBBE QUESTA ESPRESSIONE, FACILMENTE DEDUCIBILE SE SI OSSERVA CHE I RELATIVI BRACCI RISPETTO A Ⓞ VALGONO RISPETTIVAMENTE $r\cos\vartheta$ E $r\sin\vartheta$:



$$\curvearrowright M_{z(0)} = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\cos\vartheta \cdot [-q_0 \sin\vartheta] r\,d\vartheta + \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\sin\vartheta \cdot q_0 \cos\vartheta\, r\,d\vartheta$$

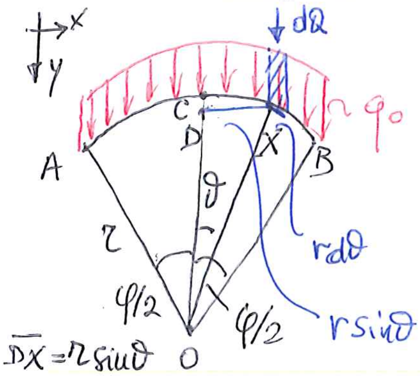
$$\curvearrowright M_{z(0)} = q_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} [-\sin\vartheta \cancel{\cos\vartheta} + \sin\vartheta \cancel{\cos\vartheta}]\, d\vartheta = 0$$

$\overline{DO} = r\cos\vartheta$

$\overline{DX} = r\sin\vartheta$

$\square$

NOTA 3: LA SITUAZIONE SAREBBE DIVERSA SE LA DISTRIBUZIONE DI CARICO APPLICATA ALL'ARCO FOSSE COSTITUITA DA UN SISTEMA DI FORZE PARALLELE, PER ESEMPIO VERTICALI:



IN TALE CASO SI HA:

$$q_{0x} = 0$$

$$q_{0y} = q_0$$

$$dQ_x = q_{0x}\, r\,d\vartheta = 0$$

$$dQ_y = q_{0y}\, r\,d\vartheta = q_0 r\,d\vartheta$$

SI OTTIENE QUINDI:

$$Q_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} dQ_x = 0$$

$$Q_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} dQ_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} q_0 r\,d\vartheta = q_0 r \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} d\vartheta = 2q_0 r \int_0^{\varphi/2} d\vartheta$$

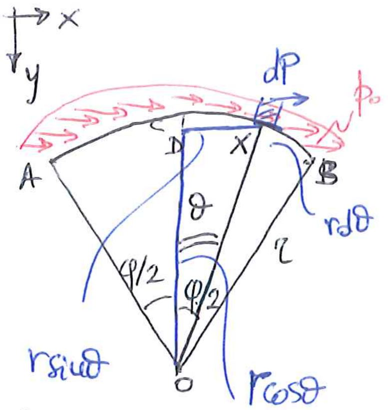
SICCHE' $Q_y = 2q_0 r \frac{\varphi}{2}$.

PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO RISPETTO A Ⓞ SI OSSERVA CHE IL BRACCIO VALE $r\sin\vartheta$, PER CUI

$$\curvearrowright M_{z(0)} = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\sin\vartheta \cdot dQ_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\sin\vartheta\, q_0 r\,d\vartheta = q_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta = 0$$

NE SEGUE: $d = M_{z(0)}/Q_y = 0$

SE INVECE LE FORZE SONO ORIZZONTALI:



$\overline{DX} = r\sin\vartheta$

$\overline{DO} = r\cos\vartheta$

IN QUESTO CASO:

$$p_{0x} = p_0$$

$$p_{0y} = 0$$

$$dP_x = p_0\, r d\vartheta$$

$$dP_y = p_{0y}\, r d\vartheta = 0$$

E DUNQUE:

$$P_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} dP_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} p_0\, r d\vartheta = p_0 r \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} 1 d\vartheta = 2 p_0 r \underbrace{\int_0^{\varphi/2} 1 d\vartheta}_{} = 2 p_0 r \frac{\varphi}{2}.$$

SFRUTTANDO IL FATTO CHE 1 È FUNZIONE PARI

$$P_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} dP_y = 0$$

PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO, SI RICONOSCE CHE IL BRACCIO DELLA RISULTANTE ELEMENTARE dP VALE SEMPRE $r\cos\vartheta$, SICCHÉ

$$\curvearrowright M_{z(O)} = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\cos\vartheta\, dP = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\cos\vartheta\, dP_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} r\cos\vartheta\, p_0 r d\vartheta = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$M_{z(O)} = 2 p_0 r^2 \underbrace{\int_0^{\varphi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta}_{} = 2 p_0 r^2 \left[\sin\vartheta\right]_0^{\varphi/2} = 2 p_0 r^2 \sin\frac{\varphi}{2}.$$

SFRUTTANDO IL FATTO CHE $\cos\vartheta$ È FUNZIONE PARI

SI TROVA PERTANTO CHE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE DISTA DA O UNA DISTANZA d (MISURATA IN DIREZIONE VERTICALE) PARI A:

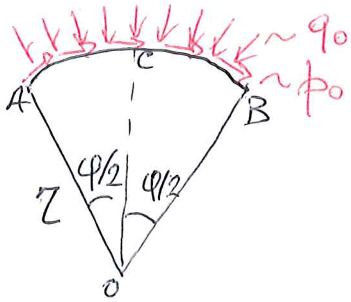
$$d = \frac{M_{z(O)}}{P_x} = \frac{\cancel{2p_0} r^{\cancel{2}} \sin\frac{\varphi}{2}}{\cancel{2p_0 r}\frac{\varphi}{2}} = r\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}$$

[POICHÉ $|\sin x| \leq |x|$ SI TROVA CHE $\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \leq 1$ E DUNQUE $d \leq r$!]

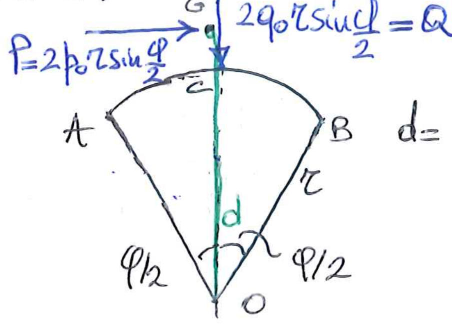
VALORE DIFFERENTE DALLA [4].

∎

I CALCOLI FIN QUI ESEGUITI CONSENTONO DI DETERMINARE LE RISULTANTI DEI CARICHI DISTRIBUITI $p = p_0$ (CIRCONFERENZIALE) E $q = q_0$ (RADIALE) PER UN ARCO CIRCOLARE <u>DI AMPIEZZA φ</u> E RAGGIO r, NONCHÉ DI VALUTARE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE:



$\Rightarrow$



$$d = \overline{GO} = r\,\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad [\geq r\ !]$$

$|\sin x| \leq |x|$

IL RISULTATO ORA OTTENUTO PER UN ARCO DI AMPIEZZA FINITA φ PUÒ ESSERE DIRETTAMENTE ESTESO AL CASO DI UN ARCO DI AMPIEZZA INFINITESIMA $d\varphi$, PER IL QUALE LE 2 RISULTANTI DEL CARICO CIRCONFERENZIALE p E RADIALE q VALGONO:

6

$$P = 2 p r \sin \frac{d\varphi}{2} \qquad [9]$$

$$Q = 2 q r \sin \frac{d\varphi}{2} \qquad [10]$$

MENTRE LA DISTANZA d DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DI P RISPETTO AL CENTRO DELL'ARCO VALE

$$d = r \frac{\frac{d\varphi}{2}}{\sin\frac{d\varphi}{2}} \qquad [11] \qquad [\, d > r \,!]$$

TUTTAVIA, IL FATTO CHE L'ARCO ABBIA AMPIEZZA INFINITESIMA CONSENTE QUALCHE ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE.

SI CONSIDERI INFATTI LO SVILUPPO IN SERIE DI POTENZE DELLA FUNZIONE $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad [a]$$

SE L'ARGOMENTO È MOLTO PICCOLO, $x \ll 1$, ALLORA IL PRIMO TERMINE DELLO SVILUPPO È DOMINANTE E I TERMINI SUCCESSIVI POSSONO ESSERE TRASCURATI, COME SE FOSSERO INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE.

IN QUESTA OTTICA CONSIDERATO CHE $\frac{d\varphi}{2} \ll 1$ SI PUÒ SCRIVERE, SOSTITUENDO NELLA [a] ALL'ARGOMENTO x LA QUANTITÀ $\frac{d\varphi}{2}$:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \simeq \frac{d\varphi}{2}$$

TRASCURANDO I TERMINI SUCCESSIVI CHE CONTENGONO POTENZE SUPERIORI DI $\frac{d\varphi}{2}$.

IN QUESTA LOGICA LA [9] FORNISCE:

$$P = \cancel{2} p r \frac{d\varphi}{\cancel{2}} = p r d\varphi = p\, ds \qquad [9']$$

E ANALOGAMENTE PER LA [10] E LA [11] SI TROVA:

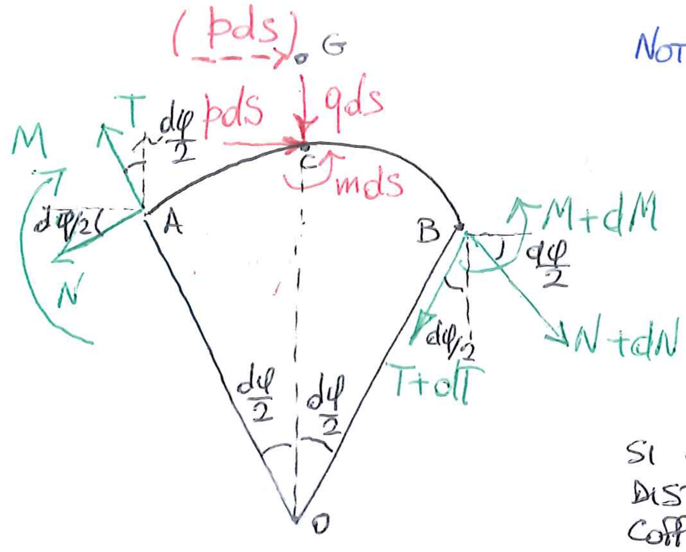
$$Q = \cancel{2} q r \frac{d\varphi}{\cancel{2}} = q r d\varphi = q\, ds \qquad [10']$$

$$d = r \frac{\cancel{\frac{d\varphi}{2}}}{\cancel{\frac{d\varphi}{2}}} = r \qquad [11']$$

CIOÈ P RISULTA APPLICATA, COME Q, AL PUNTO MEDIO DELL'ARCO, ©.
SI OSSERVI INFATTI CHE LA DIFFERENZA FRA d E IL RAGGIO r SI ANNULLA QUANDO $\frac{d\varphi}{2} \ll 1$:

$$r - d = r - r \frac{\frac{d\varphi}{2}}{\sin\frac{d\varphi}{2}} = r \left[1 - \frac{\cancel{\frac{d\varphi}{2}}}{\cancel{\frac{d\varphi}{2}}} \right] = 0 \qquad [12]$$

SULLA BASE DI QUESTE CONSIDERAZIONI SI TRATTA DI OTTENERE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UN CONCIO COSIFFATTO:



NOTA: LA FORZA pds, CHE DOVREBBE ESSERE APPLICATA IN G, CON $\overline{GO} = d = r\,\dfrac{\frac{d\varphi}{2}}{\sin\frac{d\varphi}{2}}$ VIENE APPLICATA IN C. L'ERRORE CHE SI COMMETTE È TRASCURABILE, VEDI NOTA 4, P.9.

SI OSSERVI CHE LA RISULTANTE DELLA DISTRIBUZIONE DI COPPIE È UNA COPPIA (ANTIORARIA) DI MOMENTO $W = mds$

1. SI INIZIA A CONSIDERARE LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DELLE FORZE DIRETTE COME LA TANGENTE ALL'ASSE DELLA TRAVE NEL PUNTO C:

$$\rightarrow R_{//(c)} = 0 \quad -\cancel{N}\cos\frac{d\varphi}{2} - T\sin\frac{d\varphi}{2} + p\,ds - [T+dT]\sin\frac{d\varphi}{2} + [\cancel{N}+dN]\cos\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad [13]$$

SEGUE DA QUI:

$$dN\cos\frac{d\varphi}{2} - 2T\sin\frac{d\varphi}{2} - dT\sin\frac{d\varphi}{2} + p\,ds = 0 \qquad [13']$$

SE ORA SI CONSIDERA LO SVILUPPO [a] E L'ANALOGO SVILUPPO DELLA FUNZIONE $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \qquad [b]$$

E SI CONSIDERA, SOSTITUENDO ALL'ARGOMENTO x LA QUANTITÀ $\frac{d\varphi}{2}$ E ASSUMENDO CHE $\frac{d\varphi}{2} \ll 1$ CHE I TERMINI SUCCESSIVI AL PRIMO RISULTANO INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE CHE POSSONO ESSERE TRASCURATI; SI HA ALLORA: $\sin\frac{d\varphi}{2} \simeq \frac{d\varphi}{2}$; $\cos\frac{d\varphi}{2} \simeq 1$

CON QUESTE SOSTITUZIONI LA [13'] DIVIENE:

$$dN - \cancel{2}T\frac{d\varphi}{\cancel{2}} - \overbrace{dT\frac{d\varphi}{2}}^{\to 0} + p\,ds = 0 \qquad [13'']$$

DOVE IL TERMINE $dT\frac{d\varphi}{2}$ È A SUA VOLTA UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE, DA TRALASCIARE.

SEGUE ALLORA, SEMPLICEMENTE

$$dN - T\,d\varphi + p\,ds = 0$$

SE ORA SI DIVIDE FORMALMENTE PER $ds = r\,d\varphi$ E SI SEMPLIFICA, SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{dN}{ds} - \frac{T}{r} + p = 0} \qquad [13''']$$

2. SI PROCEDE CONSIDERANDO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DELLE FORZE DIRETTE SECONDO LA PERPENDICOLARE ALL'ASSE DELLA TRAVE NEL PUNTO Ⓒ:

$$R_{\perp(C)} = 0 \quad -N\sin\frac{d\varphi}{2} + \cancel{T}\cos\frac{d\varphi}{2} - q\,ds - [\cancel{T}+dT]\cos\frac{d\varphi}{2} - [N+dN]\sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \quad [14]$$

NE SEGUE:

$$-dT\cos\frac{d\varphi}{2} - 2N\sin\frac{d\varphi}{2} - dN\sin\frac{d\varphi}{2} - q\,ds = 0 \quad [14']$$

E UTILIZZANDO DI NUOVO GLI SVILUPPI IN SERIE [a], [b] SOSTITUENDO A x LA QUANTITA' $\frac{d\varphi}{2}$, CON $\frac{d\varphi}{2} \ll 1$, SICCHÉ $\cos\frac{d\varphi}{2} \simeq 1$; $\sin\frac{d\varphi}{2} \simeq \frac{d\varphi}{2}$ LA [14'] DIVIENE

$$-dT - \cancel{2}N\frac{d\varphi}{\cancel{2}} - \overset{\to 0}{dN\frac{d\varphi}{2}} - q\,ds = 0 \quad [14'']$$

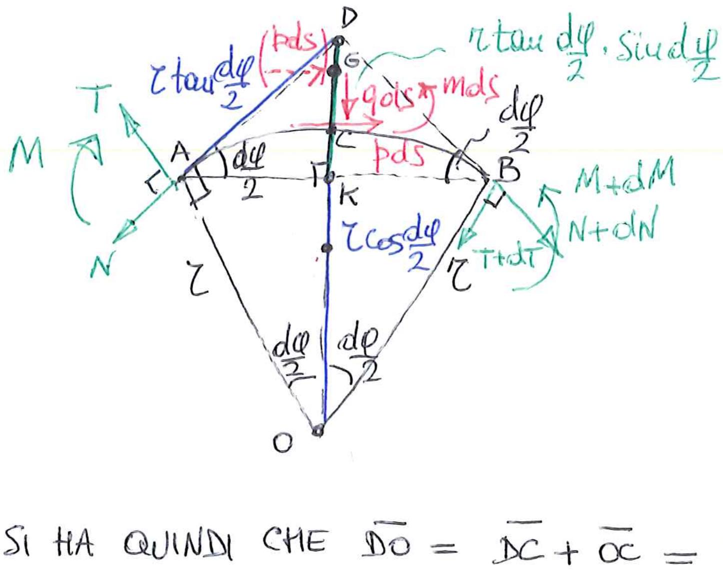
DI NUOVO IL TERMINE $dN\frac{d\varphi}{2}$, PRODOTTO DI 2 QUANTITA' INFINITESIME RISULTA ESSERE UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE, DA TRASCURARE, SICCHÉ

$$dT + N\,d\varphi + q\,ds = 0$$

SE INFINE SI DIVIDE FORMALMENTE PER $ds = r\,d\varphi$ E SI SEMPLIFICA, SI PERVIENE A QUESTO RISULTATO:

$$\boxed{\frac{dT}{ds} + \frac{N}{r} + q = 0} \quad [14''']$$

3. PER SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DEI MOMENTI, SI ASSUME COME POLO IL PUNTO Ⓓ, DOVE CONVERGONO LE RETTE D'AZIONE DI N (APPLICATA IN Ⓐ) E DI N+dN (APPLICATA IN Ⓑ)



OSSERVANDO LE COSTRUZIONI GEOMETRICHE IN FIGURA, E IDENTIFICANDO CORRETTAMENTE GLI ANGOLI SIMILI SI RICAVA QUANTO SEGUE:

$\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$

$\overline{OK} = r\cos\frac{d\varphi}{2}$

$\overline{AK} = r\sin\frac{d\varphi}{2} = \overline{BK}$

$\overline{AD} = r\tan\frac{d\varphi}{2} = \overline{BD}$

$\overline{DK} = r\tan\frac{d\varphi}{2}\cdot\sin\frac{d\varphi}{2}$

SI HA QUINDI CHE $\overline{DO} = \overline{DC} + \overline{OC} = \overline{DK} + \overline{OK} = r\tan\frac{d\varphi}{2}\cdot\sin\frac{d\varphi}{2} + r\cos\frac{d\varphi}{2}$

QUESTO SI PUÒ ANCHE SCRIVERE, NOTO CHE $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ COME:

$$\overline{DO} = r\left[\frac{\sin\frac{d\varphi}{2}}{\cos\frac{d\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{d\varphi}{2} + \frac{\cos\frac{d\varphi}{2}}{\cos\frac{d\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{d\varphi}{2}\right] = r\,\frac{\left[\sin^2\frac{d\varphi}{2} + \cos^2\frac{d\varphi}{2}\right]}{\cos\frac{d\varphi}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{d\varphi}{2}}$$

E POICHÉ $\left|\cos\frac{d\varphi}{2}\right| \leq 1$ È $\overline{DO} \geq r$

LA DISTANZA DAL PUNTO (D) DEL PUNTO (C), DOVE È APPLICATA LA RISULTANTE pds VALE QUINDI:

$$\overline{DC} = \overline{DO} - \overline{OC} = \frac{r}{\cos\frac{d\varphi}{2}} - r = r\left[\frac{1}{\cos\frac{d\varphi}{2}} - 1\right] = r\,\frac{1-\cos\frac{d\varphi}{2}}{\cos\frac{d\varphi}{2}}$$

SI TROVA PERTANTO:

$$\sum M_{z(D)} = 0 \quad -\cancel{M} - T r \tan\frac{d\varphi}{2} + pds\left[r\,\frac{1-\cos\frac{d\varphi}{2}}{\cos\frac{d\varphi}{2}}\right] + mds - [T+dT]\, r \tan\frac{d\varphi}{2} + $$
$$+ [\cancel{M} + dM] = 0 \qquad [15]$$

NE SEGUE:

$$dM - 2Tr\tan\frac{d\varphi}{2} - dTr\tan\frac{d\varphi}{2} + pds\left[r\,\frac{1-\cos\frac{d\varphi}{2}}{\cos\frac{d\varphi}{2}}\right] + mds = 0 \qquad [15']$$

CI SI SERVE DI NUOVO DELLO SVILUPPO IN SERIE [b] E DI QUELLO DI $\tan(x)$:

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots \qquad [c]$$

E OSSERVANDO CHE, SE SI SOSTITUISCE L'ARGOMENTO x CON $\frac{d\varphi}{2}$ E SI TIENE CONTO CHE $\frac{d\varphi}{2} << 1$, IN MODO DA POTERE CONSIDERARE SOLO IL PRIMO TERMINE DI OGNI SVILUPPO, OSSERVANDO CHE I SUCCESSIVI RISULTANO INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE, TRASCURABILI.

È ALLORA $\cos\frac{d\varphi}{2} \simeq 1$; $\tan\frac{d\varphi}{2} \simeq \frac{d\varphi}{2}$ E DALLA [15'] SEGUE:

$$dM - \cancel{2}Tr\frac{d\varphi}{\cancel{2}} - \underbrace{dTr\frac{d\varphi}{2}}_{\to 0} + pds\left[r\,\underbrace{\frac{1-1}{1}}_{0}\right] + mds = 0 \qquad [15'']$$

E SI OSSERVA CHE IL TERZO TERMINE È TRASCURABILE IN QUANTO INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE, E IL QUARTO SVANISCE PERCHÉ, SVILUPPANDO IN SERIE I TERMINI E ARRESTANDOSI AL PRIMO TERMINE IL BRACCIO DELLA FORZA SI ANNULLA.

SE AL SOLITO, SI DIVIDE FORMALMENTE PER $ds = rd\varphi$ E SI SEMPLIFICA, SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{dM}{ds} - T + m = 0} \qquad [15''']$$

<u>NOTA 4</u>: SI OSSERVI CHE SE LA FORZA pds FOSSE APPLICATA NEL PUNTO (G), TALE CHE $\overline{OG} = \frac{r\frac{d\varphi}{2}}{\sin\frac{d\varphi}{2}}$ SI AVREBBE $\overline{DG} = \overline{DO} - \overline{OG}$, SICCHÉ

$$\overline{DG} = \frac{r}{\cos\frac{d\varphi}{2}} - \frac{r\frac{d\varphi}{2}}{\sin\frac{d\varphi}{2}} = r\left[\frac{1}{\cos\frac{d\varphi}{2}} - \frac{\frac{d\varphi}{2}}{\sin\frac{d\varphi}{2}}\right]$$

E CON GLI SVILUPPI IN SERIE [a], [b] TRONCATI AI PRIMI TERMINI E PONENDO $x = \frac{d\varphi}{2} << 1$ SI TROVA $\overline{DG} = r\left[\frac{1}{1} - \frac{d\varphi/2}{d\varphi/2}\right] = r[1-1] = 0$, CIOÉ IL BRACCIO SVANISCE. □

NOTA 5. PER DETERMINARE LA [15'''] SI PUÒ ANCHE SEGUIRE UNA DIVERSA STRADA, CHE CONDUCE A CALCOLI PIÙ SEMPLICI.

SE INFATTI SI CALCOLA L'EQUAZIONE DEL MOMENTO ASSUMENDO COME POLO IL PUNTO Ⓞ, CENTRO DELL'ARCO, SI ELIMINANO I CONTRIBUTI DI T E DI [T+dT] AGGIUNGENDO INVECE QUELLI DI N E DI [N+dN]; TUTTAVIA LE ESPRESSIONI DEI BRACCI SI SEMPLIFICANO NOTEVOLMENTE, RISULTANDO $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$. PERTANTO:

$$\sum M_{z(O)}=0 \qquad -\cancel{M}+\cancel{N}r-p\,ds\,r+m\,ds-[\cancel{N}+dN]r+[\cancel{M}+dM]=0 \qquad [16]$$

NE SEGUE:

$$dM-dN\,r-p\,ds\,r+m\,ds=0 \qquad [16']$$

E SE SI DIVIDE FORMALMENTE PER ds SI OTTIENE:

$$\frac{dM}{ds}-\left[\frac{dN}{ds}+p\right]r+m=0 \qquad [16'']$$

SE ORA SI SOSTITUISCE LA [13'''] RISOLTA RISPETTO A $\frac{dN}{ds}$:

$$\frac{dN}{ds}=\frac{T}{r}-p$$

SI OTTIENE

$$\frac{dM}{ds}-\left\{\left[\frac{T}{r}-\cancel{p}\right]+\cancel{p}\right\}r+m=0$$

E QUINDI, SEMPLIFICANDO, ANCORA LA [15''']:

$$\frac{dM}{ds}-T+m=0 \qquad [15''']$$

□

IL SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI COSÌ OTTENUTE,

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{dN}{ds}-\frac{T}{r}+p(s)=0 &&[13''']\\ &\frac{dT}{ds}+\frac{N}{r}+q(s)=0 &&[14''']\\ &\frac{dM}{ds}-T+m(s)=0 &&[15''']\end{aligned}}$$

LE [13'''] E [14'''] RIVELANO CHE PER TRAVI AD ASSE CURVO C'È <u>ACCOPPIAMENTO</u> FRA AZIONE ASSIALE E TAGLIO. OSSERVANDO POI CHE, IN GENERALE $r=r(s)$ SI VEDE CHE L'INTEGRAZIONE DELLE [13''']-[15'''] NON È AGEVOLE, IN GENERALE.

CARATTERIZZA COMPLETAMENTE LA RISPOSTA STATICA DI UNA TRAVE PIANA AD ASSE CURVILINEO

NOTA 6. LE EQUAZIONI [13'''] – [15'''] APPENA OTTENUTE VALGONO ANCHE PER IL CASO SPECIALE CHE LA TRAVE ABBIA ASSE RETTILINEO.

IN QUESTA CONDIZIONE INFATTI $r \to \infty$, $ds = dx$ E DUNQUE SI HA:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dN}{dx} + p(x) = 0 &\quad [17] \\ &\frac{dT}{dx} + q(x) = 0 &\quad [18] \\ &\frac{dM}{dx} - T + m(x) = 0 &\quad [19] \end{aligned}}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA PER LA TRAVE AD ASSE RETTILINEO.

SI NOTI CHE I TERMINI DI ACCOPPIAMENTO FRA N E T CHE COMPAIONO NELLE [13'''] E [14'''] SVANISCONO QUANDO $r \to \infty$ E PRODUCONO LE EQUAZIONI DISACCOPPIATE [17] E [18].

□

COME ACCENNATO LE [13'''] – [15'''] NON SONO EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI AGEVOLE SOLUZIONE PER LA PRESENZA DI COEFFICIENTI VARIABILI, IN QUANTO, GENERALMENTE, RISULTA $r = r(s)$.

LA SITUAZIONE È ENORMEMENTE SEMPLIFICATA NEL CASO DI TRAVI AD ASSE CIRCOLARE, PER LE QUALI $r = R = \text{const}$.

IN QUESTO CASO, SEGUENDO IL PROCEDIMENTO INDICATO SI RIESCE A DISACCOPPIARE IL SISTEMA DI 3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE, OTTENENDO UN'UNICA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL TERZO ORDINE NELLA INCOGNITA FUNZIONE $M(s)$.

CONVIENE CONSIDERARE CHE <u>NEL CASO DI ARCHI DI CIRCONFERENZA</u> $ds = R\,d\varphi$, SICCHÉ LE [13'''] – [15'''] POSSONO ESSERE SCRITTE NELLA FORMA EQUIVALENTE:

$$\frac{1}{R}\frac{dN}{d\varphi} - \frac{T}{R} + p(\varphi) = 0 \qquad [20]$$

$$\frac{1}{R}\frac{dT}{d\varphi} + \frac{N}{R} + q(\varphi) = 0 \qquad [21]$$

$$\frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi} - T + m(\varphi) = 0 \qquad [22]$$

SI INIZIA A RISOLVERE LA [22] RISPETTO A T:

$$\boxed{T = \frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi} + m(\varphi)} \qquad [23]$$

SI SOSTITUISCE POI QUESTO VALORE NELLA [20], DOPO AVERE MOLTIPLICATO TUTTI I TERMINI PER R, OTTENENDO:

$$\frac{dN}{d\varphi} - \frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi} + pR - m = 0 \qquad [24]$$

SI NOTA POI, DERIVANDO LA [23] RISPETTO A φ (TENUTO CONTO CHE $R = \text{const}$):

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{R}\frac{d^2M}{d\varphi^2} + \frac{dm}{d\varphi} \qquad [25]$$

E SI SOSTITUISCE QUESTO VALORE NELLA [21], DOPO AVERE MOLTIPLICATO TUTTI I TERMINI PER R:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2M}{d\varphi^2} + N + qR + \frac{dm}{d\varphi} = 0 \qquad [26]$$

SI RISOLVE LA [26] RISPETTO A N:

$$\boxed{N = -qR - \frac{dm}{d\varphi} - \frac{1}{R}\frac{d^2M}{d\varphi^2}} \qquad [26']$$

E SI PROCEDE A DERIVARLA RISPETTO A φ:

$$\frac{dN}{d\varphi} = -\frac{dq}{d\varphi}R - \frac{d^2m}{d\varphi^2} - \frac{1}{R}\frac{d^3M}{d\varphi^3} \qquad [27]$$

INFINE SI SOSTITUISCE QUESTA ESPRESSIONE NELLA [24], MOLTIPLICANDO TUTTI I TERMINI PER R:

$$-\frac{d^3M}{d\varphi^3} - \frac{d^2m}{d\varphi^2}R - \frac{dq}{d\varphi}R^2 - \frac{dM}{d\varphi} + pR^2 - mR = 0$$

E, RIORDINANDO I TERMINI, SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = \left[p - \frac{dq}{d\varphi}\right]R^2 - \left[m + \frac{d^2m}{d\varphi^2}\right]R} \qquad [28]$$

QUESTA E' UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL TERZO ORDINE NELLA VARIABILE M. UNA VOLTA DETERMINATO M, SI PUÒ CALCOLARE N MEDIANTE LA [26'] E T PER MEZZO DELLA [23].

FISSANDO L'ATTENZIONE SULL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA ALLA [28]:

$$\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = 0 \qquad [29].$$

CHE E' A COEFFICIENTI COSTANTI SI PROCEDE COME SEGUE.

CON LA CONSUETA TECNICA RISOLUTIVA PER QUESTO TIPO DI EQUAZIONI, SI PONE

$$M(\varphi) = e^{\lambda\varphi}$$

SICCHE' $\dfrac{dM}{d\varphi} = \lambda e^{\lambda\varphi}$; $\dfrac{d^2M}{d\varphi^2} = \lambda^2 e^{\lambda\varphi}$; $\dfrac{d^3M}{d\varphi^3} = \lambda^3 e^{\lambda\varphi}$

SI OTTIENE PERTANTO, SOSTITUENDO NELLA [29] $\lambda^3 e^{\lambda\varphi} + \lambda e^{\lambda\varphi} = 0$ CIOÈ $\lambda e^{\lambda\varphi}(\lambda^2+1) = 0$

PER OTTENERE LE SOLUZIONI, OCCORRE ANNULLARE IL POLINOMIO CARATTERISTICO $\lambda(\lambda^2+1)$, CIOÈ TROVARE LE RADICI DELL'EQUAZIONE ALGEBRICA:

$$\lambda(\lambda^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0\,;\ \lambda_{2,3}=\pm i \qquad \text{(UNITA' IMMAGINARIA)}$$

SI OTTIENE COSÌ CHE LA SOLUZIONE GENERALE E' DATA DA UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE 3 SOLUZIONI ORA DETERMINATE, e^0, $e^{+i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$:

$$M_{om}(\varphi) = C + D e^{+i\varphi} + E e^{-i\varphi}$$

O ANCHE, RICORDANDO CHE

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$M_{om}(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi + C \qquad [30]$$

LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE COMPLETA [28] SI OTTIENE SOMMANDO ALLA [30] UN INTEGRALE PARTICOLARE DELLA EQUAZIONE COMPLETA, $M_c(\varphi)$

SI OTTIENE PERTANTO

$$M(\varphi) = M_c(\varphi) + A\cos\varphi + B\sin\varphi + C \qquad [31]$$

DA QUI, FACENDO USO DELLA [23] E DELLA [26'] SI CALCOLANO T E N. ALLO SCOPO SI OSSERVA CHE

$$\frac{dM}{d\varphi} = \frac{dM_c(\varphi)}{d\varphi} - A\sin\varphi + B\cos\varphi$$

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2} = \frac{d^2M_c(\varphi)}{d\varphi^2} - A\cos\varphi - B\sin\varphi$$

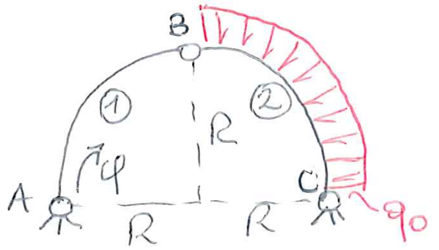
E QUINDI, POSTO $T_c(\varphi) = +\frac{1}{R}\frac{dM_c(\varphi)}{d\varphi} + m(\varphi)$; [32] $\quad N_c(\varphi) = -\frac{1}{R}\frac{d^2M_c(\varphi)}{d\varphi^2} - qR - \frac{dm}{d\varphi}$ [33]

SI OTTIENE

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}\left(A\sin\varphi - B\cos\varphi\right) + T_c(\varphi) \qquad [32']$$

$$N(\varphi) = +\frac{1}{R}\left(A\cos\varphi + B\sin\varphi\right) + N_c(\varphi) \qquad [33'].$$

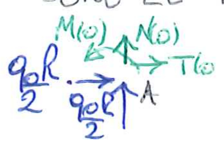
APPLICAZIONE: SI CALCOLANO LE AZIONI INTERNE NELL'ARCO A 3 CERNIERE GIA' CONSIDERATO, CARICATO, SULLA META' DESTRA, DA PRESSIONE ESTERNA COSTANTE

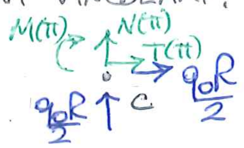


SI OSSERVA CHE PER LA PARTE ① $p=0$; $q=0$; $m=0$

MENTRE PER LA PARTE ② SI HA $p=0$; $q=+q_0$; $m=0$

SI TIENE ANCHE CONTO CHE IN Ⓐ E Ⓒ QUESTE SONO LE REAZIONI VINCOLARI:





PER LA TRAVE ①, Ⓐ → Ⓑ, $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ SI HA: $M_c(\varphi) = 0$ E QUINDI

$$M(\varphi) = A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + C_1 \quad [31'']$$

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}(A_1 \sin\varphi - B_1 \cos\varphi) \quad [32'']$$

$$N(\varphi) = \frac{1}{R}(A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi) \quad [33'']$$

LE CONDIZIONI AL CONTORNO NEL PUNTO Ⓐ IMPONGONO CHE RISULTI:

$$N(\varphi=0) = -\frac{q_0 R}{2} = \frac{1}{R} A_1$$

$$T(\varphi=0) = -\frac{q_0 R}{2} = \frac{1}{R} B_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 = -\frac{q_0 R^2}{2} \\ B_1 = -\frac{q_0 R^2}{2} \\ C_1 = +\frac{q_0 R^2}{2} \end{cases}$$

$$M(\varphi=0) = A_1 + C_1 = 0$$

PERTANTO SI OTTIENE LA SOLUZIONE SEGUENTE:

$$\boxed{\begin{aligned} N(\varphi) &= -\frac{q_0 R}{2}\left[\cos\varphi + \sin\varphi\right] & [34] \\ T(\varphi) &= \frac{q_0 R}{2}\left[\sin\varphi - \cos\varphi\right] & [35] \\ M(\varphi) &= \frac{q_0 R^2}{2}\left[1 - \cos\varphi - \sin\varphi\right] & [36] \end{aligned}} \qquad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

PER LA TRAVE ②, PERCORSA DA Ⓑ → Ⓒ È $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ E SI HA ANCORA $M_c(\varphi) = 0$ ESSENDO $q = q_0 = \text{const} \Rightarrow \frac{dq}{d\varphi} = 0$, MENTRE $N_c(\varphi) = -q_0 R$ PER LA [33]

$$M(\varphi) = A_2 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi + C_2 \quad [31''']$$

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}(A_2 \sin\varphi - B_2 \cos\varphi) \quad [32''']$$

$$N(\varphi) = \frac{1}{R}(A_2 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi) - q_0 R \quad [33''']$$

LE CONDIZIONI AL CONTORNO NEL PUNTO Ⓒ IMPONGONO CHE RISULTI:

$$N(\varphi=\pi) = -\frac{q_0 R}{2} = -\frac{1}{R} A_2 - q_0 R$$

$$T(\varphi=\pi) = -\frac{q_0 R}{2} = -\frac{1}{R} B_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_2 = -\frac{q_0 R^2}{2} \\ B_2 = +\frac{q_0 R^2}{2} \\ C_2 = -\frac{q_0 R^2}{2} \end{cases}$$

$$M(\varphi=\pi) = 0 = -A_2 + C_2$$

PERTANTO LA SOLUZIONE RISULTA:

$$\boxed{\begin{aligned} N(\varphi) &= -\frac{q_0 R}{2}\left(\cos\varphi - \sin\varphi + 2\right) & [37] \\ T(\varphi) &= \frac{q_0 R}{2}\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right) & [38] \\ M(\varphi) &= -\frac{q_0 R^2}{2}\left(1 - \sin\varphi + \cos\varphi\right) & [39] \end{aligned}} \qquad \frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi.$$

SI OSSERVA AGEVOLMENTE CHE LE [34], [35], [36] CON LA SEMPLICE SOSTITUZIONE $\varphi \to \vartheta_1$ COINCIDONO CON LE [16'], [17'], [18'] (CFR. LEZIONE 12, PAG. 9).
LE [37], [38], [39] SONO INVECE RIFERITE A UNA DIVERSA ORIGINE E NON SONO IMMEDIATAMENTE CONFRONTABILI CON LE [19'], [20'], [21'] (CFR. LEZIONE 12, PAG. 12) ESPRESSE NELLA VARIABILE ϑ_2.

È TUTTAVIA POSSIBILE VERIFICARE CHE $\varphi + \vartheta_2 = \pi$ (ANGOLI SUPPLEMENTARI)
RISULTA ALLORA $\varphi = [\pi - \vartheta_2]$, DA CUI SEGUE:

$$\cos\varphi = \cos[\pi - \vartheta_2] = -\cos\vartheta_2 \qquad [41]$$
$$\sin\varphi = \sin[\pi - \vartheta_2] = +\sin\vartheta_2. \qquad [42]$$

SE ALLORA SI EFFETTUANO LE SOSTITUZIONI INDICATE DALLE [41], [42] LE [37] - [39] DIVENGONO:

$$\boxed{\begin{aligned} N(\vartheta_2) &= -\frac{q_0 R}{2}\left[2 - \sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2\right] \\ T(\vartheta_2) &= \frac{q_0 R}{2}\left[\sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2\right] \\ M(\vartheta_2) &= -\frac{q_0 R^2}{2}\left[1 - \sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2\right] \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &[37'] \\ &[38'] \\ &[39'] \end{aligned} \qquad 0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2} \quad C \to B$$

DEL TUTTO EQUIVALENTI ALLE [19'] - [21'].

NEL CASO CONSIDERATO, ESSENDO GIÀ NOTE, PER EFFETTO DI CALCOLI PRECEDENTI LE REAZIONI DEI VINCOLI A TERRA IN A E C LE CONDIZIONI AL CONTORNO UTILIZZATE SONO LE PIÙ AGEVOLI, ANCHE CONSIDERATO IL FATTO CHE DANNO LUOGO A DUE SISTEMI DI EQUAZIONI NELLE INCOGNITE COSTANTI A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2: DISACCOPPIATI
UNO NELLE INCOGNITE RELATIVI ALLA TRAVE 1 (A_1, B_1, C_1) E UNO RELATIVO ALLA TRAVE 2 (A_2, B_2, C_2).

SE LE REAZIONI VINCOLARI NON FOSSERO NOTE SI POTREBBE AGEVOLMENTE PERVENIRE MEDIANTE INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI AGLI INTEGRALI GENERALI [31''], [32''], [33''] (VALIDI PER LA TRAVE 1) E [31'''], [32'''], [33'''] (VALIDI PER LA TRAVE 2); DA QUI PER PERVENIRE ALLE SOLUZIONI PARTICOLARI [34] - [36] E [37] - [39] IMPONENDO QUESTE CONDIZIONI AL CONTORNO, LEGATE ALLA PRESENZA DEI VINCOLI IN A, C, B (CHE GENERANO PERÒ UN SISTEMA ACCOPPIATO DI 6 EQ. IN 6 INCOGNITE):

$M^{(1)}(\varphi = 0) = 0$ ← IN A M SI DEVE ANNULLARE

$M^{(2)}(\varphi = \pi) = 0$ ← IN C M SI DEVE ANNULLARE

$\left.\begin{aligned} M^{(1)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ M^{(2)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$ ← IN B M SI DEVE ANNULLARE SU ENTRAMBE LE TRAVI

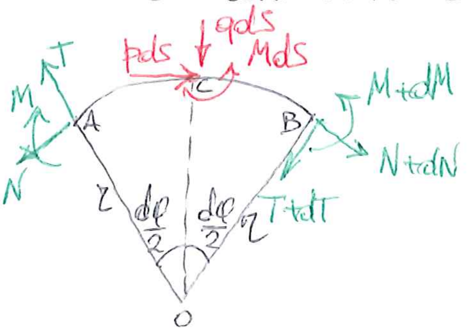
$N^{(1)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - N^{(2)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ← IN B L'AZIONE ASSIALE DEVE ESSERE CONTINUA PASSANDO DALLA TRAVE 1 ALLA TRAVE 2

$T^{(1)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - T^{(2)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ← IN B T DEVE ESSERE CONTINUO PASSANDO DA 1 A 2

APPENDICE A.

PER INTEGRARE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO PER LA TRAVE AD ASSE CURVO (E, IN PARTICOLARE, CIRCOLARE) CONVIENE RICAVARE LE EQUAZIONI GOVERNANTI QUANDO LE AZIONI INCREMENTATE SI APPLICANO ALLA FACCIA SINISTRA, COSÌ COME È STATO FATTO PER LA TRAVE AD ASSE RETTILINEA, MANTENENDO INVARIATI I VERSI POSITIVI DEI CARICHI ESTERNI.

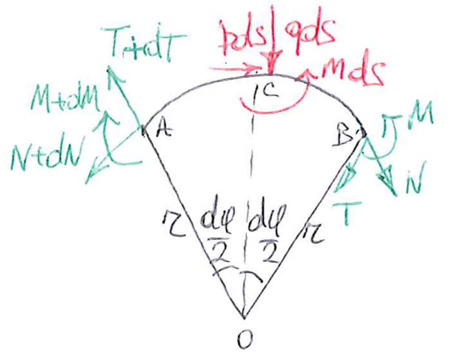
SE LE AZIONI SONO INCREMENTATE SULLA FACCIA DESTRA SI È TROVATO:



$$\begin{cases} dN - \frac{T}{r}ds + p\,ds = 0 \\ -dT - \frac{N}{r}ds - q\,ds = 0 \\ dM - T\,ds + m\,ds = 0 \end{cases}$$

SE INVECE LE AZIONI SONO INCREMENTATE SULLA FACCIA SINISTRA, SI TROVA:

$$\begin{cases} -dN - \frac{T}{r}ds + p\,ds = 0 \\ dT - \frac{N}{r}ds - q\,ds = 0 \\ -dM - T\,ds + m\,ds = 0 \end{cases}$$



NE CONSEGUE:

$$\begin{cases} dN + \frac{T}{r}ds - p\,ds = 0 \\ dT - \frac{N}{r}ds - q\,ds = 0 \\ dM + T\,ds - m\,ds = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dN}{ds} \underline{+\frac{T}{r} - p} = 0 \\ \frac{dT}{ds} \underline{-\frac{N}{r} - q} = 0 \\ \frac{dM}{ds} \underline{+T - m} = 0 \end{cases} \quad [A1.1]$$

I TERMINI SOTTOLINEATI IN ROSSO SONO DI SEGNO CAMBIATO RISPETTO ALLE [13'''], [14'''], [15'''].

NEL CASO DI ARCO CIRCOLARE $r = R$; $ds = R\,d\varphi$ E SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \frac{1}{R}\frac{dN}{d\varphi} + \frac{T}{R} - p = 0 \\ \frac{1}{R}\frac{dT}{d\varphi} - \frac{N}{R} - q = 0 \\ \frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi} + T - m = 0 \end{cases} \quad [A1.2]$$

E LE PRIME 2 EQUAZIONI SONO ANCHE ESPRIMIBILI COSÌ:

$$\begin{cases} \frac{dN}{d\varphi} + T - pR = 0 \\ \frac{dT}{d\varphi} - N - qR = 0 \end{cases} \quad [A1.2']$$

LA TERZA DELLE [A1.2] FORNISCE

$$\boxed{T = \underline{-\frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi}} + m} \quad [A1.3]$$

IL TERMINE CON SOTTOLINEATURA IN ROSSO È DI SEGNO CAMBIATO RISPETTO ALLA [23]

E DERIVATA RISPETTO A φ DÀ:

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\frac{1}{R}\frac{d^2M}{d\varphi^2} + \frac{dm}{d\varphi} \quad [A1.4]$$

SOSTITUENDOLA NELLA SECONDA DELLE [A1.2] DÀ:

$$\boxed{N = -\frac{1}{R}\frac{d^2M}{d\varphi^2} \underline{+\frac{dm}{d\varphi}} - qR} \quad [A1.5]$$

IL TERMINE SOTTOLINEATO IN ROSSO È DI SEGNO CAMBIATO RISPETTO ALLA [26']

CHE, DERIVATA RISPETTO A φ PRODUCE:

$$\frac{dN}{d\varphi} = -\frac{1}{R}\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{d^2m}{d\varphi^2} - \frac{dq}{d\varphi}R \qquad [A1,6]$$

QUESTA, SOSTITUITA NELLA PRIMA DELLE [A1,2'] FORNISCE, USANDO ANCHE LA [A1,3]:

$$-\frac{1}{R}\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{d^2m}{d\varphi^2} - \frac{dq}{d\varphi}R - \frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi} + m - pR = 0$$

CIOE', RIORDINANDO I TERMINI E MOLTIPLICANDOLI TUTTI PER R:

$$-\frac{d^3M}{d\varphi^3} - \frac{dM}{d\varphi} + \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} + m\right)R - \left(\frac{dq}{d\varphi} + p\right)R^2 = 0$$

OVVERO

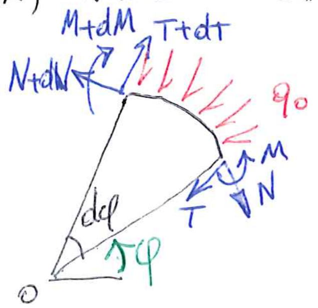
$$\boxed{\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = \left(\underline{\frac{d^2m}{d\varphi^2}} + m\right)R - \left(\frac{dq}{d\varphi} \underline{+p}\right)R^2 = 0} \qquad [A1,7]$$

I TERMINI SOTTOLINEATI IN ROSSO SONO DI SEGNO CAMBIATO RISPETTO ALLA [28].

LE [A1,3], [A1,5] E [A1,7] SOSTITUISCONO LE [23], [26'] E [28] NEL CASO DI AZIONI CHE SI INCREMENTANO NEL VERSO DI ANGOLI CRESCENTI IN VERSO ANTIORARIO. (+↺)

SULLA BASE DI QUESTE SI RISOLVONO LE 3 STRUTTURE AD ARCO GIA' ESAMINATE NELLA LEZIONE 12; LIMITANDOSI PER BREVITA' A RISOLVERE LA SOLA PARTE SOGGETTA A CARICHI DISTRIBUITI, INDUBBIAMENTE PIU' INTERESSANTE.

A) CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO IN DIREZIONE RADIALE.



IN QUESTA SITUAZIONE E' $m = 0$; $p = 0$; $q = q_0$.

PERTANTO IL TERMINE NOTO DELLA [A1,7] E' NULLO E SI DEVE SOLO INTEGRARE L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

$$\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = 0. \qquad [A1,8]$$

LA SOLUZIONE GENERALE, PER QUANTO GIA' VISTO È SCRIVIBILE NELLA FORMA:

$$M(\varphi) = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi \qquad [A1.9]$$

DALLA [A1.3] SEGUE:

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}\left(-B\sin\varphi + C\cos\varphi\right) \qquad [A1.10]$$

E DALLA [A1.5]:

$$N(\varphi) = -\frac{1}{R}\left(-B\cos\varphi - C\sin\varphi\right) - q_0R \qquad [A1.11]$$

LE C.C. FORNISCONO (CFR. LEZIONE 12, PAG. 14) NEL PUNTO C:

$$N(\varphi=0) = -\frac{q_0R}{2} \; ; \quad T(\varphi=0) = -\frac{q_0R}{2} \; ; \quad M(\varphi=0) = 0$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$N(\varphi=0) = -\frac{q_0 R}{2} = +\frac{B}{R} - q_0 R$$
$$T(\varphi=0) = -\frac{q_0 R}{2} = -\frac{C}{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{B}{R} = \frac{q_0 R}{2} \\ \frac{C}{R} = \frac{q_0 R}{2} \\ A+B=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{q_0 R^2}{2} \\ B = \frac{q_0 R^2}{2} \\ C = \frac{q_0 R^2}{2} \end{cases}$$
$$M(\varphi=0) = 0 = A+B$$

SI TROVA QUINDI, PER SOSTITUZIONE NELLE [A1.9]-[A1.11]:

$$M(\varphi) = -\frac{q_0 R^2}{2}\left(1-\cos\varphi-\sin\varphi\right) \quad [A1.14]$$

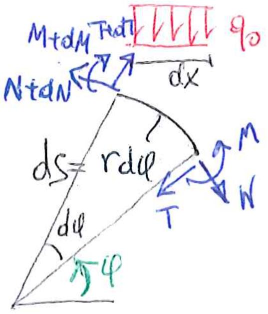
$$T(\varphi) = \frac{q_0 R}{2}\left(\sin\varphi-\cos\varphi\right) \quad [A1.13]$$

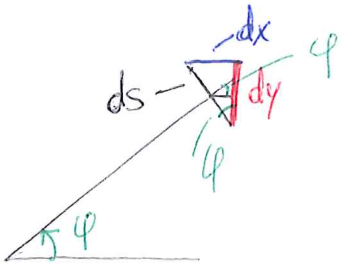
$$N(\varphi) = -q_0 R + \frac{q_0 R}{2}\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right) = -\frac{q_0 R}{2}\left(2-\cos\varphi-\sin\varphi\right) \quad [A1.12]$$

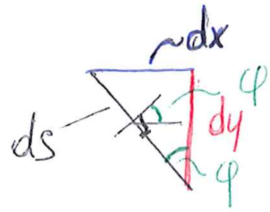
DA CONFRONTARE CON LE [22'], [23'], [24'] (LEZIONE 12, PAG. 14-15), RISPETTIVAMENTE.

B) CARICO VERTICALE, UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO IN PROIEZIONE.

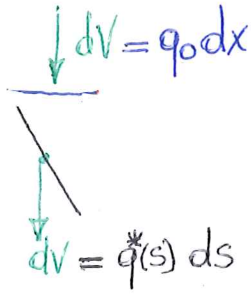
SI RICONOSCE CHE IL LEGAME FRA dx E $ds = r\,d\varphi$ È IL SEGUENTE:







$dx = ds \sin\varphi$

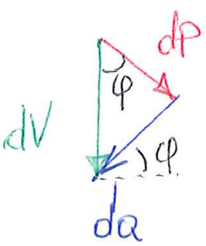


PER EQUIVALENZA STATICA LA RISULTANTE DEL CARICO VERTICALE, dV DEVE ESSERE EGUALE PER dx E PER ds: NE SEGUE

$$dV = q_0\,dx = \overset{*}{q}(s)\,ds \quad \text{MA} \quad dx = ds\sin\varphi \;\Rightarrow\; q_0\,\cancel{ds}\sin\varphi = \overset{*}{q}(s)\,\cancel{ds}$$

QUINDI $\overset{*}{q}(s) = q_0 \sin\varphi$.

OCCORRE POI PROIETTARE LA FORZA ELEMENTARE dV SECONDO LA DIREZIONE CIRCONFERENZIALE E SECONDO QUELLA RADIALE: $\quad dV = q_0\,dx = q^*(s)\,ds$



$$dP = dV\cos\varphi = (q_0\sin\varphi)\cos\varphi\,ds$$
$$dQ = dV\sin\varphi = (q_0\sin\varphi)\sin\varphi\,ds$$

PERTANTO $\quad p(\varphi) = \frac{dP}{ds} = q_0 \sin\varphi\cos\varphi$

$$q(\varphi) = \frac{dQ}{ds} = q_0\sin^2\varphi.$$

SEGUE POI $\quad \frac{dq}{d\varphi} = 2q_0\sin\varphi\cos\varphi$

$$\frac{dq}{d\varphi} + p = 3q_0\sin\varphi\cos\varphi = \frac{3}{2}q_0\sin 2\varphi$$

E LA [A1.7] DIVIENE IN QUESTO CASO, TENENDO CONTO CHE $m=0$; $\frac{dm}{d\varphi}=0$

$$\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = -\frac{3}{2} q_0 R^2 \sin 2\varphi \quad [A1.15]$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 3° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI, NON OMOGENEA.

LA TEORIA CONSENTE DI DETERMINARE, MEDIANTE IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (DOVUTO A LAGRANGE) UN INTEGRALE PARTICOLARE DELLA [A1.15], CHE SOMMATO ALL'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA FORNISCE L'INTEGRALE GENERALE DELLA COMPLETA.

SI HA CHE L'INTEGRALE PARTICOLARE M_0 HA QUESTA FORMA GENERICA:

$M_0 = C_1 \sin 2\varphi + C_2 \cos 2\varphi$; EFFETTUANDO I CALCOLI DELLE DERIVATE SI TROVA:

$$\frac{dM_0}{d\varphi} = 2C_1 \cos 2\varphi - 2C_2 \sin 2\varphi$$

$$\frac{d^2M_0}{d\varphi^2} = -4C_1 \sin 2\varphi - 4C_2 \cos 2\varphi$$

$$\frac{d^3M_0}{d\varphi^3} = -8C_1 \cos 2\varphi + 8C_2 \sin 2\varphi$$

PERTANTO

$$\frac{d^3M_0}{d\varphi^3} + \frac{dM_0}{d\varphi} = -8C_1 \cos 2\varphi + 8C_2 \sin 2\varphi + 2C_1 \cos 2\varphi - 2C_2 \sin 2\varphi = -\frac{3}{2} q_0 R^2 \sin 2\varphi$$

NE SEGUE: $-6C_1 \cos 2\varphi + 6C_2 \sin 2\varphi = -\frac{3}{2} q_0 R^2 \sin 2\varphi$

OVVERO IL SISTEMA $\begin{cases} -6C_1 = 0 \\ 6C_2 = -\frac{3}{2} q_0 R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{4} q_0 R^2 \end{array}$

L'INTEGRALE PARTICOLARE HA QUINDI LA SEGUENTE FORMA: $M_0 = -\frac{1}{4} q_0 R^2 \cos 2\varphi$.

LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE COMPLETA [A1.15] È DUNQUE:

$$M(\varphi) = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi - \frac{q_0 R^2}{4} \cos 2\varphi \quad [A1.16]$$

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}\left[-B\sin\varphi + C\cos\varphi + \frac{q_0 R^2}{2} \sin 2\varphi\right] = \frac{B}{R}\sin\varphi - \frac{C}{R}\cos\varphi - \frac{q_0 R}{2}\sin 2\varphi \quad [A.17]$$

$$N(\varphi) = -\frac{1}{R}\left[-B\cos\varphi - C\sin\varphi + q_0 R^2 \cos 2\varphi\right] - q_0 R \sin^2\varphi$$

OVVERO

$$N(\varphi) = \frac{B}{R}\cos\varphi + \frac{C}{R}\sin\varphi - q_0 R \cos 2\varphi - q_0 R \sin^2\varphi \quad [A.18]$$

LE C.C. NEL PUNTO B ($\varphi = 0$) VALGONO IN QUESTO CASO (CFR LEZIONE 12, PAG. 4-5)

$N(\varphi=0) = -\frac{3}{4} q_0 R$; $T(\varphi=0) = +\frac{q_0 R}{4}$; $M(\varphi=0) = 0$

PERTANTO SOSTITUENDO NELLE [A1.16]-[A1.18] SI TROVA:

$$\begin{cases} M(\varphi=0) = A+B-\dfrac{q_0R^2}{4}=0 \\ T(\varphi=0) = -\dfrac{C}{R} = \dfrac{q_0R}{4} \\ N(\varphi=0) = \dfrac{B}{R}-q_0R = -\dfrac{3}{4}q_0R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \dfrac{q_0R^2}{4} \\ C = -\dfrac{q_0R^2}{4} \\ B = \dfrac{q_0R^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{q_0R^2}{4} \\ C=-\dfrac{q_0R^2}{4} \end{cases}$$

SOSTITUENDO NELLE [A1.16] – [A1.18] SI OTTIENE:

$$M(\varphi)=\frac{q_0R^2}{4}\left[\cos\varphi-\sin\varphi-\cos2\varphi\right] \qquad [A1.19]$$

$$T(\varphi)=\frac{q_0R}{4}\left[\sin\varphi+\cos\varphi-2\sin2\varphi\right] \qquad [A1.20]$$

$$N(\varphi)=\frac{q_0R}{4}\left[\cos\varphi-\sin\varphi-4(\cos2\varphi+\sin^2\varphi)\right] \qquad [A1.21]$$

DI QUI, TENUTO CONTO CHE $\cos2\varphi = 2\cos^2\varphi-1$; $\sin2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$; $(\cos2\varphi+\sin^2\varphi) = \cos^2\varphi-\cancel{\sin^2}\varphi+\cancel{\sin^2}\varphi = \cos^2\varphi$ SI OTTIENE INFINE

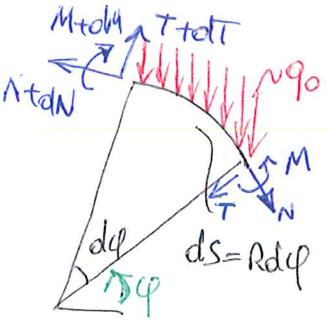
$$N(\varphi)=-\frac{q_0R}{4}\left[\sin\varphi-\cos\varphi+4\cos^2\varphi\right] \qquad [A1.21']$$

$$T(\varphi)=\frac{q_0R}{4}\left[\sin\varphi+\cos\varphi-4\sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad [A1.20']$$

$$M(\varphi)=\frac{q_0R^2}{4}\left[1-\sin\varphi+\cos\varphi-2\cos^2\varphi\right] \qquad [A1.19']$$

DA CONFRONTARE CON LE [8]-[10] DELLA LEZIONE 12 (PAG.5)

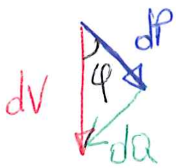
c) CARICO VERTICALE, UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO LUNGO LO SVILUPPO.



IL CARICO DISTRIBUITO È DIRETTAMENTE APPLICATO ALL'ARCO E PRODUCE UNA RISULTANTE ELEMENTARE

$$dV = q_0\, ds.$$

QUESTA VA PROIETTATA SECONDO LE DIREZIONI RADIALE E CIRCONFERENZIALE E PRODUCE LE COMPONENTI dQ E dP:



$$dP = dV\cos\varphi = q_0\cos\varphi\, ds$$

$$dQ = dV\sin\varphi = q_0\sin\varphi\, ds$$

SI OTTIENE QUINDI:

$$p(\varphi) = \frac{dP}{ds} = q_0\cos\varphi \qquad q(\varphi) = \frac{dQ}{ds} = q_0\sin\varphi$$

SEGUE POI $m=0$; $\dfrac{dm}{d\varphi}=0$ E INOLTRE

$$\frac{dq}{d\varphi} = q_0\cos\varphi \;;\quad \left(\frac{dq}{d\varphi}+p\right) = q_0\cos\varphi+q_0\cos\varphi = 2q_0\cos\varphi$$

SICCHÉ LA [A1.7] DIVIENE QUESTA VOLTA:

$$\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = -2q_0R^2\cos\varphi \quad [A1.22]$$

ANCORA UNA VOLTA NON OMOGENEA.

LA SOLUZIONE PARTICOLARE SI DETERMINA CON IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI E HA QUESTA VOLTA IL SEGUENTE ASPETTO:

$$M_0 = C_1\left[\sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos\varphi\right]$$

PERTANTO

$$\frac{dM_0}{d\varphi} = C_1\left[\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\right] = \frac{1}{2}C_1\left[\cos\varphi + \varphi\sin\varphi\right]$$

$$\frac{d^2M_0}{d\varphi^2} = \frac{1}{2}C_1\left[\cancel{-\sin\varphi} + \cancel{\sin\varphi} + \varphi\cos\varphi\right] = \frac{1}{2}C_1\left[\varphi\cos\varphi\right]$$

$$\frac{d^3M_0}{d\varphi^3} = \frac{1}{2}C_1\left[\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\right]$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{2}C_1\cos\varphi + \frac{1}{2}C_1\cancel{\varphi\sin\varphi} + \frac{1}{2}C_1\cos\varphi - \frac{1}{2}C_1\cancel{\varphi\sin\varphi} = -2q_0R^2\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad C_1\cos\varphi = -2q_0R^2\cos\varphi \qquad \Rightarrow \quad C_1 = -2q_0R^2$$

SI TROVA DUNQUE:

$$M(\varphi) = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi - 2q_0R^2\left[\sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos\varphi\right] \quad [A1.23]$$

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}\left[-B\sin\varphi + C\cos\varphi - 2q_0R^2\cos\varphi + q_0R^2\cos\varphi - q_0R^2\varphi\sin\varphi\right]$$

OVVERO

$$T(\varphi) = -\frac{1}{R}\left[-B\sin\varphi + C\cos\varphi - q_0R^2\cos\varphi - q_0R^2\varphi\sin\varphi\right] \quad [A1.24]$$

$$N(\varphi) = -\frac{1}{R}\left[-B\cos\varphi - C\sin\varphi + \cancel{q_0R^2\sin\varphi} - \cancel{q_0R^2\sin\varphi} - q_0R^2\varphi\cos\varphi\right] - q_0R\sin\varphi$$

CIOÈ

$$N(\varphi) = -\frac{1}{R}\left[-B\cos\varphi - C\sin\varphi - q_0R^2\varphi\cos\varphi\right] - q_0R\sin\varphi \quad [A1.25]$$

LE C.C. IN C SONO (CFR. LEZIONE 12, P. 17):

$$N(\theta=0) = -q_0R\frac{\pi}{2} \quad ; \quad T(\theta=0) = +q_0R\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] \quad ; \quad M(\theta=0) = 0$$

SICCHÉ, SOSTITUENDO NELLE [A1.23]-[A1.25] SI OTTIENE:

$$
\begin{aligned}
M(\varphi=0) &= A + B &&= 0\\
T(\varphi=0) &= -\frac{C}{R} + q_0 R &&= q_0 R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]\\
N(\varphi=0) &= \frac{B}{R} &&= -q_0 R\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
A+B=0\\
-C = q_0 R\left[\frac{\pi}{2}-2\right]\\
B = -q_0 R^2\frac{\pi}{2}
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
A = +q_0 R^2\frac{\pi}{2}\\
B = -q_0 R^2\frac{\pi}{2}\\
C = q_0 R^2\left[2-\frac{\pi}{2}\right]
\end{cases}
$$

SOSTITUENDO NELLE [A1.23] – [A1.25] SI OTTIENE, CON QUALCHE PASSAGGIO:

$$M(\varphi) = +q_0 R^2\frac{\pi}{2} - q_0 R^2\frac{\pi}{2}\cos\varphi + q_0 R^2\left[\cancel{2}-\frac{\pi}{2}\right]\sin\varphi - 2q_0 \cancel{R^2}\sin\varphi + q_0 R^2\varphi\cos\varphi$$

$$\boxed{M(\varphi) = q_0 R^2\frac{\pi}{2}\left[1-\cos\varphi-\sin\varphi\right] + q_0 R^2\varphi\cos\varphi} \qquad [A1,26]$$

$$T(\varphi) = -q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\varphi - q_0 R\left[2-\frac{\pi}{2}\right]\cos\varphi + q_0 R\cos\varphi + q_0 R\varphi\sin\varphi$$

$$T(\varphi) = -q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\varphi - q_0 R\cos\varphi + q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\varphi + q_0 R\varphi\sin\varphi$$

$$\boxed{T(\varphi) = q_0 R\left[\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\right] + q_0 R\frac{\pi}{2}\left[\cos\varphi-\sin\varphi\right]} \qquad [A1,27]$$

$$N(\varphi) = -q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\varphi + 2q_0 R\sin\varphi - q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\varphi + q_0 R\varphi\cos\varphi - q_0 R\sin\varphi$$

$$N(\varphi) = -q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\varphi + q_0 R\sin\varphi - q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\varphi + q_0 R\varphi\cos\varphi$$

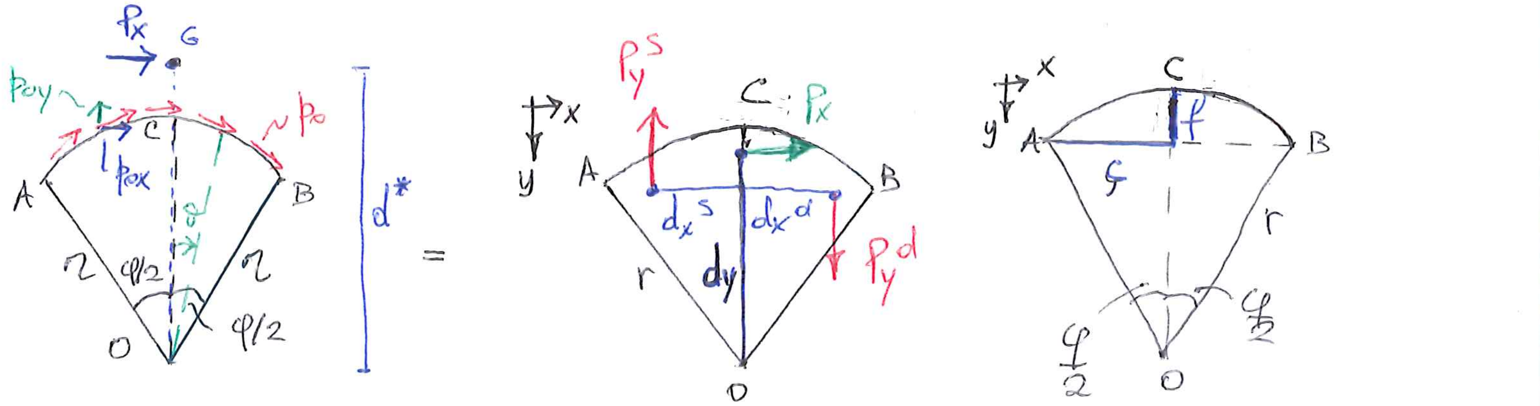
$$\boxed{N(\varphi) = -q_0 R\frac{\pi}{2}\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right) + q_0 R\left(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi\right)} \qquad [A1,28]$$

CHE COINCIDONO, RISPETTIVAMENTE, CON LE [31'], [30'] E [29'] DELLA LEZIONE 12, PAG. 18 – 19.

SI HA COSÌ CONFERMA DEL FATTO CHE MEDIANTE INTEGRAZIONE DIRETTA DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA È SEMPRE POSSIBILE PERVENIRE ALLE ESPRESSIONI DELLE AZIONI INTERNE.

APPENDICE B.

SI È VISTO CHE LA RISULTANTE DEL CARICO CIRCONFERENZIALE UNIFORME $p(s) = p_0$ NEL CASO DI ARCO CIRCOLARE HA IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE G CHE SI TROVA ALL'ESTERNO DELL'ARCO. IL RISULTATO PUÒ APPARIRE SORPRENDENTE E MERITA DI ESSERE APPROFONDITO.



IN REALTA' IL CARICO DISTRIBUITO PRODUCE, OLTRE ALLA RISULTANTE IN DIREZIONE ORIZZONTALE P_x, DUE RISULTANTI, EGUALI E OPPOSTE P_y^s E P_y^d SU CIASCUN SEMIARCO: QUESTE GLOBALMENTE SI ELIDONO, MA PRODUCONO CONTRIBUTO NON NULLO AL

MOMENTO RISULTANTE, CALCOLATO RISPETTO A O, E INFLUENZANO PERTANTO IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE.

CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA, E UTILIZZANDO LA NOTAZIONE DELLE PAGINE 1-3, SI HA:

$$P_y^s = \int_{-\varphi/2}^{0} p_0 \sin\vartheta \, r \, d\vartheta = p_0 r \int_{-\varphi/2}^{0} \sin\vartheta \, d\vartheta = p_0 r \int_{0}^{-\varphi/2} -\sin\vartheta \, d\vartheta = p_0 r \left[+\cos\vartheta\right]_0^{\varphi/2}$$

SCAMBIATI GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE

PERTANTO LA RISULTANTE P_y^s SUL SEMIARCO SINISTRO VALE

$$P_y^s = p_0 r \left[\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\varphi}{2}\right)}_{=\cos\left(+\frac{\varphi}{2}\right)} - \cos(0)\right] = p_0 r \left[\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right] \Rightarrow \boxed{P_y^s = -p_0 r\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right]} \qquad [A2.1]$$

E RISULTA NEGATIVA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO ADOTTATO [$\downarrow_y \rightarrow^x$], SICCHÉ È CORRETTAMENTE ORIENTATA VERSO L'ALTO.

ANALOGAMENTE SUL SEMIARCO DESTRO LA RISULTANTE DEL CARICO VERTICALE VALE:

$$P_y^d = \int_0^{\varphi/2} p_0 \sin\vartheta \, r \, d\vartheta = p_0 r \int_0^{+\varphi/2} \sin\vartheta \, d\vartheta = p_0 r \left[-\cos\vartheta\right]_0^{+\varphi/2} = p_0 r \left[-\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) + \cos(0)\right]$$

DUNQUE

$$P_y^d = p_0 r\left[-\cos\frac{\varphi}{2} + 1\right] \Rightarrow \boxed{P_y^d = +p_0 r\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right]} \qquad [A2.2]$$

CHE È POSITIVA E RISULTA PERTANTO ORIENTATA VERSO IL BASSO.

SI VERIFICA IMMEDIATAMENTE $P_y = P_y^s + P_y^d = -p_0 r\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right] + p_0 r\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right] = 0$

E DUNQUE $P_y = 0$; TUTTAVIA P_y^s E P_y^d <u>CONTRIBUISCONO</u> AL MOMENTO RISPETTO AL CENTRO O:

$$M_{z(O)}^{y,s} = \int_{-\varphi/2}^{0} r\sin\vartheta \, p_0 \sin\vartheta \, r \, d\vartheta = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{0} \sin^2\vartheta \, d\vartheta$$

MA RICORDANDO CHE $\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$ SI HA CHE

$$\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\vartheta) \quad ; \quad \cos^2\vartheta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\vartheta)$$

E DUNQUE SI PUÒ SCRIVERE

$$M_{z(O)}^{y,s} = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{0} \frac{1}{2}(1-\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2} p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{0} (1-\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_{-\varphi/2}^{0}$$

$$M_{z(O)}^{y,s} = \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[0 - \left(-\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin(0) + \frac{1}{2}\sin 2\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(\frac{-2\varphi}{2}\right)}_{= -\sin\left(\frac{2\varphi}{2}\right)}\right]$$

$$\text{SICCHÉ} \quad M_{z(O)}^{y,s} = \frac{1}{4} p_0 r^2 \left[\varphi - \sin 2\frac{\varphi}{2}\right]$$

[A2.3]

$$\text{O ANCHE} \quad M_{z(O)}^{y,s} = \frac{1}{4} p_0 r^2 \left[2\frac{\varphi}{2} - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{M_{z(O)}^{y,s} = \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]}$$

PERTANTO LA RISULTANTE PARZIALE P_y^s È APPLICATA A UNA DISTANZA d_x^s DAL PUNTO O PARI A:

$$d_x^s = \frac{M_{z(0)}^{y,s}}{P_y^s} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{p_0} r^{\cancel{2}}\left[\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]}{-\cancel{p_0}\cancel{r}\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right]} = -\frac{r}{2}\,\frac{\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{1-\cos\frac{\varphi}{2}} \quad [A2.4]$$

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO PER P_y^d SI TROVA CHE IL CONTRIBUTO AL MOMENTO RISPETTO A O VALE:

$$M_{z(0)}^{y,d} = \int_0^{\varphi/2} r\sin\vartheta\, p_0 \sin\vartheta\, r\, d\vartheta = p_0 r^2 \int_0^{\varphi/2} \sin^2 d\vartheta$$

OVVERO, A CONTI FATTI, UN VALORE EGUALE A QUELLO FORNITO DALLA [A.2.3]:

$$\boxed{M_{z(0)}^{y,d} = \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]} \quad [A2.5]$$

E P_y^d RISULTA APPLICATA A UNA DISTANZA d_x^d DAL PUNTO O PARI A:

$$d_x^d = \frac{M_{z(0)}^{y,d}}{P_y^d} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{p_0} r^{\cancel{2}}\left(\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{+\cancel{p_0}\cancel{r}\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right]} = +\frac{r}{2}\,\frac{\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{1-\cos\frac{\varphi}{2}} \quad [A2.6]$$

PER QUANTO RIGUARDA IL CONTRIBUTO DELLA SOLA RISULTANTE P_x AL MOMENTO RISPETTO AL POLO O SI OTTIENE:

$$M_{z(0)}^{x} = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} r\cos\vartheta\, p_0\cos\vartheta\, r\, d\vartheta = p_0 r^2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = 2 p_0 r^2 \int_0^{\varphi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

↑ LA FUNZIONE PARI $\cos^2\vartheta$ È INTEGRATA SU UN INTERVALLO SIMMETRICO

PERTANTO

$$M_{z(0)}^{x} = 2p_0 r^2 \int_0^{\varphi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} p_0 r^2 \int_0^{\varphi/2} (1+\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = p_0 r^2 \left[\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_0^{\varphi/2}$$

SICCHÉ

$$M_{z(0)}^{x} = p_0 r^2 \left\{\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left[\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\varphi/2}\right\} \Rightarrow \boxed{M_{z(0)}^{x} = p_0 r^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)} \quad [A2.7]$$

QUINDI P_x È APPLICATA A UNA DISTANZA DAL PUNTO O PARI A:

$$d_y = \frac{M_{z(0)}^{x}}{P_x} = \frac{\cancel{p_0} r^{\cancel{2}}\left(\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{2\cancel{p_0}\cancel{r}\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{2}\,\frac{\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad [A2.8]$$

TENUTO CONTO CHE $P_x = 2p_0 r \sin\frac{\varphi}{2}$; SI OSSERVA CHE $d_y \leq r$ IN QUANTO

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{r}{2}\,\frac{\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = r.$$

D'ALTRA PARTE SE SI CONSIDERA CHE $P_y^s + P_y^d = 0$ SI TROVA CHE ALLA RISULTANTE

TOTALE CONTRIBUISCE SOLO P_x.

PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO RISULTANTE E' INVECE:

$$M_{z(0)} = M_{z(0)}^{y,d} + M_{z(0)}^{y,s} + M_{z(0)}^{x} = \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right] + \frac{1}{2} p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right] +$$

$$+ p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

CIOE':

$$M_{z(0)} = p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \cancel{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right] + p_0 r^2 \left[\frac{\varphi}{2} + \cancel{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right] \Rightarrow \boxed{M_{z(0)} = 2 p_0 r^2 \frac{\varphi}{2}.} \quad [A2.9]$$

QUINDI SE CI SI RIFERISCE AL MOMENTO RISULTANTE COMPLESSIVO (CHE RISENTE DEI CONTRIBUTI DI P_y^S E DI P_y^D, SI HA CHE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE COMPLESSIVA P_x DISTA DAL PUNTO (O) DI UNA QUANTITA' d^* COSI' DEFINITA:

$$d^* = \frac{M_{z(0)}}{P_x} = \frac{\cancel{2}\cancel{p_0}\, r^{\cancel{2}}\frac{\varphi}{2}}{\cancel{2}\cancel{p_0}\,\cancel{r}\sin\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow \boxed{d^* = r\,\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}} \geq r \qquad [A2.10]$$

CONSIDERAZIONI SIMILI SI APPLICANO ALLA DETERMINAZIONE DEL "CENTRO DI TAGLIO" A PARTIRE DALLA DETERMINAZIONE DELLA RISULTANTE DELLE TENSIONI TANGENZIALI IN SEZIONI A PROFILO SOTTILE A FORMA DI "C" O DI "U".

NELLA TABELLA SEGUENTE SONO RIPORTATI, PER DIVERSI ANGOLI DI SEMIAPERTURA I VALORI DELLA SEMICORDA, c, DELLA SAETTA, f E DELLE DISTANZE d_x, d_y, d^*.

Semiapertura arco, φ/2 [gradi]	Semiapertura arco, φ/2 [rad]	Distanza fra polo (D) e centro(O) h=r/cos(φ/2)	Semicorda c=r*sin(φ/2)	d_x= (r/2)*((φ/2)-sin(φ/2)*cos(φ/2))/(1-cos(φ/2))	d_x/c	d_y= (r/2)*((φ/2) + sin(φ/2)*cos(φ/2))/sin(φ/2)	r*cos(φ/2)	d_y/r*cos(φ/2)	d^* = r*(φ/2)/sin(φ/2)
0	0,0000	1,000000	0,017452	0,000000	0,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,0175	1,000152	0,034899	0,011635	0,333389	0,999949	0,999848	1,000102	1,000051
2	0,0349	1,000610	0,052336	0,023268	0,444584	0,999797	0,999391	1,000406	1,000203
3	0,0524	1,001372	0,069756	0,034895	0,500246	0,999543	0,998630	1,000915	1,000457
4	0,0698	1,002442	0,087156	0,046516	0,533707	0,999188	0,997564	1,001628	1,000813
5	0,0873	1,003820	0,099833	0,058126	0,582230	0,998733	0,996195	1,002548	1,001270
5,730 = 0,1 rad	**0,1000**	1,005021	0,104528	0,066589	0,637041	0,998336	0,995004	1,003349	1,001669
6	0,1047	1,005508	0,121869	0,069724	0,572120	0,998176	0,994522	1,003674	1,001830
7	0,1222	1,007510	0,139173	0,081307	0,584215	0,997519	0,992546	1,005010	1,002492
8	0,1396	1,009828	0,156434	0,092873	0,593685	0,996762	0,990268	1,006558	1,003257
9	0,1571	1,012465	0,173648	0,104419	0,601323	0,995906	0,987688	1,008320	1,004124
10	0,1745	1,015427	0,190809	0,115942	0,607636	0,994951	0,984808	1,010300	1,005095
11	0,1920	1,018717	0,207912	0,127442	0,612960	0,993898	0,981627	1,012501	1,006170
12	0,2094	1,022341	0,224951	0,138914	0,617528	0,992748	0,978148	1,014927	1,007348
13	0,2269	1,026304	0,241922	0,150356	0,621506	0,991501	0,974370	1,017582	1,008632
14	0,2443	1,030614	0,247404	0,161767	0,653856	0,990158	0,970296	1,020470	1,010021
14,324 = 0,25 rad	**0,2500**	1,032085	0,258819	0,165456	0,639272	0,989703	0,968912	1,021457	1,010493
15	0,2618	1,035276	0,275637	0,173143	0,628154	0,988720	0,965926	1,023599	1,011515
20	0,3491	1,064178	0,358368	0,229425	0,640194	0,980146	0,939693	1,043050	1,020600
25	0,4363	1,103378	0,438371	0,284496	0,648984	0,969379	0,906308	1,069591	1,032450
28,648 = 0,50 rad	**0,5000**	1,139494	0,484810	0,323747	0,667781	0,960249	0,877583	1,094198	1,042915
30	0,5236	1,154701	0,515038	0,338072	0,656402	0,956611	0,866025	1,104600	1,047198
35	0,6109	1,220775	0,587785	0,389883	0,663308	0,942082	0,819152	1,150069	1,065011
40	0,6981	1,305407	0,656059	0,439673	0,670173	0,926072	0,766044	1,208902	1,086100
42,972 = 0,75 rad	**0,7500**	1,366701	0,694658	0,468211	0,674016	0,915989	0,731689	1,251883	1,100290
45	0,7854	1,414214	0,719340	0,487205	0,677295	0,908914	0,707107	1,285398	1,110721
50	0,8727	1,555724	0,777146	0,532261	0,684892	0,890985	0,642788	1,386127	1,139183
57,296 = 1,00 rad	**1,0000**	1,850816	0,848048	0,593163	0,699445	0,864349	0,540302	1,599750	1,188395
60	1,0472	2,000000	0,874620	0,614185	0,702231	0,854600	0,500000	1,709200	1,209200
70	1,2217	2,923804	0,945519	0,684167	0,723590	0,821079	0,342020	2,400675	1,300138
80	1,3963	5,758770	0,987688	0,741363	0,750604	0,795726	0,173648	4,582401	1,417803
90	1,5708	∞	1,000000	0,785398	0,785398	0,785398	0,000000	∞	1,570796

TABELLA: Posizione rispetto al centro O dei punti di applicazione delle risultanti verticali P_y [d_x], della risultante verticale P_x [d_y], e della risultante complessiva [d^*], riferita ai parametri dell'arco per r=1.