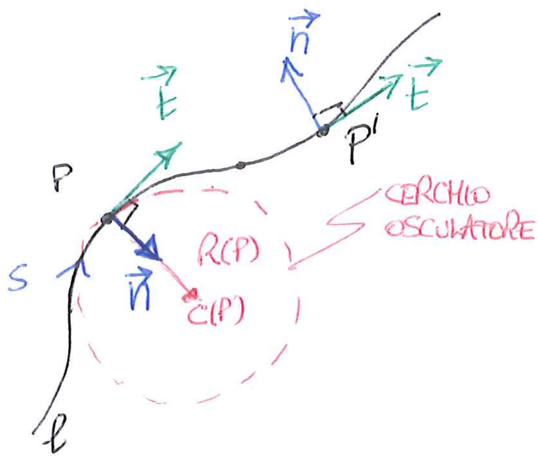
AZIONI INTERNE IN TRAVI PIANE AD ASSE CURVO.

NELLE TRAVI PIANE AD ASSE CURVO LE DIREZIONI SECONDO CUI AGISCONO LA AZIONE ASSIALE, N, E L'AZIONE TAGLIANTE, T, VARIANO CON CONTINUITÀ DA PUNTO A PUNTO.

INFATTI SE SI CONSIDERA LA LINEA D'ASSE DELLA TRAVE COME UNA GENERICA CURVA PIANA, È NOTO CHE PER OGNI PUNTO DI TALE CURVA È POSSIBILE INDIVIDUARE 2 VERSORI (CIOÈ VETTORI UNITARI) MUTUAMENTE ORTOGONALI: IL VERSORE TANGENTE, $\vec{t}$ CHE È ALLINEATO ALLA TANGENTE GEOMETRICA ALLA CURVA STESSA NEL PUNTO DATO, E HA IL VERSO FISSATO DA QUELLO DI PERCORRENZA DELLA CURVA (ASCISSA CURVILINEA CRESCENTE); E IL VERSORE NORMALE, PERPENDICOLARE AL PRECEDENTE E DIRETTO, PUNTO PER PUNTO, VERSO IL CENTRO DI CURVATURA (LOCALE)

IL CENTRO DI CURVATURA È IL CENTRO DEL CERCHIO OSCULATORE, CIOÈ DELLA CIRCONFERENZA CHE, LOCALMENTE, APPROSSIMA CON LA MAGGIORE ACCURATEZZA LA CURVA DATA:



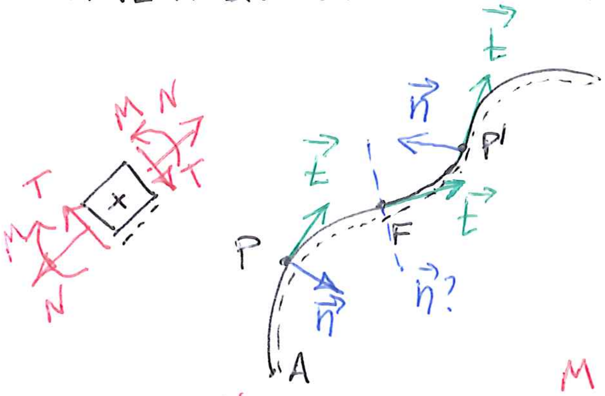
SI OSSERVA CHE C(P) È IL CENTRO DEL CERCHIO OSCULATORE (RELATIVO AL PUNTO P), DI RAGGIO R(P); LA CURVATURA ALLA LINEA ℓ NEL PUNTO P È ALLORA DATA DAL RECIPROCO DEL RAGGIO R(P):

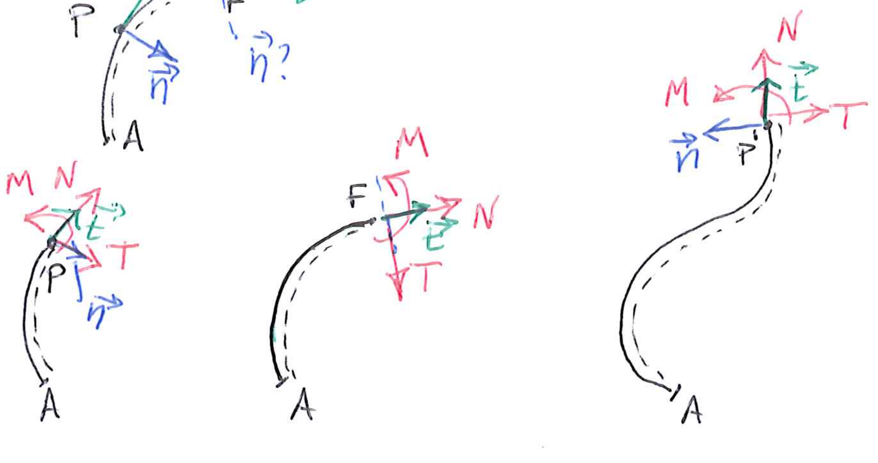
$$\chi = \chi(P) = \frac{1}{R(P)}$$

SE LA LINEA ℓ È RETTA, ALLORA $\chi = 0$ IN OGNI SUO PUNTO, IL CHE SIGNIFICA CHE IL RAGGIO DEL CERCHIO OSCULATORE DIVIENE ∞.

$\vec{t}$ ED $\vec{n}$ IDENTIFICANO IN OGNI PUNTO DELLA LINEA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INTRINSECO; SI OSSERVI CHE $\vec{n}$ CAMBIA VERSO PASSANDO ATTRAVERSO UN PUNTO DI FLESSO, CIOÈ LADDOVE IL CENTRO DI CURVATURA SI SPOSTA DA UN LATO ALL'ALTRO DELLA LINEA ℓ (COME ACCADE IN FIGURA PASSANDO DAL PUNTO P AL PUNTO P').

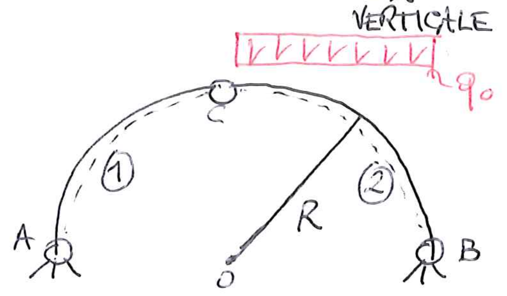
NELL'AMBITO DELLA LINEA D'ASSE DELLA TRAVE AD ASSE CURVO, SI IDENTIFICA UNIVOCAMENTE LA DIREZIONE DI N CON QUELLA DI $\vec{t}$; PER QUANTO RIGUARDA T, FISSATE LE FIBRE DI RIFERIMENTO QUESTA RISULTA ESSERE UNIVOCAMENTE DETERMINATA, INDIPENDENTEMENTE DAL VERSO DI $\vec{n}$, INDETERMINATO NEI PUNTI DI FLESSO, COME È INDICATO NEL SEGUITO.





CI SI LIMITA, PER SEMPLICITÀ, A CONSIDERARE TRAVI PIANE A CURVATURA COSTANTE, CIOÈ REALIZZATE CON ARCHI DI CIRCONFERENZA E SI CONSIDERANO ALCUNE APPLICAZIONI DOVE LE AZIONI INTERNE VENGONO CALCOLATE CON IL METODO DIRETTO, OVVERO OPERANDO OPPORTUNI SEZIONAMENTI DELLA TRAVE (UNA VOLTA ACCERTATO CHE ESSA SI TROVI IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO) E SCRIVENDO LE EQUAZIONI CARDINALI (OPPORTUNAMENTE PROIETTATE NELLE DIREZIONI TANGENTE E NORMALE ALLA LINEA D'ASSE) PER UNA DELLE DUE PORZIONI (COMPLEMENTARI) IN CUI LA TRAVE (O LA STRUTTURA) RISULTA SUDDIVISA.

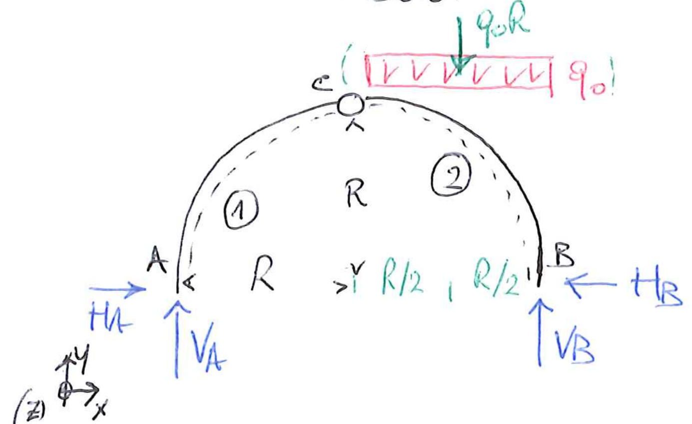
A) ARCO A 3 CERNIERE CON LINEA D'ASSE SEMICIRCOLARE DI RAGGIO R E SOGGETTO SULLA METÀ DESTRA A UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO IN PROIEZIONE VERTICALE:



GDL = 3×2 = 6
GDV = 2(A) + 2(B) + 2(C) = 6 } GDL = GDV

STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE POICHÉ LE 3 CERNIERE NON SONO ALLINEATE).

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



IL CARICO DISTRIBUITO, RISULTANDO APPLICATO INTERAMENTE AL CORPO RIGIDO ② PUÒ ESSERE SOSTITUITO, AL FINE DI DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI, CON LA SUA RISULTANTE APPLICATA NEL PUNTO MEDIO DELLA DISTRIBUZIONE, VISTO CHE QUESTA È UNIFORME.

PER DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI SI OSSERVA CHE SI TRATTA DI UNA STRUTTURA ARTICOLATA: ALLE 3 EQUAZIONI CARDINALI ~~PER~~ (SCRITTE) PER L'INTERA STRUTTURA, ASSIMILATA A UN UNICO CORPO RIGIDO SI AGGIUNGE UN'EQUAZIONE AUSILIARIA, CHE ESPRIME LA CONDIZIONE DI MANCATO SFRUTTAMENTO DELLA ARTICOLAZIONE INTERNA IN C:

$$
① \cup ② \quad \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - H_B = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 R + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -q_0 R \dfrac{3R}{2} + V_B \cdot 2R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - H_B = 0 & [1] \\ V_A + V_B = q_0 R & [2] \\ 2 V_B \cancel{R} = \dfrac{3}{2} q_0 R^{\cancel{2}} & [3] \end{cases}
$$

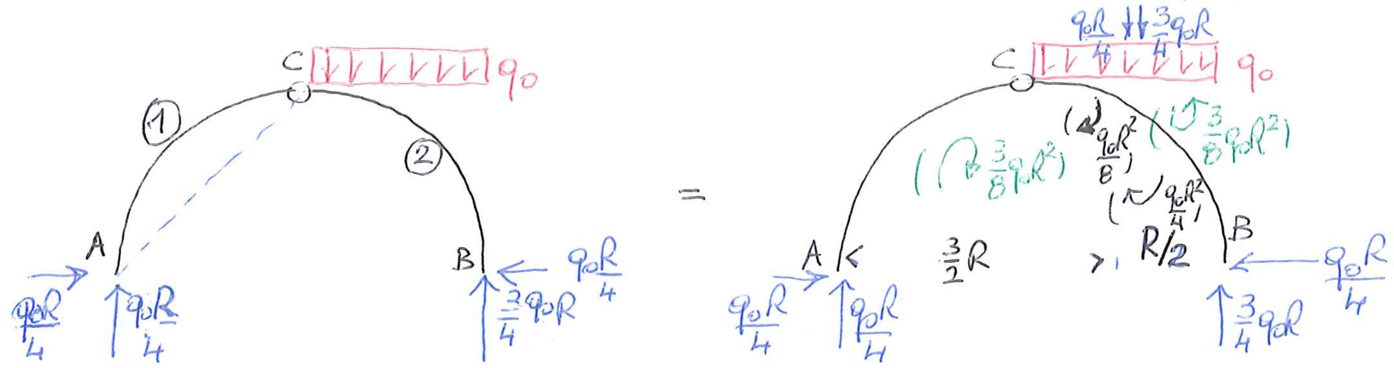
EQ. AUSILIARIA $\quad M_{z(C)}^{①} = 0 \quad H_A \cdot R - V_A \cdot R = 0 \qquad [4]$

(OVVERO $M_{z(C)}^{②} = 0$, PIÙ COMPLICATA E MENO CONVENIENTE DA USARE DELLA [4]).

NE SEGUE $\quad \underline{V_B = \frac{3}{4} q_0 R} \;;\; \underline{V_A = \frac{1}{4} q_0 R} \;;\; \underline{H_A = \frac{1}{4} q_0 R} \;;\; \underline{H_B = \frac{1}{4} q_0 R}$

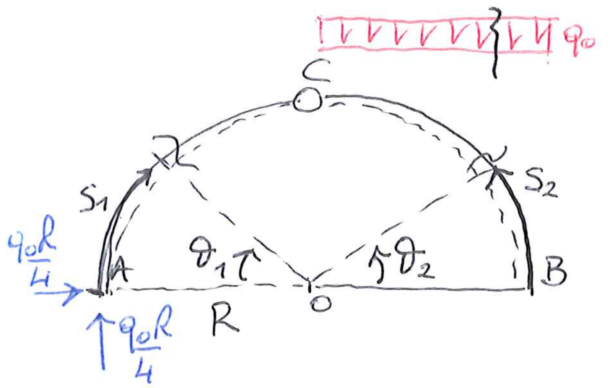
SI OSSERVA CHE, ESSENDO I VALORI DI HA E VA EGUALI, SI HA CHE LA RISULTANTE È DIRETTA COME LA CORDA CHE CONGIUNGE A E C

IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



SI OSSERVA CHE LE FORZE ORIZZONTALI SI BILANCIANO A LIVELLO DI INTERA STRUTTURA, COME PURE LE FORZE VERTICALI; PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI, SI OSSERVA CHE LE 2 FORZE DI VALORE $\frac{q_0R}{4}$ DANNO LUOGO A UN MOMENTO DI VALORE $-\frac{3}{8}q_0R^2$ (ORARIO), BILANCIATO DA QUELLO PRODOTTO DALLE 2 FORZE EGUALI E OPPOSTE DI VALORE $3/4\, q_0R$, APPLICATE A DISTANZA $R/2$; PER QUANTO RIGUARDA LE DUE TRAVI PRESE SINGOLARMENTE, NELLA ① LE REAZIONI APPLICATE IN Ⓐ, COMBINATE, HANNO RETTA D'AZIONE PASSANTE PER Ⓒ E CIÒ GARANTISCE L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI; PER LA ② IL MOMENTO PRODOTTO DALLA COPPIA $\frac{3}{4}q_0R\cdot\frac{R}{2}$ È BILANCIATO DAI 2 MOMENTI $-q_0\frac{R^2}{8}$ E $-q_0\frac{R^2}{4}$.

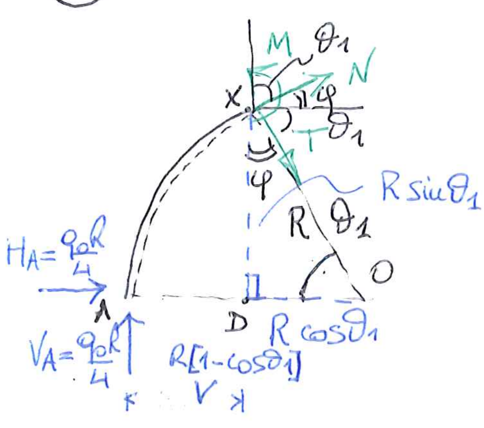
PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE, IN LUOGO DELLE ASCISSE CURVILINEE s_1 E s_2 (CON $0<s_1<R\frac{\pi}{2}$ [Ⓐ→Ⓒ], $0<s_2<R\frac{\pi}{2}$ [Ⓑ→Ⓒ]) CONVIENE UTILIZZARE GLI ANGOLI AL CENTRO ϑ_1 E ϑ_2, OSSERVANDO CHE $s_1=\vartheta_1R$; $s_2=\vartheta_2R$; DOVE $0<\vartheta_1<\frac{\pi}{2}$; $0<\vartheta_2<\frac{\pi}{2}$.



OCCORRE INFATTI SUDDIVIDERE LA STRUTTURA IN DUE PUNTI GENERICI, L'UNO COLLOCATO NEL SEMIARCO DI SINISTRA (PRIVO DI CARICHI IN CAMPATA), L'ALTRO NEL SEMIARCO DI DESTRA (SOGGETTO AL CARICO DISTRIBUITO).

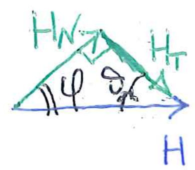
SI ESAMINA NEL DETTAGLIO COME OPERARE SUI DUE TRATTI.

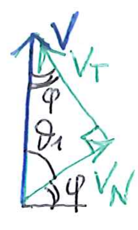
Ⅰ $\quad A \to C \quad (0<\vartheta_1<\frac{\pi}{2})$



SI TRATTA DI PROIETTARE LE REAZIONI VINCOLARI NELLE DIREZIONI DI N E DI T.
ALLO SCOPO SI OSSERVI QUANTO SEGUE:

$$\vartheta_1+\varphi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}-\vartheta_1 \Rightarrow \begin{cases}\cos\varphi=\sin\vartheta_1\\ \sin\varphi=\cos\vartheta_1\end{cases}$$





$V_N=V\cos\vartheta_1$

$V_T=V\sin\vartheta_1$

NB: $\overline{DO}=R\cos\vartheta_1$
$\overline{AO}=R$
$\overline{AD}=R-R\cos\vartheta_1=R[1-\cos\vartheta_1]$
$\overline{XD}=R\sin\vartheta_1$

$H_N=H\sin\vartheta_1$

$H_T=H\cos\vartheta_1$

PERTANTO $\quad H_N=\frac{q_0R}{4}\sin\vartheta_1 \qquad V_N=\frac{q_0R}{4}\cos\vartheta_1$

$H_T=\frac{q_0R}{4}\cos\vartheta_1 \qquad V_T=\frac{q_0R}{4}\sin\vartheta_1$

SI TROVA QUINDI:

$$\begin{cases} \nearrow R_{/\!/} = 0 \quad H_N + V_N + N(\vartheta_1) = 0 & N(\vartheta_1) = -\frac{q_0 R}{4}\sin\vartheta_1 - \frac{q_0 R}{4}\cos\vartheta_1 = -\frac{q_0 R}{4}[\sin\vartheta_1 + \cos\vartheta_1] \\ \nwarrow R_{\perp} = 0 \quad -H_T + V_T - T(\vartheta_1) = 0 & T(\vartheta_1) = -\frac{q_0 R}{4}\cos\vartheta_1 + \frac{q_0 R}{4}\sin\vartheta_1 = -\frac{q_0 R}{4}[\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_1] \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad -V_A R[1-\cos\vartheta_1] + H_A R\sin\vartheta_1 + M(\vartheta_1) = 0 & M(\vartheta_1) = \frac{q_0 R^2}{4}[1-\cos\vartheta_1] - \frac{q_0 R^2}{4}\sin\vartheta_1 \end{cases}$$

PERTANTO SI OTTIENE:

$$\boxed{\begin{aligned} N(\vartheta_1) &= -\frac{q_0 R}{4}[\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1] \\ T(\vartheta_1) &= -\frac{q_0 R}{4}[\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_1] \\ M(\vartheta_1) &= \frac{q_0 R^2}{4}[1 - \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_1] \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} [5] \\ [6] \\ [7] \end{matrix}$$

$$0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$$

NOTA BENE:

$N(\vartheta_1 = 0) = -\frac{q_0 R}{4}$

$N(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}) = -\frac{q_0 R}{4}$

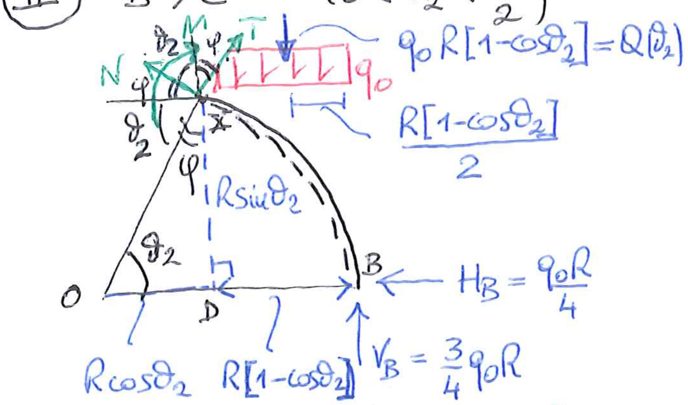
$T(\vartheta_1 = 0) = -\frac{q_0 R}{4}$

$T(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}) = +\frac{q_0 R}{4}$

$M(\vartheta_1 = 0) = 0; \quad M(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}) = 0$

SI OSSERVI CHE PER OTTENERE LA [6] SI DEVE TENERE CONTO CHE H_T E V_T HANNO VERSI OPPOSTI; PER ARRIVARE ALLA [7] SI OSSERVA CHE NON OCCORRE PROIETTARE LE REAZIONI VINCOLARI H_A E V_A: È INFATTI IMMEDIATO RICONOSCERE CHE RISPETTO AL PUNTO ⓧ, DOVE SI VALUTA M_z, I RISPETTIVI BRACCI VALGONO $R\sin\vartheta_1$ E $R(1-\cos\vartheta_1)$ (CIOÈ IL RAGGIO MOLTIPLICATO PER IL COMPLEMENTO A 1 DI $\cos\vartheta_1$).

(II) $B \rightarrow C \qquad (0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2})$



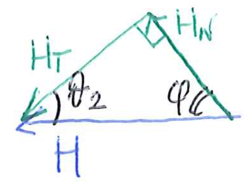
SI TRATTA ANCORA DI PROIETTARE LE FORZE AGENTI NELLE DIREZIONI DI N E T, TENENDO CONTO CHE SULLA PORZIONE DESTRA AGISCE LA PARTE DI CARICO DISTRIBUITO LA CUI IMPRONTA SI "PROIETTA" SUL TRATTO CONSIDERATO.

COME IN PRECEDENZA SI TROVA:

$$\vartheta_2 + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta_2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \sin\vartheta_2 \\ \sin\varphi = \cos\vartheta_2 \end{cases}$$

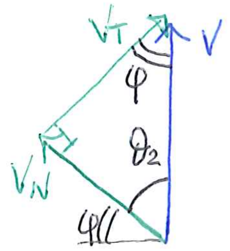
NOTA: $\overline{OD} = R\cos\vartheta_2$; $\overline{DB} = R[1-\cos\vartheta_2]$

SI OSSERVI COME IN PRECEDENZA CHE IL BRACCIO DI H_B RISPETTO A ⓧ VALE $R\sin\vartheta_2$; IL BRACCIO DI V_B RISPETTO A ⓧ È DATO DA $R[1-\cos\vartheta_2]$; IL BRACCIO DI $Q(\vartheta_2)$ È PARI A $R\frac{[1-\cos\vartheta_2]}{2}$.



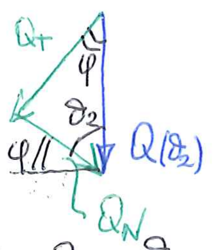
$H_N = H\sin\vartheta_2$

$H_T = H\cos\vartheta_2$



$V_N = V\cos\vartheta_2$

$V_T = V\sin\vartheta_2$



$Q_N = Q\cos\vartheta_2$

$Q_T = Q\sin\vartheta_2$

PERTANTO SI TROVA:

$$H_N = \frac{q_0 R}{4}\sin\vartheta_2 \qquad V_N = \frac{3}{4} q_0 R\cos\vartheta_2 \qquad Q_N = q_0 R[1-\cos\vartheta_2]\cos\vartheta_2$$

$$H_T = \frac{q_0 R}{4}\cos\vartheta_2 \qquad V_T = \frac{3}{4} q_0 R\sin\vartheta_2 \qquad Q_T = q_0 R[1-\cos\vartheta_2]\sin\vartheta_2.$$

IN QUESTO CASO SI HA:

$$
\begin{cases}
\nwarrow R_{/\!/} = 0 \quad N(\vartheta_2) - Q_N + V_N + H_N = 0 \\
\nearrow R_{\perp} = 0 \quad T(\vartheta_2) - Q_T + V_T - H_T = 0 \\
\circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad -M(\vartheta_2) - Q(\vartheta_2)\dfrac{R[1-\cos\vartheta_2]}{2} + V_B \cdot R[1-\cos\vartheta_2] - H_B R\sin\vartheta_2 = 0
\end{cases}
$$

DA CUI SEGUE:

$$N(\vartheta_2) = q_0 R[1-\cos\vartheta_2]\cos\vartheta_2 - \frac{3}{4} q_0 R\cos\vartheta_2 - \frac{q_0 R}{4}\sin\vartheta_2$$

$$T(\vartheta_2) = q_0 R[1-\cos\vartheta_2]\sin\vartheta_2 - \frac{3}{4} q_0 R\sin\vartheta_2 + \frac{q_0 R}{4}\cos\vartheta_2$$

$$M(\vartheta_2) = -\frac{q_0 R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]^2 + \frac{3}{4} q_0 R^2[1-\cos\vartheta_2] - \frac{q_0 R^2}{4}\sin\vartheta_2$$

CHE CON OPPORTUNE FATTORIZZAZIONI DIVENGONO:

$$N(\vartheta_2) = q_0 R\left[\cos\vartheta_2 - \cos^2\vartheta_2 - \frac{3}{4}\cos\vartheta_2 - \frac{1}{4}\sin\vartheta_2\right]$$

$$T(\vartheta_2) = q_0 R\left[\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 - \frac{3}{4}\sin\vartheta_2 + \frac{1}{4}\cos\vartheta_2\right]$$

$$M(\vartheta_2) = -\frac{q_0 R^2}{4}\left\{2\underbrace{[1-\cos\vartheta_2]^2}_{1-2\cos\vartheta_2+\cos^2\vartheta_2} - 3[1-\cos\vartheta_2] + \sin\vartheta_2\right\}$$

O ANCHE, SEMPLIFICANDO E ACCORPANDO I TERMINI SIMILI

$$N(\vartheta_2) = -\frac{q_0 R}{4}\left[\sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2 + 4\cos^2\vartheta_2\right] \quad [8]$$

$$T(\vartheta_2) = \frac{q_0 R}{4}\left[\sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_2 - 4\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2\right] \quad [9] \qquad 0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$$

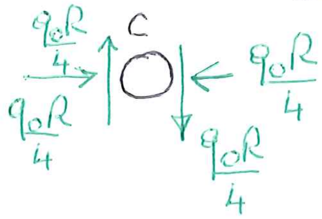
$$M(\vartheta_2) = \frac{q_0 R^2}{4}\left[1 - \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_2 - 2\cos^2\vartheta_2\right] \quad [10]$$

SI OSSERVA CHE:

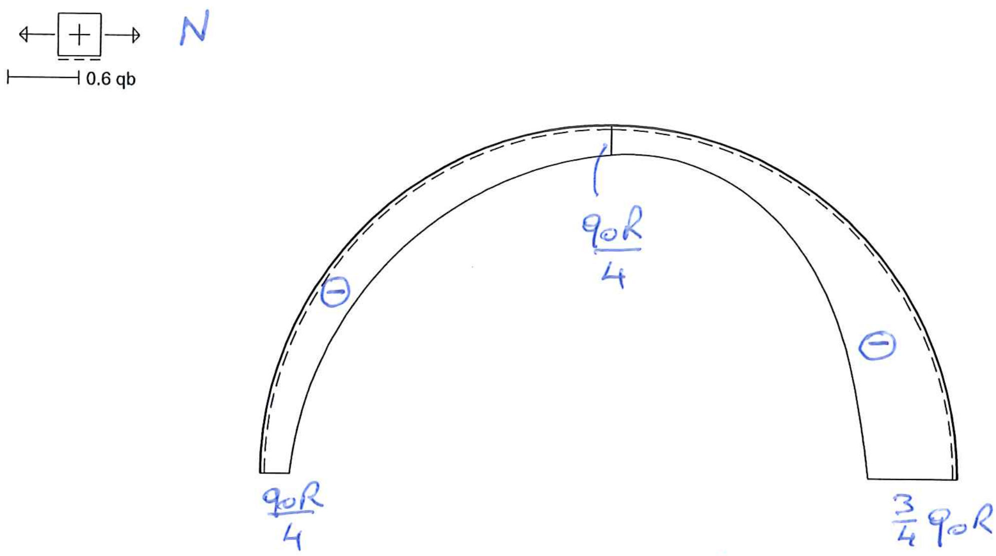
$$N(\vartheta_2 = 0) = -\frac{3}{4} q_0 R \qquad T(\vartheta_2 = 0) = \frac{q_0 R}{4} \qquad M(\vartheta_2 = 0) = 0$$

$$N\left(\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{q_0 R}{4} \qquad T\left(\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{q_0 R}{4} \qquad M\left(\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

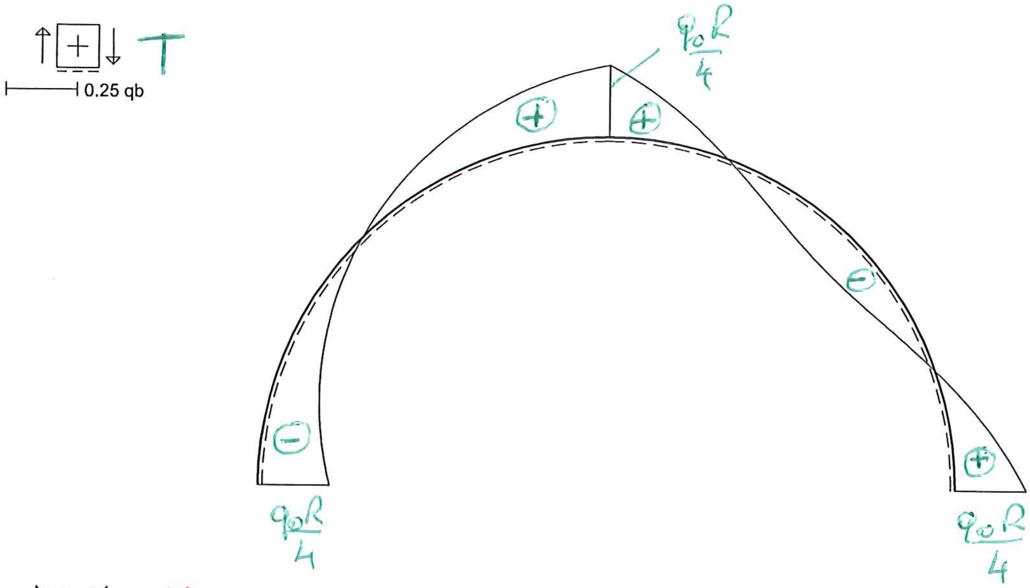
PERTANTO IL MOMENTO FLETTENTE RISULTA NULLO IN CORRISPONDENZA DI TUTTE LE CERNIERE; L'EQUILIBRIO DEL NODO C È DEL PARI VERIFICATO:



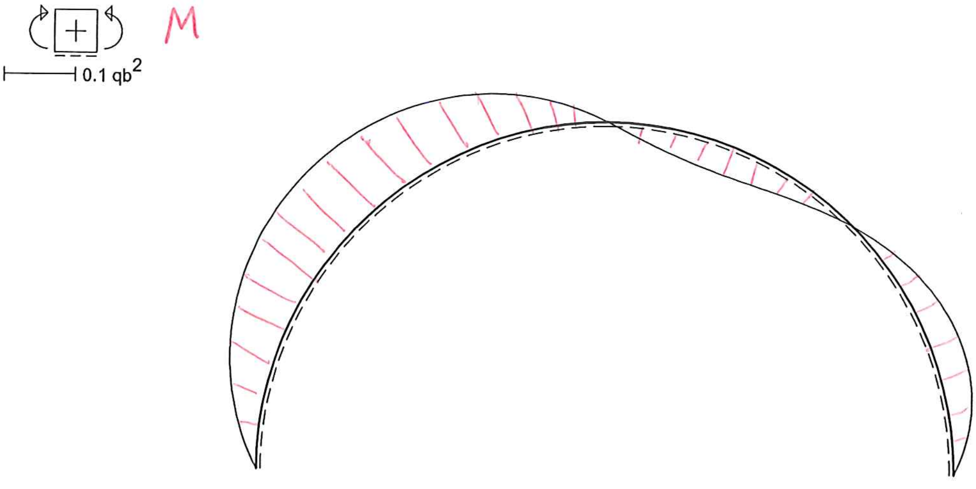
I DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE SONO RIPORTATI NELLA PAGINA SEGUENTE.



N
0.6 qb
$\frac{q_0 R}{4}$
$\frac{q_0 R}{4}$
$\frac{3}{4} q_0 R$

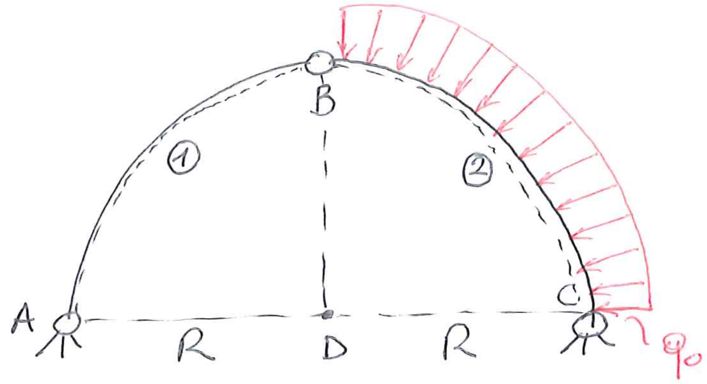


T
0.25 qb
$\frac{q_0 R}{4}$
$\frac{q_0 R}{4}$
$\frac{q_0 R}{4}$



M
0.1 qb^2

B) ARCO CIRCOLARE A 3 CERNIERE SOGGETTO, SULLA METÀ DESTRA A UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO IN DIREZIONE RADIALE (PRESSIONE ESTERNA) 7

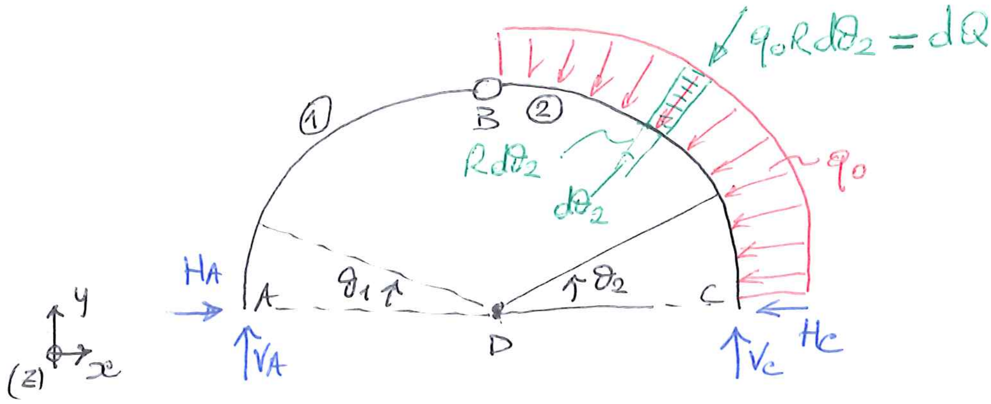


GDL = 2x3 = 6

GDV = 2(A) + 2(C) + 2(B) = 6

⇒ GDL = GDV, STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE POICHÉ LE 3 CERNIERE NON SONO ALLINEATE

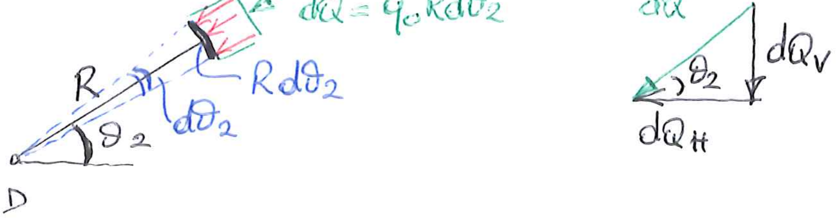
DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



LE REAZIONI VINCOLARI SI CALCOLANO, COME DI CONSUETO, ASSUMENDO CHE LA STRUTTURA SIA UN UNICO CORPO RIGIDO, E AGGIUNGENDO UNA EQUAZIONE AUSILIARIA CHE ASSICURA CHE LA ARTICOLAZIONE OFFERTA DALLA CERNIERA (B) NON SIA SFRUTTATA.

SI OSSERVA PRELIMINARMENTE CHE TUTTE LE RISULTANTI ELEMENTARI DEL CARICO RADIALE, $q_0 R d\vartheta_2$ HANNO RETTA D'AZIONE PASSANTE PER IL PUNTO (D) (CENTRO DELLA SEMI-CIRCONFERENZA), CHE RISULTA QUINDI UN PUNTO IDEALE NELLA SCELTA DEL POLO.

INOLTRE CIASCUNA DI QUESTE RISULTANTI ELEMENTARI È SEMPRE SCOMPONIBILE IN UNA COMPONENTE ORIZZONTALE E IN UNA VERTICALE, VARIABILI A SECONDA DELLA INCLINAZIONE DEL RAGGIO CORRISPONDENTE:



$$dQ_V = dQ \sin\vartheta_2$$
$$dQ_H = dQ \cos\vartheta_2$$

$$(1)\cup(2)\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - H_C - \int_0^{\pi/2} dQ_H = 0 \Rightarrow H_A - H_C - \int_0^{\pi/2} q_0 R \cos\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = 0 & [1] \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_C - \int_0^{\pi/2} dQ_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C - \int_0^{\pi/2} q_0 R \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = 0 & [2] \\ \circlearrowleft M_{z(D)} = 0 & -V_A R + V_C R = 0 \Rightarrow V_A - V_C = 0 & [3] \end{cases}$$

EQ. AUSILIARIA: $M^{(1)}_{z(B)} = 0 \quad -V_A R + H_A R = 0 \Rightarrow V_A - H_A = 0$ [4]

SI CONSIDERANO ORA I DUE INTEGRALI CHE COMPAIONO NELLE [11] E [12]:

$$\int_0^{\pi/2} q_0 R \cos\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = q_0 R \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = q_0 R \left[\sin\vartheta_2\right]_0^{\pi/2} = q_0 R [1-0] = q_0 R$$

$$\int_0^{\pi/2} q_0 R \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = q_0 R \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = q_0 R \left[-\cos\vartheta_2\right]_0^{\pi/2} = q_0 R [0-(-1)] = q_0 R$$

SI OTTIENE QUINDI IL SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE LINEARI:

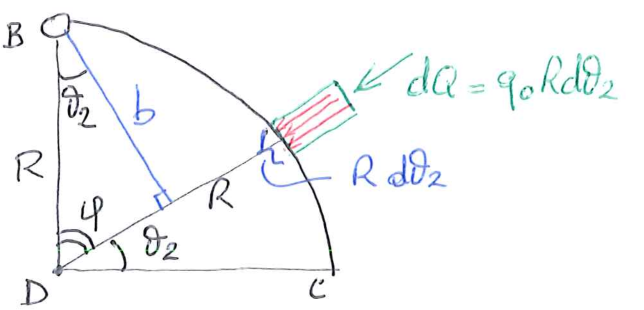
$$\begin{cases} H_A - H_C = q_0 R & [11'] \\ V_A + V_C = q_0 R & [12'] \\ V_A - V_C = 0 & [13'] \\ V_A - H_A = 0 & [14'] \end{cases}$$

SE SI SOMMANO MEMBRO A MEMBRO LA [12'] E LA [13'] SI OTTIENE $2V_A = q_0 R$; SE LE SI SOTTRAE MEMBRO A MEMBRO SI HA INVECE $2V_C = q_0 R$; NE SEGUE, PER SUCCESSIVE SOSTITUZIONI:

$$\underline{V_A = \frac{q_0 R}{2}} \; ; \; \underline{V_C = \frac{q_0 R}{2}} \; ; \; \underline{H_A = \frac{q_0 R}{2}} \; ; \; \underline{H_C = -\frac{q_0 R}{2}} .$$

A SCOPO DI VERIFICA QUESTA VOLTA SI SCRIVE UNA NUOVA EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DEI MOMENTI RISPETTO A UN DIVERSO POLO PER L'INTERA STRUTTURA E SI VERIFICA CHE SIA SODDISFATTA COME UN'IDENTITÀ.

SE SI SCEGLIE COME POLO IL PUNTO B È UTILE OSSERVARE COME SI CALCOLA IL BRACCIO (RISPETTO A B) DELLA RISULTANTE ELEMENTARE DEL CARICO DISTRIBUITO RADIALE:



$$\varphi + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = \cos\vartheta_2 \\ \cos\varphi = \sin\vartheta_2 \end{cases}$$

$$b = R\sin\varphi = R\cos\vartheta_2$$

SI HA QUINDI, OSSERVANDO CHE RISPETTO AL POLO B $\underline{\text{TUTTE}}$ LE REAZIONI VINCOLARI DANNO $\underline{\text{CONTRIBUTO AL MOMENTO}}$:

$$\mathcal{J}\; M_{z(B)}^{①\cup②} \stackrel{?}{=} 0 \quad H_A \cdot R - V_A \cdot R - H_C R + V_C \cdot R - \int_0^{\pi/2} R\cos\vartheta_2 \, dQ \stackrel{?}{=} 0 \quad [15]$$

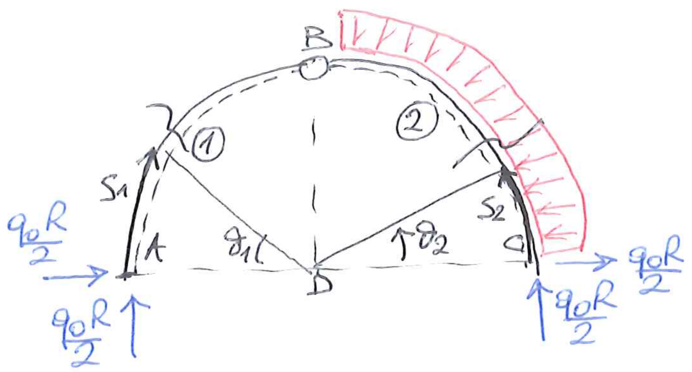
E POICHÉ
$$\int_0^{\pi/2} R\cos\vartheta_2 \, dQ = \int R\cos\vartheta_2 \, q_0 R \, d\vartheta_2 = q_0 R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = q_0 R^2 \left[\sin\vartheta_2\right]_0^{\pi/2}$$

E DUNQUE $\int_0^{\pi/2} R\cos\vartheta_2 \, d\vartheta = q_0 R^2$ SICCHÉ LA [15] DIVIENE:

$$\cancel{\frac{q_0 R}{2} R} - \cancel{\frac{q_0 R}{2} \cdot R} - \left[-\frac{q_0 R}{2}\right] R + \frac{q_0 R}{2} R - q_0 R^2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{q_0 R^2}{2} + \frac{q_0 R^2}{2} - q_0 R^2 = 0 \quad \checkmark$$

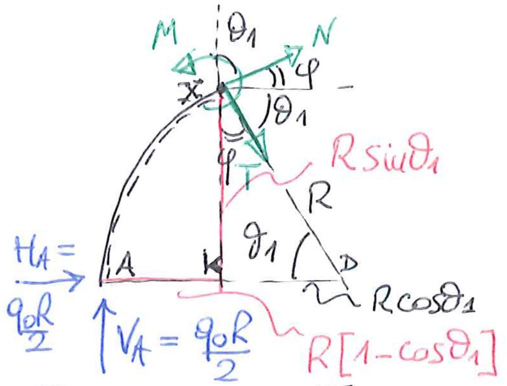
IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO È DUNQUE:



PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE È NECESSARIO PROCEDERE A ROMPERE LA STRUTTURA IN DUE PUNTI, UNO APPARTENENTE ALLA TRAVE ①, L'ALTRO APPARTENENTE ALLA TRAVE ②.

PROCEDENDO CON ORDINE SI TROVA, USANDO SEMPRE COME VARIABILI INDIPENDENTI GLI ANGOLI ϑ_1 E ϑ_2, NOTANDO CHE DA QUESTI SI RICAVANO LE ASCISSE CURVILINEE $S_1 = \vartheta_1 R$; $S_2 = \vartheta_2 R$

(I) $A \rightarrow B \quad \left(0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$

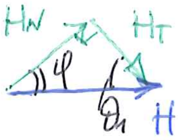


$\overline{AK} = R[1-\cos\vartheta_1]$; $\overline{XK} = R\sin\vartheta_1$

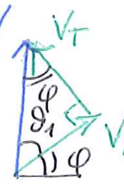
$\overline{DK} = R\cos\vartheta_1$

SI PROIETTANO DI NUOVO LE REAZIONI VINCOLARI NELLE DIREZIONI DI N E DI T, OSSERVANDO ANCORA CHE

$$\vartheta_1 + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \sin\vartheta_1 \\ \sin\varphi = \cos\vartheta_1 \end{cases}$$



$$H_N = H\sin\vartheta_1$$
$$H_T = H\cos\vartheta_1$$
$$V_N = V\cos\vartheta_1$$
$$V_T = V\sin\vartheta_1$$



PERTANTO $H_N = \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_1$; $H_T = \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_1$; $V_N = \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_1$; $V_T = \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_1$

SI OTTIENE QUINDI:

$$\begin{cases} \nearrow R_{//} = 0 & H_N + V_N + N(\vartheta_1) = 0 & N(\vartheta_1) = -\frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_1 - \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_1 & [16] \\ \nwarrow R_{\perp} = 0 & -H_T + V_T - T(\vartheta_1) = 0 & T(\vartheta_1) = -\frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_1 + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_1 & [17] \\ \circlearrowleft M_{z(X)} = 0 & H_A \cdot R\sin\vartheta_1 - V_A R[1-\cos\vartheta_1] + M(\vartheta_1) = 0 & M(\vartheta_1) = -\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_1 + \frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_1] & [18] \end{cases}$$

OVVERO, FATTORIZZANDO I TERMINI:

$$\boxed{\begin{aligned} N(\vartheta_1) &= -\frac{q_0R}{2}[\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1] && [16'] \\ T(\vartheta_1) &= -\frac{q_0R}{2}[\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_1] && [17'] \\ M(\vartheta_1) &= \frac{q_0R^2}{2}[1 - \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_1] && [18'] \end{aligned}} \qquad 0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$$

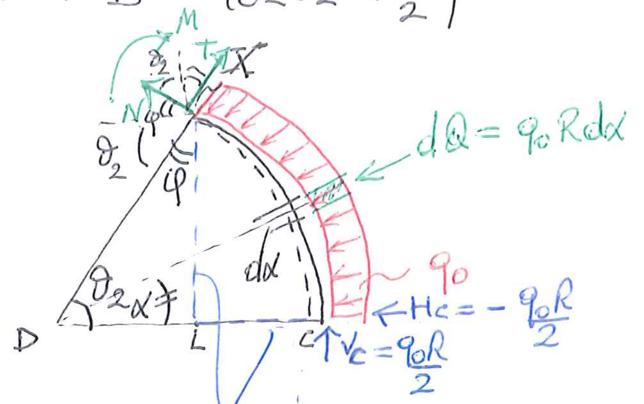
SI OSSERVINO I VALORI AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO:

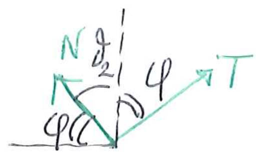
$$N(\vartheta_1 = 0) = -\frac{q_0R}{2}; \qquad N\left(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{q_0R}{2}$$

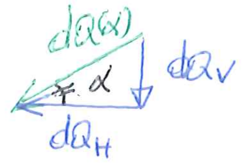
$$T(\vartheta_1 = 0) = -\frac{q_0R}{2}; \qquad T\left(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right) = +\frac{q_0R}{2}$$

$$M(\vartheta_1 = 0) = 0; \quad M\left(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad M\left(\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{q_0R^2}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{q_0R^2}{2}[\sqrt{2} - 1]$$

II $C \rightarrow B \quad (0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2})$



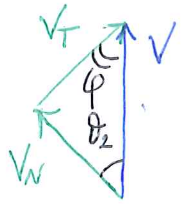




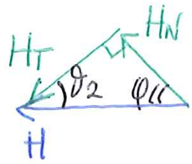
$\overline{DL} = R\cos\vartheta_2$
$\overline{XL} = R\sin\vartheta_2$
$\overline{LC} = R[1-\cos\vartheta_2]$

$dQ_H = dQ(\alpha)\cos\alpha$
$dQ_V = dQ(\alpha)\sin\alpha$

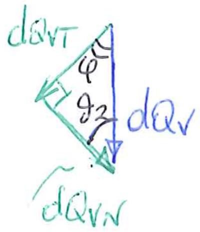
SI TRATTA ANCORA DI PROIETTARE TUTTE LE FORZE NELLA DIREZIONE DI T E IN QUELLA DI N. IN PARTICOLARE SI TROVA:



$V_N = V\cos\vartheta_2$
$V_T = V\sin\vartheta_2$

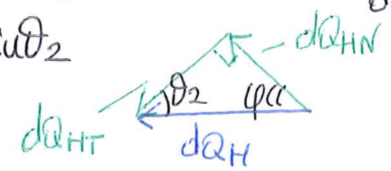


$H_N = H\sin\vartheta_2$
$H_T = H\cos\vartheta_2$



$dQ_{VN} = dQ_V\cos\vartheta_2$
$dQ_{VT} = dQ_V\sin\vartheta_2$

$dQ_{HN} = dQ_H\sin\vartheta_2$
$dQ_{HT} = dQ_H\cos\vartheta_2$



INOLTRE, SOSTITUENDO, SI TROVA:

$V_N = \frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 \qquad H_N = -\frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2 \qquad dQ_{VN} = q_0 R\, d\alpha \sin\alpha\cos\vartheta_2$

$V_T = \frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2 \qquad H_T = -\frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 \qquad dQ_{VT} = q_0 R\, d\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_2$

$dQ_{HN} = q_0 R\, d\alpha\cos\alpha\sin\vartheta_2\ ; \quad dQ_{HT} = q_0 R\, d\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_2 .$

LE EQUAZIONI CHE FORNISCONO LE AZIONI INTERNE SONO DUNQUE:

$$\nwarrow R_{/\!/} = 0 \qquad N(\vartheta_2) - \int_0^{\vartheta_2} dQ_{VN} + \int_0^{\vartheta_2} dQ_{HN} + H_N + V_N = 0 \qquad [19]$$

$$N(\vartheta_2) - \int_0^{\vartheta_2} q_0 R\, d\alpha \sin\alpha\cos\vartheta_2 + \int_0^{\vartheta_2} q_0 R\, d\alpha\cos\alpha\sin\vartheta_2 + \left[-\frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2\right] + \frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 = 0$$

$$N(\vartheta_2) - q_0 R\left[\int_0^{\vartheta_2}\sin\alpha\, d\alpha\right]\cos\vartheta_2 + q_0 R\left[\int_0^{\vartheta_2}\cos\alpha\, d\alpha\right]\sin\vartheta_2 - \frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2 + \frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 = 0$$

$$N(\vartheta_2) - q_0 R\left[-\cos\alpha\right]_0^{\vartheta_2}\cos\vartheta_2 + q_0 R\left[\sin\alpha\right]_0^{\vartheta_2}\sin\vartheta_2 - \frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2 + \frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 = 0$$

$$N(\vartheta_2) - q_0 R\left[1-\cos\vartheta_2\right]\cos\vartheta_2 + q_0 R\sin^2\vartheta_2 - \frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2 + \frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 = 0$$

$$N(\vartheta_2) - q_0 R\cos\vartheta_2 + \underbrace{q_0 R\cos^2\vartheta_2 + q_0 R\sin^2\vartheta_2}_{q_0 R} - \frac{q_0 R}{2}\sin\vartheta_2 + \frac{q_0 R}{2}\cos\vartheta_2 = 0$$

DA CUI SEGUE:

$$N(\vartheta_2) = q_0 R\cos\vartheta_2 - q_0R + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 - \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2$$

$$N(\vartheta_2) = \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 - q_0R$$

$$N(\vartheta_2) = \frac{q_0R}{2}\left[\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2 - 2\right]$$

$$\nearrow R_\perp = 0 \quad T(\vartheta_2) - \int_0^{\vartheta_2} dQ_{VT} - \int_0^{\vartheta_2} dQ_{HT} - H_T + V_T = 0 \qquad [20]$$

$$T(\vartheta_2) - \int_0^{\vartheta_2} q_0R\,d\alpha\,\sin\alpha\sin\vartheta_2 - \int_0^{\vartheta_2} q_0R\,d\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_2 - \left[-\frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2\right] + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 = 0$$

$$T(\vartheta_2) - q_0R\left[\int_0^{\vartheta_2}\sin\alpha\,d\alpha\right]\sin\vartheta_2 - q_0R\left[\int_0^{\vartheta_2}\cos\alpha\,d\alpha\right]\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 = 0$$

$$T(\vartheta_2) - q_0R\left[-\cos\alpha\right]_0^{\vartheta_2}\sin\vartheta_2 - q_0R\left[\sin\alpha\right]_0^{\vartheta_2}\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 = 0$$

$$T(\vartheta_2) - q_0R\left[1-\cos\vartheta_2\right]\sin\vartheta_2 - q_0R\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 = 0$$

$$T(\vartheta_2) - q_0R\sin\vartheta_2 + q_0R\cancel{\cos\vartheta_2\sin\vartheta_2} - q_0R\cancel{\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2} + \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2 + \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 = 0$$

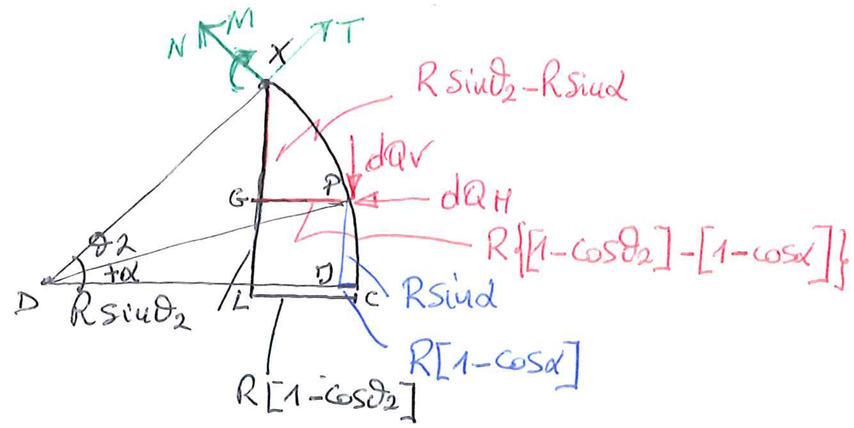
DA CUI SEGUE:

$$T(\vartheta_2) = q_0R\sin\vartheta_2 - \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2 - \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2$$

$$T(\vartheta_2) = \frac{q_0R}{2}\sin\vartheta_2 - \frac{q_0R}{2}\cos\vartheta_2$$

$$T(\vartheta_2) = \frac{q_0R}{2}\left[\sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2\right]$$

PER IL CALCOLO DEL MOMENTO, AVENDO SCOMPOSTO LA RISULTANTE ELEMENTARE NEI 2 CONTRIBUTI dQ_V E dQ_H, SI OSSERVA CHE I RELATIVI BRACCI RISPETTO AL PUNTO (X) SI POSSONO CALCOLARE COME SEGUE:



NOTA BENE:

$\overline{XL} = R\sin\vartheta_2$

$\overline{GL} = \overline{PJ} = R\sin\alpha$

$\overline{XG} = R\left[\sin\vartheta_2 - \sin\alpha\right]$

$\overline{DL} = R\cos\vartheta_2$

$\overline{LC} = R\left[1-\cos\vartheta_2\right]$

$\overline{DJ} = R\cos\alpha$

$\overline{JC} = R\left[1-\cos\alpha\right]$

$\overline{LJ} = \overline{GP} = R\left[\cos\alpha - \cos\vartheta_2\right]$

SI HA QUINDI CHE IL BRACCIO DI dQ_H VALE $R\left[\sin\vartheta_2 - \sin\alpha\right]$, QUELLO DI dQ_V È INVECE PARI A $R\left\{\left[1-\cos\vartheta_2\right]-\left[1-\cos\alpha\right]\right\} = R\left[\cos\alpha - \cos\vartheta_2\right]$.

SULLA BASE DI QUESTE CONSIDERAZIONI SI GIUNGE A SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DEI MOMENTI:

$$\text{D } M_{z(X)}=0 \quad -M(\vartheta_2)-\int_0^{\vartheta_2} R[\cos\alpha-\cos\vartheta_2]\,dQ_V-\int_0^{\vartheta_2} R[\sin\vartheta_2-\sin\alpha]\,dQ_T-H_C\cdot R\sin\vartheta_2+$$
$$+V_C\cdot R[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-\int_0^{\vartheta_2}\{R[\cos\alpha-\cos\vartheta_2]q_0 R\,d\alpha\sin\alpha\}-\int_0^{\vartheta_2}\{R[\sin\vartheta_2-\sin\alpha]q_0 R\,d\alpha\cos\alpha\}+$$
$$\frac{q_0R}{2}\cdot R\sin\vartheta_2+\frac{q_0R}{2}R[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-q_0R^2\int_0^{\vartheta_2}[\cos\alpha\sin\alpha-\cos\vartheta_2\sin\alpha]\,d\alpha-q_0R^2\int_0^{\vartheta_2}[\sin\vartheta_2\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha]\,d\alpha+$$
$$+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-q_0R^2\int_0^{\vartheta_2}[\cancel{\cos\alpha\sin\alpha}-\cos\vartheta_2\sin\alpha+\sin\vartheta_2\cos\alpha-\cancel{\sin\alpha\cos\alpha}]\,d\alpha+$$
$$+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-q_0R^2\left[\int_0^{\vartheta_2}-\sin\alpha\,d\alpha\right]\cos\vartheta_2-q_0R^2\left[\int_0^{\vartheta_2}\cos\alpha\,d\alpha\right]\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+$$
$$+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-q_0R^2[\cos\alpha]_0^{\vartheta_2}\cos\vartheta_2-q_0R^2[\sin\alpha]_0^{\vartheta_2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-q_0R^2[\cos\vartheta_2-1]\cos\vartheta_2-q_0R^2[\sin\vartheta_2]^2+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]=0$$

$$-M(\vartheta_2)-q_0R^2\cos^2\vartheta_2+q_0R^2\cos\vartheta_2-q_0R^2\sin^2\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]=0$$

SI TROVA QUINDI:

$$M(\vartheta_2)=-q_0R^2[\underbrace{\cos^2\vartheta_2+\sin^2\vartheta_2}_{=1}]+q_0R^2\cos\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]$$

$$M(\vartheta_2)=-q_0R^2[1-\cos\vartheta_2]+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2+\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]$$

$$M(\vartheta_2)=-\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2]+\frac{q_0R^2}{2}\sin\vartheta_2$$

$$M(\vartheta_2)=-\frac{q_0R^2}{2}[1-\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_2].$$

PERTANTO LE AZIONI INTERNE SUL TRATTO CONSIDERATO SONO:

$$\boxed{\begin{aligned} N(\vartheta_2)&=-\frac{q_0R}{2}[2-\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_2] \\ T(\vartheta_2)&=+\frac{q_0R}{2}[\sin\vartheta_2-\cos\vartheta_2] \\ M(\vartheta_2)&=\frac{q_0R^2}{2}[\cos\vartheta_2+\sin\vartheta_2-1]\end{aligned}}\quad\begin{aligned}&[19']\\&[20']\\&[21']\end{aligned}$$

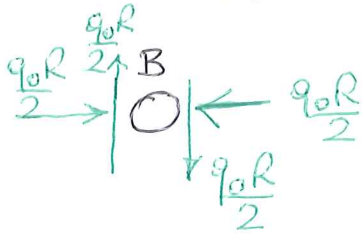
SI OSSERVI CHE LE [19'], [20'], [21'] FORNISCONO QUESTI VALORI:

$$N(\vartheta_2=0) = -\frac{q_0R}{2} \quad ; \quad N\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{q_0R}{2} \quad ; \quad N\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{q_0R}{2}\left[2-\sqrt{2}\right]$$

$$T(\vartheta_2=0) = -\frac{q_0R}{2} \quad ; \quad T\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{q_0R}{2} \quad ; \quad T\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$M(\vartheta_2=0) = 0 \quad ; \quad M\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad ; \quad M\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{4}\right) = \frac{q_0R^2}{2}\left[\sqrt{2}-1\right]$$

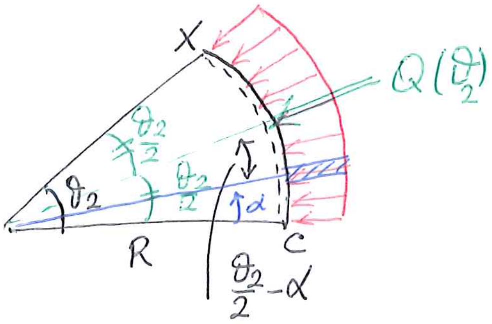
E SI VERIFICA CHE ANCHE IN QUESTO CASO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DELLA CERNIERA INTERMEDIA (B) E' SODDISFATTA.



NOTA: PRIMA DI PASSARE AI DIAGRAMMI, SI PUÒ NOTARE CHE ESISTE UNA VIA PIÙ PRATICA PER CALCOLARE LE AZIONI INTERNE.

SI OSSERVA INFATTI CHE LA RISULTANTE DEL CARICO ESTERNO $Q(\vartheta_2)$, AGENTE SU UN ARCO DI AMPIEZZA ϑ_2 È SEMPRE APPLICATA, PER MOTIVI DI SIMMETRIA, (ESSENDO IL CARICO RADIALE) IN CORRISPONDENZA DELLA BISETTRICE DELL'ANGOLO (CIOÈ DI UN ANGOLO DI AMPIEZZA $\frac{\vartheta_2}{2}$) ED E' SEMPRE DIRETTA RADIALMENTE.

SI PUÒ ALLORA SFRUTTARE QUESTA CIRCOSTANZA PER VALUTARE IL MODULO DELLA RISULTANTE PARZIALE: SI TROVA INFATTI:



$$Q(\vartheta_2) = \int_0^{\vartheta_2} q_0 \cos\left(\alpha-\frac{\vartheta_2}{2}\right) R\,d\alpha$$

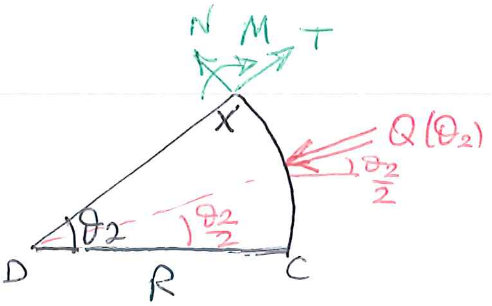
$$Q(\vartheta_2) = q_0 R \int_0^{\vartheta_2} \cos\left(\alpha-\frac{\vartheta_2}{2}\right) d\alpha$$

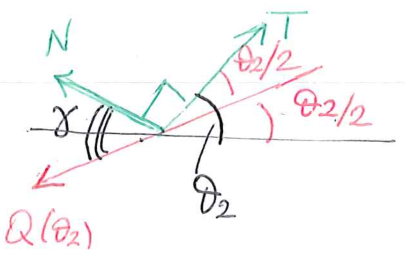
$$Q(\vartheta_2) = q_0 R \left[\sin\left(\alpha-\frac{\vartheta_2}{2}\right)\right]_0^{\vartheta_2}$$

$$Q(\vartheta_2) = q_0 R \left[\sin\frac{\vartheta_2}{2} - \sin\left(-\frac{\vartheta_2}{2}\right)\right] = 2 q_0 R \sin\frac{\vartheta_2}{2}$$

NB: $\cos\left(\frac{\vartheta_2}{2}-\alpha\right) = \cos\left(\alpha-\frac{\vartheta_2}{2}\right)$ POICHÉ LA FUNZIONE COSENO È PARI: $\cos(-x) = +\cos(x)$.

TENENDO CONTO DI QUESTA CIRCOSTANZA SI PUÒ FACILMENTE VALUTARE IL CONTRIBUTO DI $Q(\vartheta)$ ALLE AZIONI INTERNE:





$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_2}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_2}{2}$$

PER PROIETTARE $Q(\vartheta)$ NELLA DIREZIONE DI N INTERVIENE L'ANGOLO γ; PER

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta_2}{2}\right) = \sin\frac{\vartheta_2}{2}$$

PROIETTARE $Q(\vartheta)$ NELLA DIREZIONE DI T INTERVIENE L'ANGOLO $\vartheta_2/2$.

SI TROVA COSÌ CHE

$$Q_N = Q(\theta_2)\cdot \sin\frac{\theta_2}{2} = 2q_0R\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2}{2} = 2q_0R\sin^2\frac{\theta_2}{2}$$

$$Q_T = -Q(\theta_2)\cdot\cos\frac{\theta_2}{2} = -2q_0R\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot\cos\frac{\theta_2}{2}$$

DOVE IL SEGNO − INDICA CHE LA COMPONENTE HA VERSO OPPOSTO RISPETTO A T.
SI OSSERVI ANCHE CHE $2\sin^2\frac{\theta_2}{2} = 1-\cos\theta_2$ E $2\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} = \sin\theta_2$.
PERTANTO SI RICONOSCE CHE

$$Q_N = q_0R[1-\cos\theta_2] \quad ; \quad Q_T = -q_0R\sin\theta_2 .$$

NE SEGUE, PROIETTANDO LE EQUAZIONI CARDINALI NELLA DIREZIONE DI N E DI T:

$$\nwarrow R_{//} = 0 \qquad N(\theta_2) + Q_N + V_N + H_N = 0 \qquad [22]$$

$$N(\theta_2) + q_0R[1-\cos\theta_2] + \frac{q_0R}{2}\cos\theta_2 - \frac{q_0R}{2}\sin\theta_2 = 0$$

$$N(\theta_2) + q_0R - q_0R\cos\theta_2 + \frac{q_0R}{2}\cos\theta_2 - \frac{q_0R}{2}\sin\theta_2 = 0$$

$$N(\theta_2) + q_0R - \frac{q_0R}{2}\cos\theta_2 - \frac{q_0R}{2}\sin\theta_2 = 0$$

$$N(\theta_2) = -q_0R + \frac{q_0R}{2}(\cos\theta_2 + \sin\theta_2)$$

DUNQUE

$$\boxed{N(\theta_2) = -\frac{q_0R}{2}\left[2-\cos\theta_2-\sin\theta_2\right]} \qquad [22']$$

$$\nearrow R_{\perp} = 0 \qquad T(\theta_2) + Q_T + V_T - H_T = 0 \qquad [23]$$

$$T(\theta_2) - q_0R\sin\theta_2 + \frac{q_0R}{2}\sin\theta_2 + \frac{q_0R}{2}\cos\theta_2 = 0$$

$$T(\theta_2) - \frac{q_0R}{2}\sin\theta_2 + \frac{q_0R}{2}\cos\theta_2 = 0$$

PERTANTO

$$\boxed{T(\theta_2) = \frac{q_0R}{2}\left[\sin\theta_2 - \cos\theta_2\right]} \qquad [23']$$

PER QUANTO RIGUARDA LA DETERMINAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE, CONVIENE SCEGLIERE COME POLO IL PUNTO (D), CENTRO DELL'ARCO. IN TAL MODO NÉ T, NÉ $Q(\theta_2)$ NÉ H_C CONTRIBUISCONO AL MOMENTO RISULTANTE, MENTRE INTERVIENE N, CON UN BRACCIO PARI A R. SI TROVA:

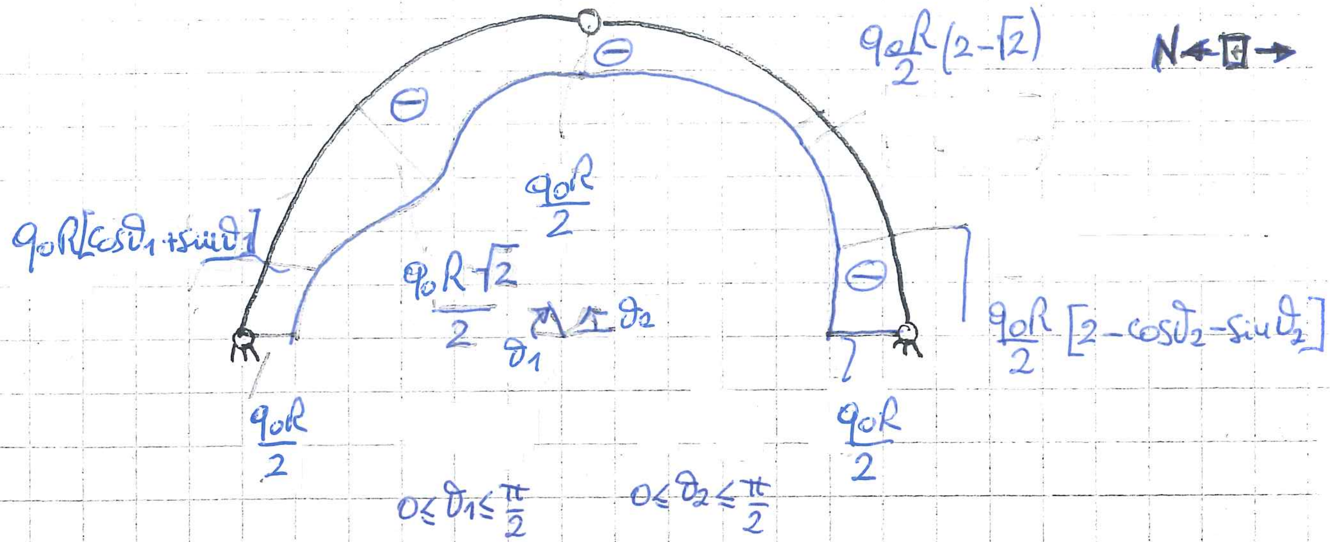
$$\circlearrowleft M_{z(D)} = 0 \qquad -M(\theta_2) + N\cdot R + V_C\cdot R = 0 \; [24]$$

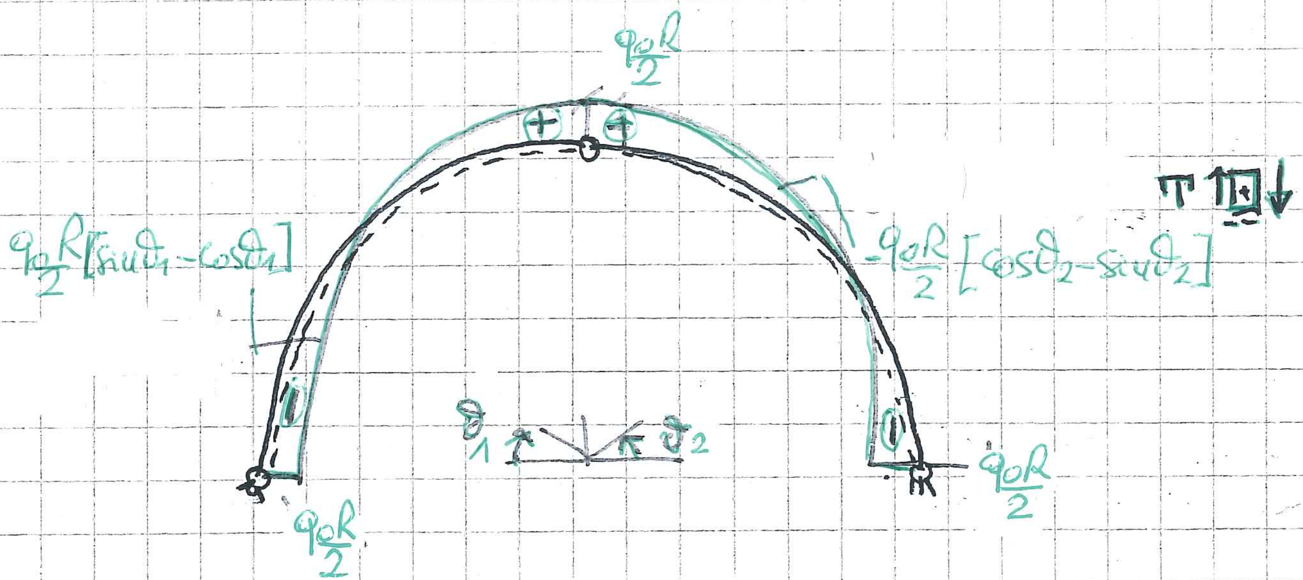
$$M(\theta_2) = -\frac{q_0R^2}{2}\left[2-\cos\theta_2-\sin\theta_2\right] + \frac{q_0R^2}{2}$$

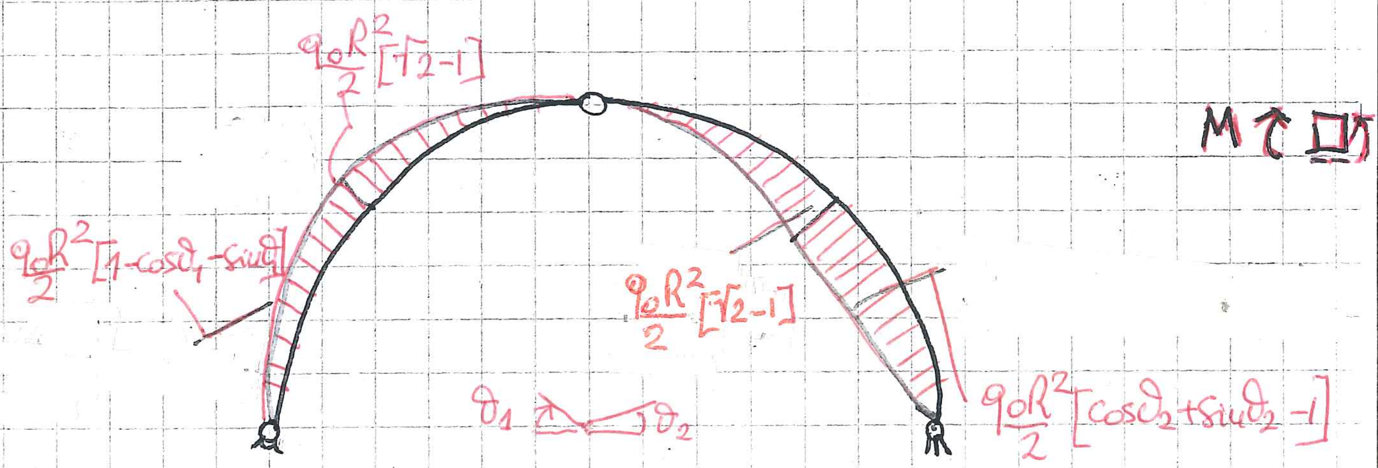
E DUNQUE SI OTTIENE

$$\boxed{M(\vartheta_2) = -\frac{q_0 R^2}{2}\left[1-\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_2\right]} \qquad [24']$$

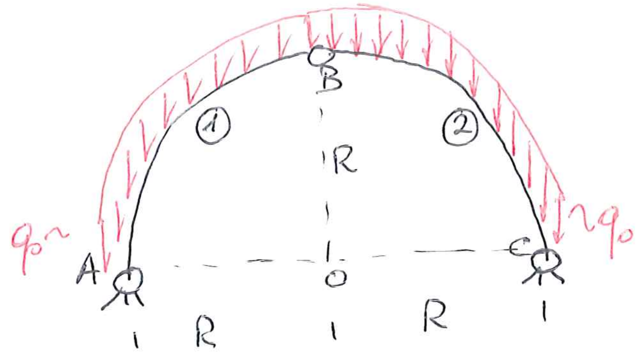
È FACILE VERIFICARE CHE LE [22'], [23'], [24'] ORA OTTENUTE COINCIDONO CON LE [19'], [20'], [21'] OTTENUTE IN PRECEDENZA.







C) ARCO A 3 CERNIERE SEMICIRCOLARE SOGGETTO A PESO PROPRIO: CARICO VERTICALE UNIFORME PER UNITA' DI SVILUPPO

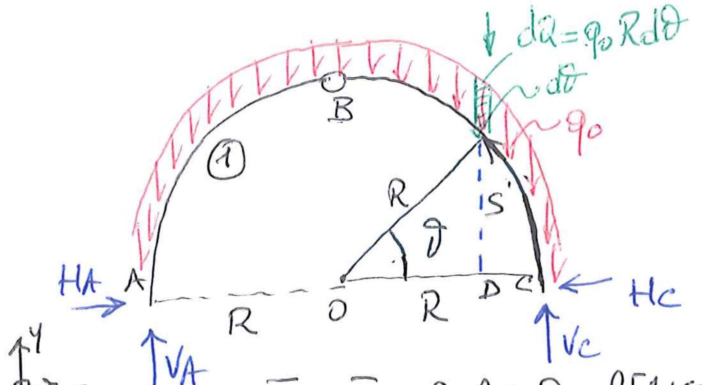


SI NOTI CHE IL CARICO VERTICALE NON E' PIU' UNIFORME SE SI CONSIDERA L'UNITA' DI PROIEZIONE (E NON L'UNITA' DI SVILUPPO)

$$\left.\begin{array}{l} GDL = 2\times 3 = 6 \\ GDV = 2(A) + 2(B) + 2(C) = 6 \end{array}\right\} \quad GDL = GDV$$

STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE)

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



$$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = R + R\cos\vartheta = R[1+\cos\vartheta]$$

OSSERVANDO CHE $s = R\vartheta$, SI ASSUME COME COORDINATA L'ANGOLO ϑ, MISURATO DA (C) IN VERSO ANTIORARIO: $0 < \vartheta < \pi$

PER DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI SI SCRIVONO LE EQUAZIONI CARDINALI PER L'INTERA STRUTTURA (1 ∪ 2) DA CONSIDERARSI COME UNICO SISTEMA RIGIDO E UN'EQUAZIONE AUSILIARIA CHE ESPRIME LA CONDIZIONE DI MANCATO SFRUTTAMENTO DELLA ARTICOLAZIONE (B).

$$1 \cup 2 \quad \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A - H_C = 0 & [25] \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A + V_C - \int_0^\pi dQ = 0 & [26] \\ \circlearrowleft M_{Z(A)} = 0 \quad V_C \cdot 2R - \int_0^\pi R[1+\cos\vartheta]\, dQ = 0 & [27] \end{cases}$$

← IL CARICO E' SOLO VERTICALE: NON INTERVIENE NELL'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO $R_x = 0$.

EQ. AUSILIARIA: $\circlearrowleft M^{(2)}_{Z(B)} = 0 \quad V_C \cdot R - H_C \cdot R - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\vartheta\, dQ = 0 \quad [28]$

SI OSSERVI CHE dQ E' LA RISULTANTE ELEMENTARE DEL CARICO DISTRIBUITO, SEMPRE DIRETTO VERTICALMENTE; INOLTRE IL CONTRIBUTO DELLA RISULTANTE ELEMENTARE dQ DEL CARICO DISTRIBUITO HA UN BRACCIO PARI A $R + R\cos\vartheta = R[1+\cos\vartheta]$ QUANDO SI VALUTA IL MOMENTO RISPETTO AD (A) PER L'INTERA STRUTTURA, NEL QUAL CASO L'INTEGRAZIONE IN ϑ SI ESTENDE DA 0 (PUNTO (C)) A π (PUNTO (A)); QUANDO INVECE SI VALUTA IL MOMENTO RISPETTO A (B) PER LA SOLA TRAVE (2) SI HA CHE IL BRACCIO VALE $R\cos\vartheta$ E L'INTEGRAZIONE IN ϑ E' LIMITATA FRA 0 (PUNTO (C)) E $\frac{\pi}{2}$ (PUNTO (B)).

SI PROCEDE AL CALCOLO DEI 3 INTEGRALI CHE COMPAIONO NELLE [26], [27], [28]

$$\int_0^\pi dQ = \int_0^\pi q_0 R\, d\vartheta = q_0 R \int_0^\pi d\vartheta = q_0 R [\vartheta]_0^\pi = q_0 R \pi$$

$$\int_0^\pi R[1+\cos\vartheta]\, dQ = \int_0^\pi R[1+\cos\vartheta]\, q_0 R\, d\vartheta = q_0 R^2 \int_0^\pi [1+\cos\vartheta]\, d\vartheta = q_0 R^2 [\vartheta + \sin\vartheta]_0^\pi$$

$$= q_0 R^2 \pi$$

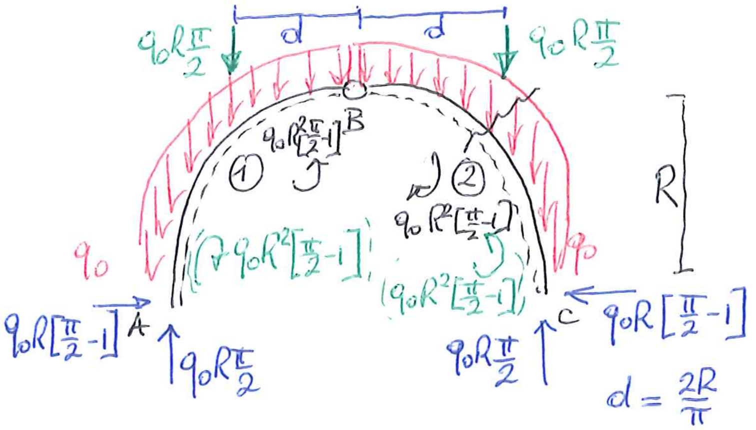
$$\int_0^{\pi/2} R\cos\vartheta\, dQ = \int_0^{\pi/2} R\cos\vartheta\, q_0 R\, d\vartheta = q_0R^2\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\, d\vartheta = q_0R^2\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2} = q_0R^2.$$

PERTANTO LE [25] – [28] DIVENGONO:

$$\begin{cases} H_A - H_C = 0 & [25'] \\ V_A + V_C = q_0 R\pi & [26'] \\ 2V_C \cancel{R} = q_0 R^{\cancel{2}}\pi & [27'] \\ V_C\cancel{R} - H_C\cancel{R} = q_0 R^{\cancel{2}} & [28'] \end{cases}$$

LA [27'] FORNISCE $\underline{V_C = q_0R\frac{\pi}{2}}$; LA [28'] $\underline{H_C = q_0R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]}$; LA [25'] $\underline{H_A = q_0R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]}$

INFINE LA [26'] DÀ: $\underline{V_A = q_0R\frac{\pi}{2}}$ E SI TROVA UNA SOLUZIONE RISPETTOSA DELLE CONDIZIONI DI SIMMETRIA GEOMETRICA E DI CARICO:



SI VERIFICA AGEVOLMENTE DAL PUNTO DI VISTA GRAFICO IL BILANCIO DELLE FORZE ORIZZONTALI E VERTICALI.
PER IL BILANCIO DEI MOMENTI, SI VEDE CHE LE 2 FORZE VERTICALI APPLICATE AI 2 SEMIARCHI DANNO LUOGO A 2 MOMENTI (DI SEGNO DISCORDE) E DI VALORE PARI A
$q_0R\frac{\pi}{2}\left[R-d\right] = q_0R\frac{\pi}{2}R\left[1-\frac{2}{\pi}\right] = q_0R^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$

SI NOTI CHE RISPETTO AL POLO B LA RISULTANTE DEL CARICO DISTRIBUITO APPLICATO A MEZZO ARCO SI TROVA A UNA DISTANZA d DETERMINATA DALLA RELAZIONE (DI EQUIVALENZA STATICA):

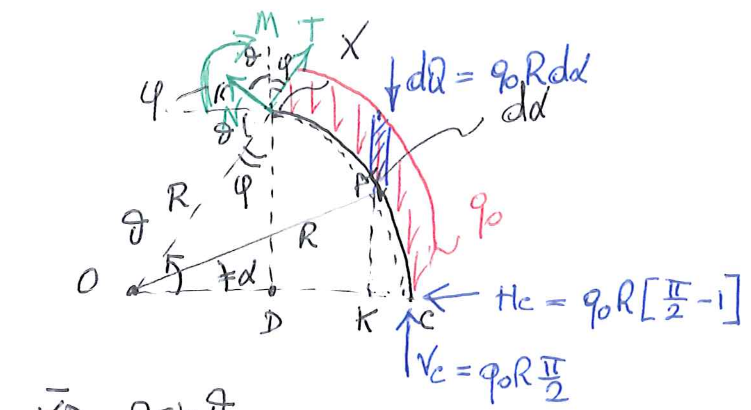
$$d = \frac{\int_0^{\pi/2} R\cos\vartheta\, dQ}{\int_0^{\pi/2} dQ} = \frac{q_0R^2\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\, d\vartheta}{q_0R\int_0^{\pi/2} d\vartheta} = \frac{q_0R^2\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2}}{q_0R\left[\vartheta\right]_0^{\pi/2}} = \frac{\cancel{q_0}R^{\cancel{2}}}{\cancel{q_0}\cancel{R}\frac{\pi}{2}} = \frac{R}{\frac{\pi}{2}}$$

OVVERO $d = \frac{2R}{\pi}$ $(= 0.637R)$

L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI APPLICATI A UNA SOLA DELLE 2 TRAVI RISPETTO A B È VERIFICATO SE SI CONSIDERA CHE IL MOMENTO RISPETTO A B DI CIASCUNA REAZIONE ORIZZONTALE (PARI, IN VALORE ASSOLUTO, A $q_0R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]\cdot R = q_0R^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$) BILANCIA E NEUTRALIZZA L'AZIONE DELLA COPPIA PRODOTTA, SULLA STESSA TRAVE DALLE 2 FORZE VERTICALI.

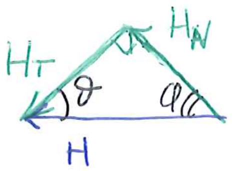
PER VALUTARE LE AZIONI INTERNE NON ESSENDOVI CONDIZIONI DI CARICO DIVERSE PER LE 2 TRAVI, NÉ PRESENZA DI FORZE CONCENTRATE IN CAMPATA (ATTRAVERSO LA CERNIERA B NON GIUNGONO FORZE ESTERNE) BASTA 1 SOLA SEZIONE.

SI CONSIDERA QUINDI UNA PORZIONE DEL SEMIARCO DI DESTRA COMPRESA FRA L'IMPOSTA Ⓒ E IL PUNTO Ⓧ :



SI PROCEDE A PROIETTARE LE FORZE PRESENTI NELLA DIREZIONE DELL'AZIONE ASSIALE N E DELL'AZIONE TAGLIANTE T.

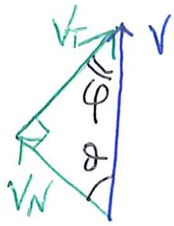
RISULTA QUANTO SEGUE:



$$H_N = H \sin\vartheta$$
$$H_T = H \cos\vartheta$$

$$\overline{XD} = R\sin\vartheta$$
$$\overline{OD} = R\cos\vartheta$$
$$\overline{OK} = R\cos\alpha$$
$$\overline{DK} = \overline{OK} - \overline{OD} = R[\cos\alpha - \cos\vartheta]$$
$$\overline{DC} = R[1 - \cos\vartheta]$$

$$V_N = V\cos\vartheta$$
$$V_T = V\sin\vartheta$$



SI HA QUINDI:

$$dQ_N = dQ\cos\vartheta$$
$$dQ_T = dQ\sin\vartheta$$

$$H_N = q_0 R\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]\sin\vartheta \qquad V_N = q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\vartheta$$

$$H_T = q_0 R\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]\cos\vartheta \qquad V_T = q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\vartheta$$

$$dQ_N = q_0 R\, d\alpha \cos\vartheta \qquad dQ_T = q_0 R\, d\alpha \sin\vartheta$$

LE EQUAZIONI CARDINALI PER IL TRATTO CONSIDERATO, OPPORTUNAMENTE PROIETTATE FORNISCONO LE FUNZIONI DI AZIONE INTERNA:

$$\nwarrow R_{//} = 0 \quad N(\vartheta) - \int_0^\vartheta dQ_N + H_N + V_N = 0 \qquad [29]$$

$$N(\vartheta) - \int_0^\vartheta q_0 R\, d\alpha \cos\vartheta + q_0 R\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]\sin\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\vartheta = 0$$

$$N(\vartheta) - q_0 R\left[\int_0^\vartheta d\alpha\right]\cos\vartheta + q_0 R\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]\sin\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\vartheta = 0$$

$$N(\vartheta) - q_0 R\left[\alpha\right]_0^\vartheta \cos\vartheta + q_0 R\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]\sin\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\vartheta = 0$$

$$N(\vartheta) - q_0 R\vartheta\cos\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\vartheta - q_0 R\sin\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\vartheta = 0$$

$$N(\vartheta) = q_0 R\left[\vartheta - \frac{\pi}{2}\right]\cos\vartheta + q_0 R\left[1 - \frac{\pi}{2}\right]\sin\vartheta$$

E DUNQUE:

$$\boxed{N(\vartheta) = -q_0 R\frac{\pi}{2}\left[\sin\vartheta + \cos\vartheta\right] + q_0 R\left[\sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta\right]} \qquad [29']$$

$$\nearrow R_{\perp} = 0 \quad T(\vartheta) - \int_0^\vartheta dQ_T - H_T + V_T = 0 \qquad [30]$$

$$T(\vartheta) - \int_0^{\vartheta} q_0 R\,d\alpha \sin\vartheta - q_0 R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]\cos\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\vartheta = 0$$

$$T(\vartheta) - q_0 R\left[\int_0^{\vartheta} d\alpha\right]\sin\vartheta - q_0 R\frac{\pi}{2}\cos\vartheta + q_0 R\cos\vartheta + q_0 R\frac{\pi}{2}\sin\vartheta = 0$$

$$T(\vartheta) - q_0 R\left[\alpha\right]_0^{\vartheta}\sin\vartheta - q_0 R\frac{\pi}{2}\left[\cos\vartheta - \sin\vartheta\right] + q_0 R\cos\vartheta = 0$$

$$T(\vartheta) - q_0 R\vartheta\sin\vartheta + q_0 R\cos\vartheta - q_0 R\frac{\pi}{2}\left[\cos\vartheta - \sin\vartheta\right] = 0$$

$$T(\vartheta) - q_0 R\left[\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\right] - q_0 R\frac{\pi}{2}\left[\cos\vartheta - \sin\vartheta\right] = 0$$

PERTANTO

$$\boxed{T(\vartheta) = q_0 R\left[\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\right] + q_0 R\frac{\pi}{2}\left[\cos\vartheta - \sin\vartheta\right]} \quad [30']$$

$$\sum M_{z(x)} = 0 \quad -M(\vartheta) - \int_0^{\vartheta} R\left[\cos\alpha - \cos\vartheta\right]dQ - H_c \cdot R\sin\vartheta + V_c R\left[1-\cos\vartheta\right] = 0 \quad [31]$$

$$-M(\vartheta) - R\int_0^{\vartheta}\left[\cos\alpha - \cos\vartheta\right]q_0 R\,d\alpha - q_0 R^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right]\overset{\sin\vartheta}{} + q_0 R^2\frac{\pi}{2}\left[1-\cos\vartheta\right] = 0$$

$$-M(\vartheta) - q_0 R^2\left[\int_0^{\vartheta}\cos\alpha\,d\alpha - \cos\vartheta\int_0^{\vartheta}d\alpha\right] - q_0 R^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right]\sin\vartheta + q_0 R^2\frac{\pi}{2}\left[1-\cos\vartheta\right] = 0$$

$$-M(\vartheta) - q_0 R^2\left\{\left[\sin\alpha\right]_0^{\vartheta} - \cos\vartheta\left[\alpha\right]_0^{\vartheta}\right\} - q_0 R^2\frac{\pi}{2}\left[\sin\vartheta + \overset{-1}{\cos\vartheta}\right] + q_0 R^2\sin\vartheta = 0$$

$$-M(\vartheta) - q_0 R^2\left[\cancel{\sin\vartheta} - \vartheta\cos\vartheta\right] - q_0 R^2\frac{\pi}{2}\left[\sin\vartheta + \cos\vartheta - 1\right] + \cancel{q_0 R^2\sin\vartheta} = 0$$

E DUNQUE

$$\boxed{M(\vartheta) = q_0 R^2\vartheta\cos\vartheta - q_0 R^2\frac{\pi}{2}\left[\sin\vartheta + \cos\vartheta - 1\right]} \quad [31']$$

LE [29'], [30'], [31'] VALGONO SU TUTTO L'INTERVALLO $0 < \vartheta < \pi$ (CON $\vartheta = 0$ NEL PUNTO Ⓒ, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ IN Ⓑ, $\vartheta = \pi$ IN Ⓐ).

NEI PUNTI SIGNIFICATIVI QUESTI SONO I VALORI DELLE AZIONI INTERNE:

$N(\vartheta = 0) = -q_0 R\frac{\pi}{2}$; $\quad N(\vartheta = \frac{\pi}{2}) = -q_0 R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$; $\quad N(\vartheta = \pi) = -q_0 R\frac{\pi}{2}$

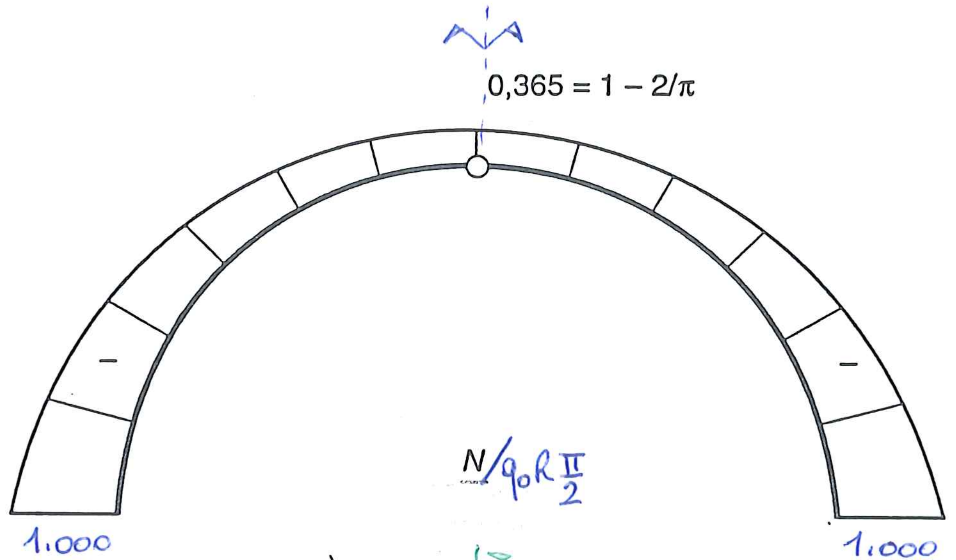
$T(\vartheta = 0) = +q_0 R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$; $\quad T(\vartheta = \frac{\pi}{2}) = 0$; $\quad T(\vartheta = \pi) = -q_0 R\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$

$M(\vartheta = 0) = 0$ $\quad M(\vartheta = \frac{\pi}{2}) = 0$ $\quad M(\vartheta = \pi) = 0$.

I DIAGRAMMI SONO RIPORTATI NELLA PAGINA SEGUENTE. SI OSSERVI CHE I DIAGRAMMI DI N E M SONO SIMMETRICI; QUELLO DI T, RIPORTATO <u>RIBALTATO</u> SUL SEMIARCO SINISTRO È ANTISIMMETRICO.

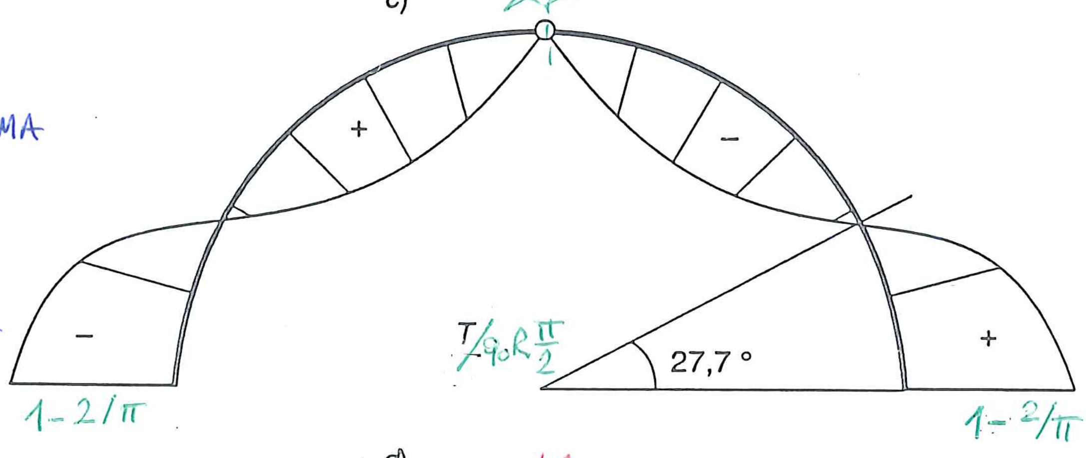
NOTA: SI CONFRONTINO I DIAGRAMMI CON QUELLI DEL PORTALE A 3 CERNIERE SOGGETTO A PESO PROPRIO: CIÒ PERMETTE DI VALUTARE L'EFFICIENZA STRUTTURALE AL VARIARE DELLA FORMA (A PARITÀ DI CARICO E DI DIMENSIONI, PER ESEMPIO ASSUMENDO R=L).

DIAGRAMMI AZIONI INTERNE PER ARCO A 3 CERNIERE SOGGETTO A PESO PROPRIO.



c)

NB: IL DIAGRAMMA SULLA TRAVE DI SINISTRA È RIBALTATO PER EVIDENZIARE LA ANTISIMMETRIA



d)