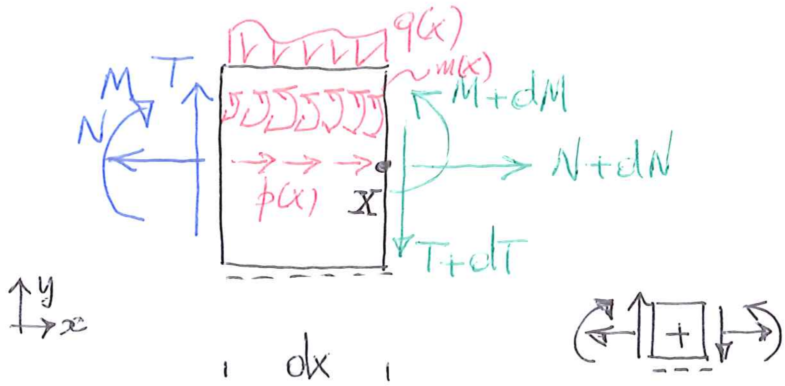
EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA PER TRAVI AD ASSE RETTILINEO.

SI CONSIDERANO CARICHI DISTRIBUITI AGENTI SU UNA TRAVE AD ASSE RETTILINEO; PER MAGGIORE GENERALITA' SI ASSUME CONTEMPORANEA PRESENZA DI:

- CARICO DISTRIBUITO AGENTE IN DIREZIONE ASSIALE, $p(x)$. $[\oplus \rightarrow]$;
- CARICO DISTRIBUITO AGENTE IN DIREZIONE TRASVERSALE, $q(x)$. $[\oplus \downarrow]$
- COPPIE DISTRIBUITE, $m(x)$. $[\oplus \circlearrowleft]$

SI ASSUME CHE I VERSI ASSUNTI POSITIVI SIANO QUELLI INDICATI; SE SI ISOLA UN ELEMENTO DI TRAVE DI LUNGHEZZA INFINITESIMA dx E SI INDICANO CON N, T, M LE AZIONI INTERNE APPLICATE ALLA FACCIA RIVOLTA VERSO SINISTRA, E CON $N+dN, T+dT, M+dM$ LE AZIONI INTERNE APPLICATE ALLA FACCIA RIVOLTA VERSO DESTRA, DISEGNANDOLE IN MODO DA RISPETTARE I VERSI POSITIVI DEL CONCIO DI RIFERIMENTO, SI HA:



NB: $[p(x)] = \dfrac{[F]}{[L]}$;

$[q(x)] = \dfrac{[F]}{[L]}$

$[m(x)] = \dfrac{[FL]}{[L]} = [F]$

IMPONENDO LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO (EQUAZIONI CARDINALI) PER L'ELEMENTO INFINITESIMO DI TRAVE, SI HA:

$$
\begin{cases}
\rightarrow R_x = 0 \quad -\cancel{N} + p(x)dx + \cancel{N} + dN = 0 & [1] \\
\uparrow R_y = 0 \quad \cancel{T} - q(x)dx - [\cancel{T} + dT] = 0 & [2] \\
\circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad -\cancel{M} - T \cdot dx + m(x)dx + q(x)dx \cdot \dfrac{dx}{2} + \cancel{M} + dM = 0 & [3]
\end{cases}
$$

CON QUALCHE SEMPLIFICAZIONE, E TRASCURANDO IL TERMINE $q(x)dx \cdot \dfrac{dx}{2}$, CHE RISULTA INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE, SI TROVA:

$$dN = -p(x)\,dx \qquad [1']$$

$$dT = -\,q(x)\,dx \qquad [2']$$

$$dM = T \cdot dx - m(x)dx \qquad [3']$$

CHE METTONO IN RELAZIONE GLI INCREMENTI DI AZIONE ASSIALE, TAGLIO E MOMENTO FLETTENTE CON LE RISULTANTI, APPLICATE AL CONCIO, DEI CARICHI DISTRIBUITI. SE SI DIVIDONO FORMALMENTE PER dx LE [1'], [2'], [3'] SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{dN}{dx} = -p(x)} \qquad [1'']$$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -q(x)} \qquad [2'']$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = T - m(x)} \qquad [3'']$$

QUESTE POSSONO ESSERE INTERPRETATE COME EQUAZIONI DIFFERENZIALI NELLE VARIABILI $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ CHE LEGANO QUESTE QUANTITA' ALLE FUNZIONI DI CARICO, $p(x)$, $q(x)$, $m(x)$.

NEL CASO IN CUI $m(x) = 0$ LA [3''] DIVIENE :

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \qquad [3''']$$

SE POI LA SI DERIVA UNA VOLTA RISPETTO A x FORNISCE:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(T(x)\right) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx}$$

E SOSTITUENDO LA [2''] SI OTTIENE

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)} \qquad [4].$$

LE [1''], [2''], [3''] (E LA [4], VALIDA IN ASSENZA DI COPPIE DISTRIBUITE) SONO NOTE COME "EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA" PER LA TRAVE AD ASSE RETTILINEO, E FORNISCONO UN METODO, ALTERNATIVO O COMPLEMENTARE A QUELLO DELLE SEZIONI PER CALCOLARE LE AZIONI INTERNE: LA LORO UTILITA' È DI GRANDE VALORE QUANDO LA STRUTTURA È SOGGETTA A CARICHI DISTRIBUITI IN CAMPATA E A CARICHI CONCENTRATI APPLICATI SOLO ALLE ESTREMITA': DIVERSAMENTE OCCORRE INTEGRARE SEPARATAMENTE LE EQUAZIONI SU PIU' CAMPI E RACCORDARE POI LA SOLUZIONE CON OPPORTUNE CONDIZIONI DI CONTINUITA'.

PRIMA DI ADDENTRARSI PER QUESTA VIA, È IL CASO DI CONSIDERARE CHE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA (SOVENTE INDICATE SINTETICAMENTE COME "EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO") RENDONO RAGIONE DI ALCUNI FATTI:

1) IL TAGLIO $T(x)$ RISULTA ESSERE LA DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE $M(x)$, MOMENTO FLETTENTE, IN ASSENZA DI COPPIE DISTRIBUITE $m(x)$;
2) IL CARICO TRASVERSALE $q(x)$ RISULTA ESSERE A MENO DEL SEGNO LA DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE $T(x)$, CIOÈ DEL TAGLIO; IN ASSENZA DI COPPIE DISTRIBUITE $m(x)$ È POI, SEMPRE A MENO DEL SEGNO, LA DERIVATA SECONDA DEL MOMENTO FLETTENTE, $M(x)$.

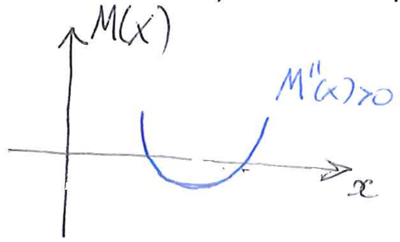
DI CONSEGUENZA, SE SI AMMETTE CHE $m(x) = 0$ (CIOÈ IN ASSENZA DI COPPIE DISTRIBUITE) SI HA CHE

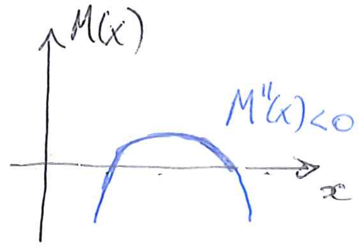
(1) LA PENDENZA DEL DIAGRAMMA DI $M(x)$ È DATA IN OGNI PUNTO DAL VALORE DI $T(x)$;

(2) LADDOVE $T(x) = 0$ IL VALORE DI $M(x)$ ATTINGE UN MAX/MIN LOCALE;

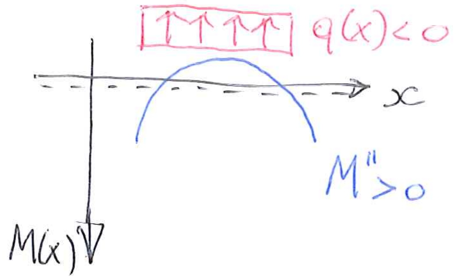
(3) IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE, SE RIPORTATO DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE, VOLGE SEMPRE LA CONCAVITÀ IN DIREZIONE TALE DA "ACCOGLIERE" IL CARICO.

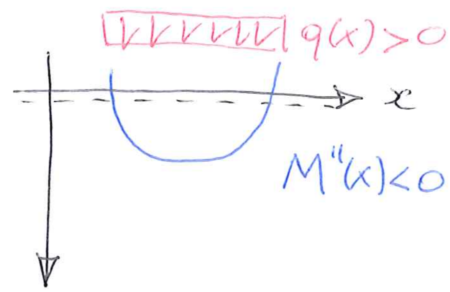
NOTA 1. DI QUESTA ULTIMA CARATTERISTICA È FACILE RENDERSI CONTO RAGIONANDO SUL DIAGRAMMA DI UNA GENERICA FUNZIONE: SE $M(x)$ FOSSE RIPORTATA AL DI SOPRA DELL'ASSE x DOVE È POSITIVA E AL DI SOTTO DOVE È NEGATIVA, SI TROVEREBBE CHE $M''(x)$ PRESENTEREBBE CONCAVITÀ VERSO L'ALTO SE >0; VERSO IL BASSO SE <0:





SE PERÒ IL MOMENTO VIENE RIPORTATO DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE, I DIAGRAMMI SOPRA INDICATI VANNO "RIBALTATI" SPECULARMENTE RISPETTO ALL'ASSE x, DANDO LUOGO A QUESTE SITUAZIONI





QUESTI VERSI DELLE CONCAVITÀ VANNO CONFRONTATI CON I VERSI DEL CARICO (>0 SE ORIENTATO VERSO IL BASSO, <0 SE ORIENTATO VERSO L'ALTO); DI QUI SEGUE IMMEDIATAMENTE L'ASSERTO: IN ENTRAMBI I CASI IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO VOLGE LA PROPRIA CONCAVITÀ IN MODO DA "ACCOGLIERE" IL CARICO □

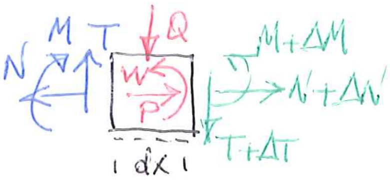
NOTA 2. LA CONSIDERAZIONE PRECEDENTE È SOLO LEGATA AL SEGNO DI $M''(x)$; CIOÈ CON LA DERIVATA SECONDA DELLA FUNZIONE $M(x)$; NULLA QUESTO HA A CHE VEDERE CON IL SEGNO DI $M(x)$! □

NOTA 3. DALL'ESAME DELLE [1'], [2'], [3'] SI VEDE CHE SE $dx \to 0$ RISULTA $dN = 0$; $dT = 0$; $dM = 0$ E QUESTE CONDIZIONI ESPRIMONO LA CONTINUITÀ DELLE AZIONI INTERNE.

SE PERÒ $\lim_{dx \to 0} p(x)dx = P$, $\lim_{dx \to 0} q(x)dx = Q$; $\lim_{dx \to 0} m dx = W$

CIOÈ SE IL TRONCHETTO È SEDE DI UNA FORZA CONCENTRATA P DIRETTA COME L'ASSE DELLA TRAVE, DI UNA FORZA CONCENTRATA Q DIRETTA PERPENDICOLARMENTE ALL'ASSE DELLA TRAVE, E DI UNA COPPIA CONCENTRATA W, ALLORA LE [1'], [2'], [3'] DIVENGONO, PER $dx \to 0$

$$\Delta N = -P \quad [1 \text{ bis}]$$
$$\Delta T = -Q \quad [2 \text{ bis}]$$
$$\Delta M = -W \quad [3 \text{ bis}]$$

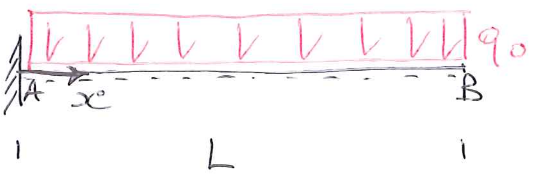


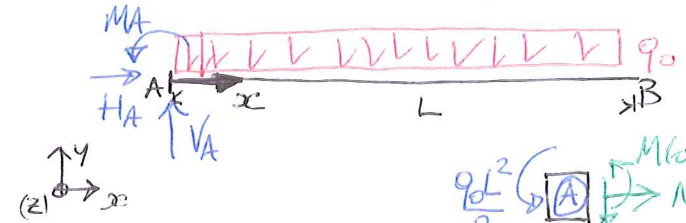
(DISCONTINUITÀ!)

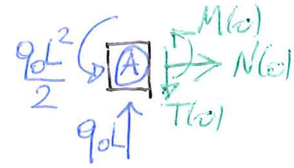
E QUESTO INDICA CHE LA VARIAZIONE FINITA CHE LE AZIONI INTERNE SUBISCONO PASSANDO ATTRAVERSO LA SEZIONE SEDE DELLE AZIONI ESTERNE CONCENTRATE EGUAGLIA, A MENO DEL SEGNO, I LORO VALORI. □

SI PASSA A CALCOLARE LE AZIONI INTERNE MEDIANTE INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA, CONSIDERANDO ALCUNI ESEMPI.

A) MENSOLA SOGGETTA A CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO:







$$\begin{cases} \to R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 L = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A - q_0 \frac{L^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = q_0 L \\ M_A = \frac{q_0 L^2}{2} \end{cases}$$

PER LE [1''], [2''], [3''] SI HA CHE $p(x) = 0$; $q(x) = q_0$; $m(x) = 0$.
E DUNQUE:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N(x) = C_0 = \text{Cost.} \quad [5]$$

$$\frac{dT}{dx} = -q_0 \Rightarrow T(x) = -q_0 x + C_1 \quad [6]$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad [7]$$

"SOLUZIONE GENERALE" DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

SI OSSERVI CHE IN MODO ANALOGO, UTILIZZANDO LA [4] INVECE DELLA [3''] SI SAREBBE OTTENUTO:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q_0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} [= T] = -q_0 x + C_1 \Rightarrow M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

PER DETERMINARE LA SOLUZIONE OCCORRE VALUTARE LE 3 COSTANTI C_0, C_1, C_2: LO

SI FA CON LE CONDIZIONI AL CONTORNO: È SUFFICIENTE CONOSCERE IN UN PUNTO (PER ESEMPIO (A)) I VALORI DI N, T, M.
AL PROPOSITO SI OSSERVA (VEDI SOPRA) CHE

$$N\big|_A = N(x=0) = 0$$
$$T\big|_A = T(x=0) = q_0 L$$
$$M\big|_A = M(x=0) = -q_0\frac{L^2}{2}$$

SI HA QUINDI PER LE [5], [6], [7] VALUTATE IN CORRISPONDENZA DI $x=0$ (CIOÈ DEL PUNTO (A)):

$$N(x=0) = C_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_0 = 0$$
$$T(x=0) = C_1 = q_0 L \quad \Rightarrow \quad C_1 = q_0 L$$
$$M(x=0) = C_2 = -\frac{q_0 L^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{q_0 L^2}{2}$$

LA SOLUZIONE COMPLETA È DUNQUE:

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ T(x) &= q_0\,[L-x] \\ M(x) &= -\frac{q_0 L^2}{2} + q_0 L x - q_0\frac{x^2}{2} = -\frac{q_0}{2}\,[L-x]^2 \end{aligned}\right\} \text{VALIDA PER } 0 \le x \le L$$

"SOLUZIONE PARTICOLARE" (COMPLETA) DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI, PER IL CASO IN ESAME.

E DÀ LUOGO A QUESTI DIAGRAMMI:

NOTA 4. LE CONDIZIONI AL CONTORNO SI POSSONO ANCHE IMPORRE IN UN PUNTO DIVERSO DALL'ORIGINE.
PER ESEMPIO, SE SI OSSERVA CHE IL PUNTO (B) È UN ESTREMO LIBERO, DEVE RISULTARE:

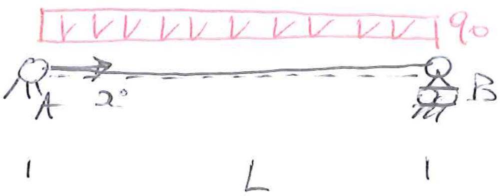
$$N\big|_B = N(x=L) = 0$$
$$T\big|_B = T(x=L) = 0$$
$$M\big|_B = M(x=L) = 0$$

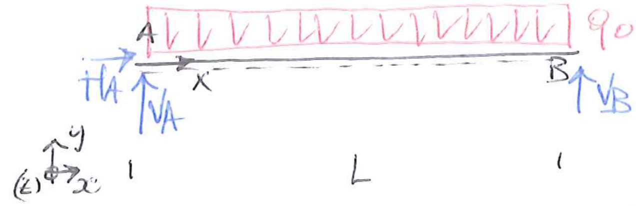
E QUINDI SOSTITUENDO QUESTI VALORI NELLE [5], [6], [7] SI TROVA:

$$N\big|_B = N(x=L) = C_0 = 0 \quad \Rightarrow C_0 = 0$$
$$T\big|_B = T(x=L) = -q_0 L + C_1 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = q_0 L$$
$$M\big|_B = M(x=L) = -q_0\frac{L^2}{2} + C_1 L + C_2 = 0 \quad -q_0\frac{L^2}{2} + q_0 L^2 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_2 = -q_0\frac{L^2}{2},$$

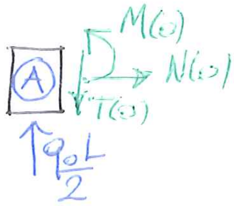
COINCIDENTI CON I VALORI PRECEDENTI $\square$

B) TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A CARICO UNIFORME.





$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 L + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -q_0 L \cdot \frac{L}{2} + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = q_0 \frac{L}{2} \\ V_B = q_0 \frac{L}{2} \end{cases}$$



COME NEL CASO PRECEDENTE $p(x) = 0$; $q(x) = q_0$; $m(x) = 0$; DUNQUE LE [1"], [2"], [3"] FORNISCONO:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N(x) = C_0 = \text{cost} \quad [8]$$

$$\frac{dT}{dx} = -q_0 \Rightarrow T(x) = -q_0 x + C_1 \quad [9]$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad [10]$$

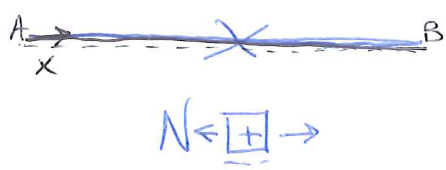
IN TUTTO EGUALI ALLE [5]-[7]; LE CONDIZIONI AL CONTORNO SONO PERÒ IN QUESTO CASO, CON RIFERIMENTO AL PUNTO A:

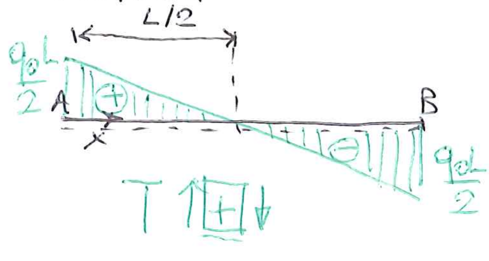
$$\left.\begin{aligned} N|_A &= N(x=0) = 0 \\ T|_A &= T(x=0) = +q_0 \frac{L}{2} \\ M|_A &= M(x=0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} N(x=0) = C_0 = 0 & \Rightarrow C_0 = 0 \\ T(x=0) = C_1 = q_0 \frac{L}{2} & \Rightarrow C_1 = q_0 \frac{L}{2} \\ M(x=0) = C_2 = 0 & \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

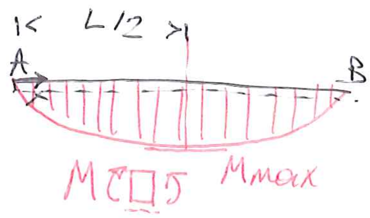
E IN QUESTO CASO LA SOLUZIONE COMPLETA RISULTA ESSERE:

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ T(x) &= q_0 \frac{L}{2} - q_0 x = q_0 \left[\frac{L}{2} - x \right] \\ M(x) &= q_0 \frac{L}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2} = \frac{q_0 x}{2} \left[L - x \right] \end{aligned}\right\} \text{VALIDA PER} \quad 0 \leq x \leq L$$

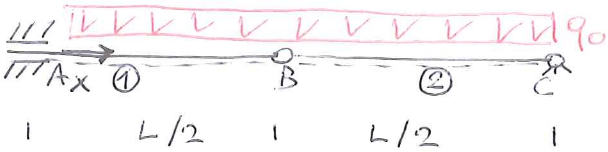
E DA' LUOGO A QUESTI DIAGRAMMI

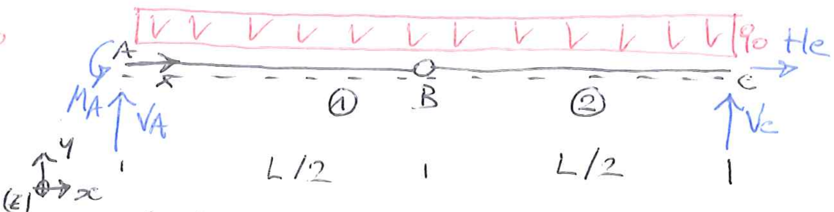




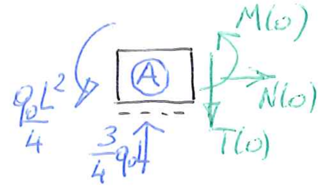


c) ARCO A 3 CERNIERE DEGENERE SOGGETTO A CARICO UNIFORME.





$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_C = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 L + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{Z(A)} = 0 & M_A - q_0 L \cdot \frac{L}{2} + V_C \cdot L = 0 \\ M^{②}_{Z(B)} = 0 & -q_0 \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} + V_C \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = 0 \\ V_A = \frac{3}{4} q_0 L \\ M_A = q_0 \frac{L^2}{4} \\ V_C = q_0 \frac{L}{4} \end{cases}$$



COME NEI 2 CASI PRECEDENTI, $p(x) = 0$; $q(x) = q_0$; $m(x) = 0$; LE [1''], [2''], [3''] FORNISCONO:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N(x) = C_0 = \text{const} \qquad [11]$$

$$\frac{dT}{dx} = -q_0 \Rightarrow T(x) = -q_0 x + C_1 \qquad [12]$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad [13]$$

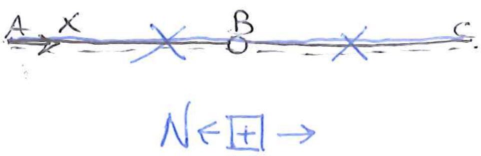
EGUALI ALLE [5]-[7] E ALLE [8]-[10]; CAMBIANO PERÒ LE CONDIZIONI AL CONTORNO: FACENDO RIFERIMENTO AL PUNTO Ⓐ DANNO, IN QUESTO CASO:

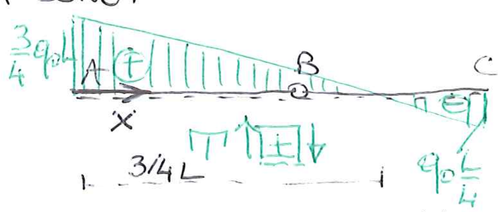
$$\left.\begin{aligned} N|_A &= N(x=0) = 0 \\ T|_A &= T(x=0) = \frac{3}{4} q_0 L \\ M|_A &= M(x=0) = -\frac{q_0 L^2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} N(x=0) = C_0 = 0 & \Rightarrow C_0 = 0 \\ T(x=0) = C_1 = \frac{3}{4} q_0 L & \Rightarrow C_1 = \frac{3}{4} q_0 L \\ M(x=0) = C_2 = -\frac{q_0 L^2}{4} & \Rightarrow C_2 = -\frac{q_0 L^2}{4} \end{cases}$$

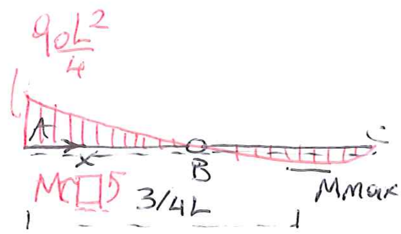
E LA SOLUZIONE COMPLETA IN QUESTO CASO È:

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ T(x) &= +\frac{3}{4} q_0 L - q_0 x = q_0 \left[\frac{3}{4} L - x\right] \\ M(x) &= -\frac{q_0 L^2}{4} + \frac{3}{4} q_0 L x - q_0 \frac{x^2}{2} = -\frac{q_0}{2} \left[L - x\right]\left[\frac{L}{2} - x\right] \end{aligned}\right\} \text{VALIDA PER } 0 \le x \le L$$

I CORRISPONDENTI DIAGRAMMI SONO:

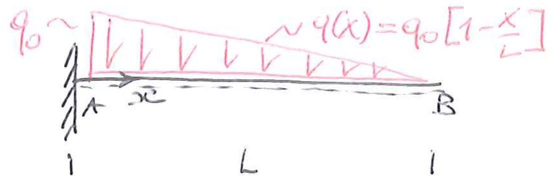


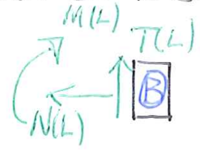




SI OSSERVA CHE $M(x)$ SODDISFA LA CONDIZIONE $M(x = \frac{L}{2}) = 0$; SI HA POI CHE LA ESPRESSIONE GENERALE DELLE AZIONI INTERNE È LA MEDESIMA PER I 3 CASI CONSIDERATI; SONO I VINCOLI, MEDIANTE LE CONDIZIONI AL CONTORNO A DIFFERENZIARE LE SOLUZIONI COMPLETE.

D) TRAVE A MENSOLA SOGGETTA A CARICO LINEARE DECRESCENTE





IL CASO È GIÀ STATO STUDIATO CON IL METODO DIRETTO NELL'ULTIMA LEZIONE; QUI SI RICAVA LA SOLUZIONE PER INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA.

NEL CASO PRESENTE È: $p(x)=0$; $q(x)=q_0-q_0\frac{x}{L}$; $m(x)=0$; LE [1"]-[3"] FORNISCONO:

$$\frac{dN}{dx}=0 \Rightarrow N(x)=C_0=\text{cost} \qquad [14]$$

$$\frac{dT}{dx}=-q_0+q_0\frac{x}{L} \Rightarrow T(x)=-q_0x+q_0\frac{x^2}{2L}+C_1 \qquad [15]$$

$$\frac{dM}{dx}=T(x) \Rightarrow M(x)=-q_0\frac{x^2}{2}+q_0\frac{x^3}{6L}+C_1x+C_2 \qquad [16]$$

DALLA SOLUZIONE GENERALE SI PASSA ALLA SOLUZIONE COMPLETA INTRODUCENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO: NEL PUNTO (B) (ESTREMO LIBERO) SI HA:

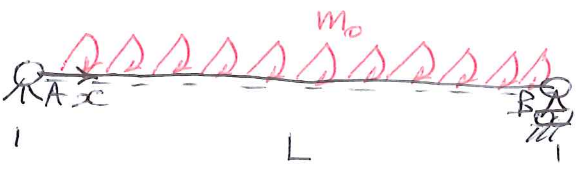
$$\left.\begin{aligned} N|_B &= N(x=L)=0\\ T|_B &= T(x=L)=0\\ M|_B &= M(x=L)=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} N(x=L)=C_0=0 \Rightarrow C_0=0\\ T(x=L)=-q_0L+q_0\frac{L}{2}+C_1=0 \Rightarrow C_1=\frac{q_0L}{2}\\ M(x=L)=-q_0\cancel{\frac{L^2}{2}}+q_0\frac{L^2}{6}+q_0\cancel{\frac{L^2}{2}}+C_2=0 \Rightarrow C_2=-q_0\frac{L^2}{6}\end{cases}$$

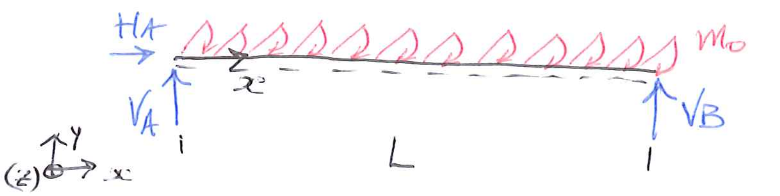
E LA SOLUZIONE COMPLETA, VALIDA NELL'INTERVALLO $0\le x\le L$ DIVIENE:

$$\begin{cases} N(x)=0\\ T(x)=\frac{q_0L}{2}-q_0x+q_0\frac{x^2}{2L}=\frac{q_0L}{2}\left[1-2\frac{x}{L}+\frac{x^2}{L^2}\right]=\frac{q_0L}{2}\left[1-\frac{x}{L}\right]^2\\ M(x)=-\frac{q_0L^2}{6}+\frac{q_0L}{2}x-q_0\frac{x^2}{2}+\frac{q_0x^3}{6L}=-\frac{q_0L^2}{6}\left[1-3\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}\right]=-\frac{q_0L^2}{6}\left[1-\frac{x}{L}\right]^3\end{cases}$$

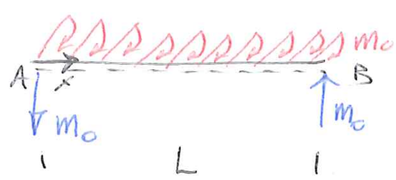
COINCIDENTE CON QUELLA GIÀ OTTENUTA, A PREZZO DI CALCOLI PIÙ LABORIOSI.

E) TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A DISTRIBUZIONE UNIFORME DI COPPIE.



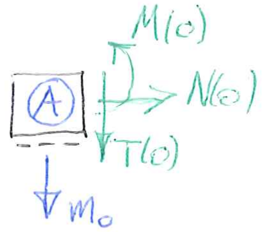


$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -m_o L + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -m_o \\ V_B = m_o \end{cases}$$



NEL CASO PRESENTE SI HA: $p(x) = 0$; $q(x) = 0$; $m(x) = -m_o$. E LE EQUAZIONI [1"]-[3"] DIVENGONO:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = C_0 = \text{const} \quad [17]$$



$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = C_1 = \text{const} \quad [18]$$

$$\frac{dM}{dx} = T + m_o \quad \Rightarrow \quad M(x) = C_1 x + m_o x + C_2 \quad [19]$$

PER RICAVARE DALLE [17]-[19] LA SOLUZIONE COMPLETA (PARTICOLARE) OCCORRE INTRODURRE LE CONDIZIONI AL CONTORNO. SI OSSERVA CHE ALL'ESTREMO (A) DEVE RISULTARE

$$\left.\begin{aligned} N|_A &= N(x=0) = 0 \\ T|_A &= T(x=0) = -m_o \\ M|_A &= M(x=0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} N(x=0) = C_0 = 0 & \Rightarrow C_0 = 0 \\ T(x=0) = C_1 = -m_o & \Rightarrow C_1 = -m_o \\ M(x=0) = C_2 = 0 & \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

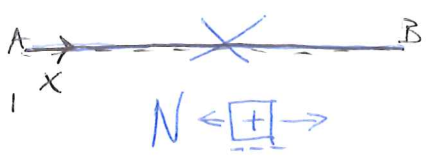
SI OTTIENE COSÌ LA SOLUZIONE COMPLETA, VALIDA NELL'INTERVALLO $0 \leq x \leq L$:

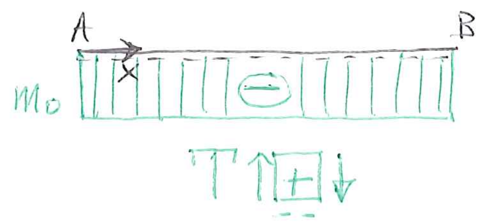
$$N(x) = 0$$

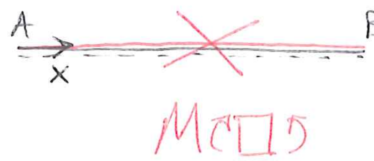
$$T(x) = -m_o$$

$$M(x) = -m_o x + m_o x = 0$$

E SI OTTIENE IL RISULTATO, APPARENTEMENTE PARADOSSALE, CHE UNA TRAVE APPOGGIATA, SOGGETTA A SOLE COPPIE DISTRIBUITE UNIFORMEMENTE È CARATTERIZZATA DA UNA DISTRIBUZIONE NULLA DI MOMENTO FLETTENTE: QUESTI INFATTI SONO I CORRISPONDENTI DIAGRAMMI.



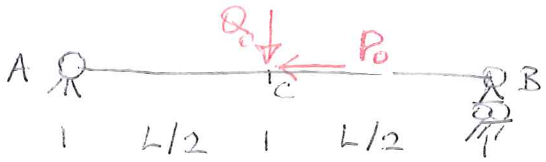


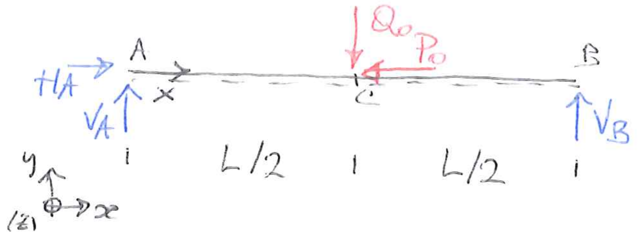


F) TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA IN MEZZERIA A FORZE CONCENTRATE

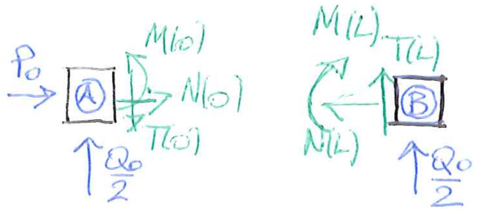
L'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO SI COMPLICA IN QUESTO CASO PER LA PRESENZA DI DISCONTINUITÀ NELLA DISTRIBUZIONE DI CARICO,

CHE RENDE NECESSARIO SPEZZARE IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE E INTRODURRE CONDIZIONI DI RACCORDO IN NUMERO PARI ALLE DISCONTINUITÀ PRESENTI.





$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - P_0 = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - Q_0 + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -Q_0 \frac{L}{2} + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = P_0 \\ V_A = \frac{Q_0}{2} \\ V_B = \frac{Q_0}{2} \end{cases}$$



C'È DISCONTINUITÀ DI CARICO NEL PUNTO C, CIOÈ PER $x = \frac{L}{2}$: SI DEVONO CONSIDERARE SEPARATAMENTE I TRATTI A→C $(0 < x < \frac{L}{2})$ E C→B $(\frac{L}{2} < x < L)$:

I - TRATTO A→C : $0 < x < \frac{L}{2}$

SI HA $p(x) = 0$; $q(x) = 0$; $m(x) = 0$: LE [1"] - [3"] FORNISCONO:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N(x) = C_0 = \text{CONST} \quad [20]$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow T(x) = C_1 = \text{CONST} \quad [21]$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x) = C_1 x + C_2 \quad [22]$$

II - TRATTO C→B : $\frac{L}{2} < x < L$

È ANCORA $p(x) = 0$; $q(x) = 0$; $m(x) = 0$; PERTANTO LE [1"]-[3"] FORNISCONO:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N(x) = D_0 = \text{CONST} \quad [23]$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow T(x) = D_1 = \text{CONST} \quad [24]$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x) = D_1 x + D_2 \quad [25]$$

PER FISSARE LE COSTANTI C_0, C_1, C_2; D_0, D_1, D_2 (OVVIAMENTE <u>DIVERSE</u> PER I DUE TRATTI!) SI FA USO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO PER CIASCUNO DEI DUE TRATTI: SI DEVE INFATTI AVERE:

$$\text{IN A} \begin{cases} N|_A = N(x=0) = -P_0 \\ T|_A = T(x=0) = \frac{Q_0}{2} \\ M|_A = M(x=0) = 0 \end{cases} \qquad \text{IN B} \begin{cases} N|_B = N(x=L) = 0 \\ T|_B = T(x=L) = -\frac{Q_0}{2} \\ M|_B = M(x=L) = 0 \end{cases}$$

SI OTTENGONO COSÌ PER I DUE TRATTI LE ESPRESSIONI DELLA SOLUZIONE COMPLETA:

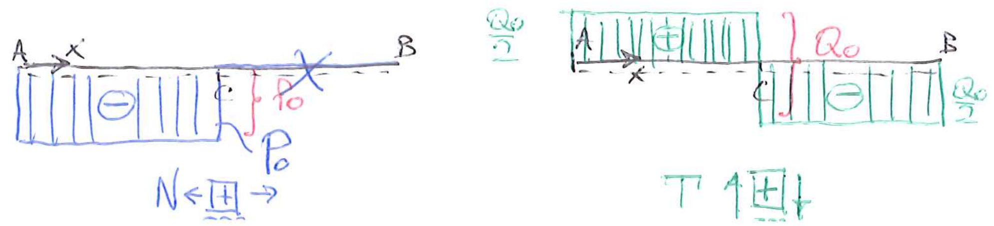
$$\begin{cases} N(x=0) = C_0 = -P_0 \Rightarrow C_0 = -P_0 \\ T(x=0) = C_1 = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{Q_0}{2} \\ M(x=0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x=L) = D_0 = 0 \Rightarrow D_0 = 0 \\ T(x=L) = D_1 = -\frac{Q_0}{2} \Rightarrow D_1 = -\frac{Q_0}{2} \\ M(x=L) = D_1 L + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = +\frac{Q}{2}L \end{cases}$$

SICCHÉ LA SOLUZIONE PARTICOLARE RISULTA COSÌ ESPRESSA:

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= -P_0 \\ T(x) &= \frac{Q_0}{2} \\ M(x) &= \frac{Q_0}{2}x \end{aligned}\right\} \text{ VALIDA SUL TRATTO } Ⓐ \to Ⓒ : \ 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ T(x) &= -\frac{Q_0}{2} \\ M(x) &= +\frac{Q_0}{2}[L-x] \end{aligned}\right\} \text{ VALIDA SUL TRATTO } Ⓒ \to Ⓑ : \ \frac{L}{2} < x < L$$

E FORNISCE QUESTI DIAGRAMMI:

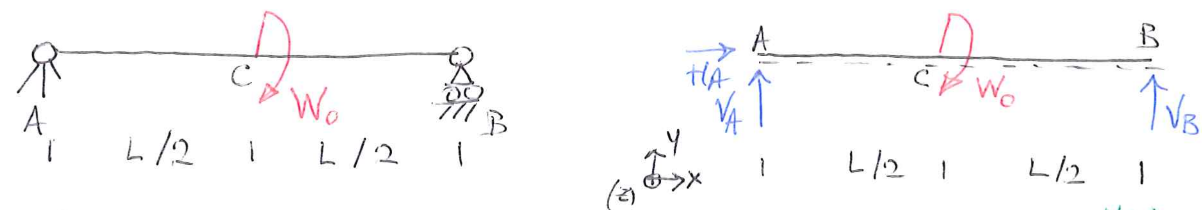


E SI VERIFICA, IN BASE ALLE [1 bis], [2 bis], [3 bis], TENUTO CONTO CHE $P = -P_0$; $Q = +Q_0$; $W = 0$ CHE A CAVALLO DEL PUNTO Ⓒ LE AZIONI INTERNE PRESENTANO QUESTE DISCONTINUITÀ:

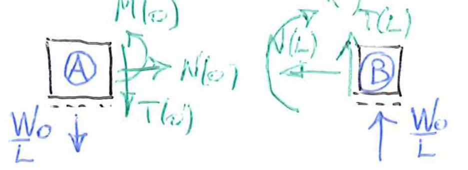
$$\Delta N = -P = +P_0 \quad ; \quad \Delta T = -Q = -Q_0 \quad ; \quad \Delta M = -W = 0.$$

QUINDI N E T PRESENTANO UN "SALTO" (DISCONTINUITÀ) NEI DIAGRAMMI IN CORRISPONDENZA DEL PUNTO Ⓒ DOVE SONO APPLICATI I CARICHI CONCENTRATI, MENTRE M PRESENTA NELLO STESSO PUNTO Ⓒ UNA SEMPLICE DISCONTINUITÀ DELLA PENDENZA (CIOÈ DERIVATA PRIMA DISCONTINUA), OVVERO UN PUNTO ANGOLOSO.

G) TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A UNA COPPIA CONCENTRATA IN MEZZERIA.



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -W_0 + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -W_0/L \\ V_B = W_0/L \end{cases}$$



COME NELL'ULTIMO CASO CONSIDERATO LA DISCONTINUITA' DI CARICO PRESENTE RICHIEDE DI INTEGRARE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEI 2 SOTTODOMINI Ⓐ→Ⓒ E Ⓒ→Ⓑ: IN ENTRAMBI RISULTA $p(x)=0$; $q(x)=0$; $m(x)=0$ SICCHÉ LE [1''] - [3''] FORNISCONO:

I - TRATTO Ⓐ→Ⓒ: $0<x<\frac{L}{2}$

$$\frac{dN}{dx}=0 \Rightarrow N(x)=C_0=\text{CONST.}$$

$$\frac{dT}{dx}=0 \Rightarrow T(x)=C_1=\text{CONST.}$$

$$\frac{dM}{dx}=T(x) \Rightarrow M(x)=C_1x+C_2$$

II TRATTO Ⓒ→Ⓑ: $\frac{L}{2}<x<L$

$$\frac{dN}{dx}=0 \Rightarrow N(x)=D_0=\text{CONST.}$$

$$\frac{dT}{dx}=0 \Rightarrow T(x)=D_1=\text{CONST.}$$

$$\frac{dM}{dx}=T(x) \Rightarrow M(x)=D_1x+D_2$$

PER FISSARE LE COSTANTI C_0, C_1, C_2; D_0, D_1, D_2 SI FA ANCORA USO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO PER CIASCUNO DEI 2 TRATTI. IN PARTICOLARE, RISULTA:

$$\text{IN Ⓐ} \begin{cases} N|_A = N(x=0) = 0 \\ T|_A = T(x=0) = -\frac{W_0}{L} \\ M|_A = M(x=0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{IN Ⓑ} \begin{cases} N|_B = N(x=L) = 0 \\ T|_B = T(x=L) = -\frac{W_0}{L} \\ M|_B = M(x=L) = 0 \end{cases}$$

SI OTTENGONO COSÌ PER I DUE TRATTI/SOTTODOMINI I VALORI DELLE COSTANTI

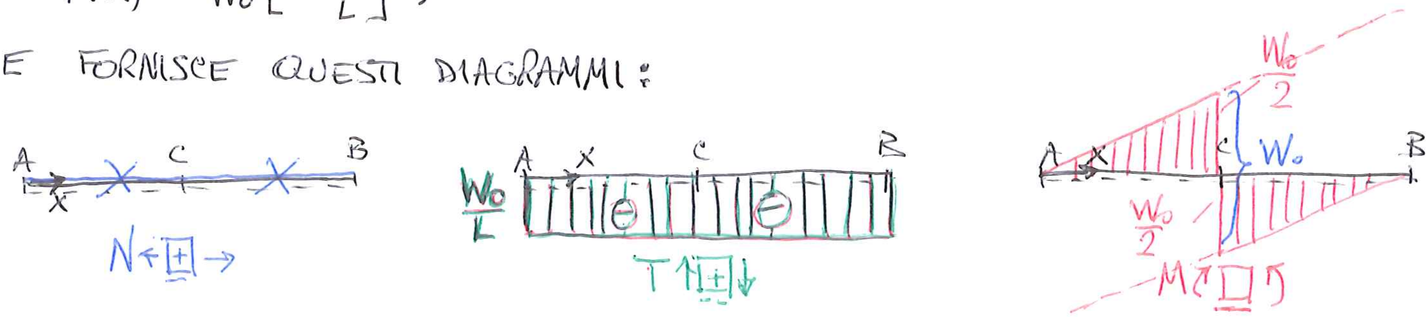
$$\begin{cases} N(x=0)=C_0=0 \Rightarrow C_0=0 \\ T(x=0)=C_1=-\frac{W_0}{L} \Rightarrow C_1=-\frac{W_0}{L} \\ M(x=0)=C_2=0 \Rightarrow C_2=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N(x=L)=D_0=0 \Rightarrow D_0=0 \\ T(x=L)=D_1=-\frac{W_0}{L} \Rightarrow D_1=-\frac{W_0}{L} \\ M(x=L)=D_1L+D_2=0 \Rightarrow D_2=+W_0 \end{cases}$$

CHE CONSENTONO DI DETERMINARE LA SOLUZIONE PARTICOLARE, CHE RISULTA ESSERE:

$$\left.\begin{aligned} N(x)&=0 \\ T(x)&=-\frac{W_0}{L} \\ M(x)&=-\frac{W_0}{L}x \end{aligned}\right\} \text{VALIDA SUL TRATTO Ⓐ→Ⓒ: } 0<x<\frac{L}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x)&=0 \\ T(x)&=-\frac{W_0}{L} \\ M(x)&=W_0\left[1-\frac{x}{L}\right] \end{aligned}\right\} \text{VALIDA SUL TRATTO Ⓒ→Ⓑ: } \frac{L}{2}<x<L$$

E FORNISCE QUESTI DIAGRAMMI:

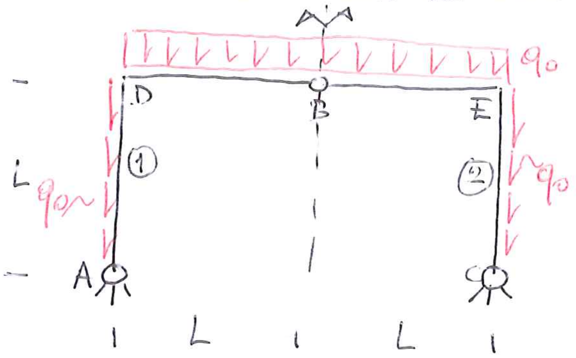


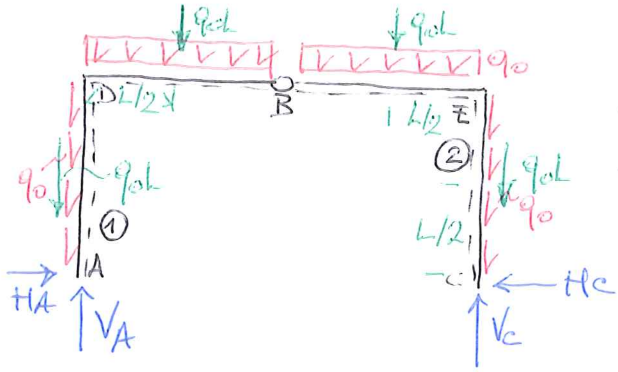
SI VERIFICA IN QUESTO CASO, POICHÉ $P=0$; $Q=0$; $W=-W_0$ DALLE [1bis] - [3bis] CHE $\Delta N=0$; $\Delta T=0$; $\Delta M=-W=+W_0$. PERTANTO N E T RISULTANO FUNZIONI CONTINUE, M HA UNA DISCONTINUITÀ IN Ⓒ. PERALTRO, POICHÉ $T(x)$ È

CONTINUO A CAVALLO DEL PUNTO (C) E COSTANTE, SI HA CHE LA PENDENZA DEI DUE RAMI DEL DIAGRAMMA DI M È LA MEDESIMA, IL CHE IMPLICA CHE I DUE RAMI SONO PARALLELI.

H) PORTALE A 3 CERNIERE SOGGETTO AL PESO PROPRIO

COME ULTIMO ESEMPIO SI CONSIDERA QUESTA SITUAZIONE: LA SI RISOLVE CON IL METODO DIRETTO E SI PROCEDE POI A VERIFICARE LA CORRETTEZZA DEI RISULTATI CHE SI SONO OTTENUTI CON LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO.





$GDL = 2 \times 3 = 6$

$GDV = 2(A) + 2(C) + 2(B) = 6$

$GDL = GDV$

DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI:

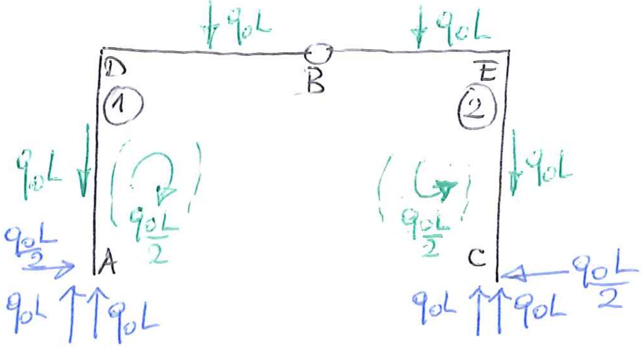
(1) ∪ (2)

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - H_C = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - 4q_0L + V_C = 0 \quad -q_0 \cdot 2L \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -q_0L \cdot \frac{L}{2} - q_0L \cdot \frac{3L}{2} + V_C \cdot 2L = 0 \end{cases}$$

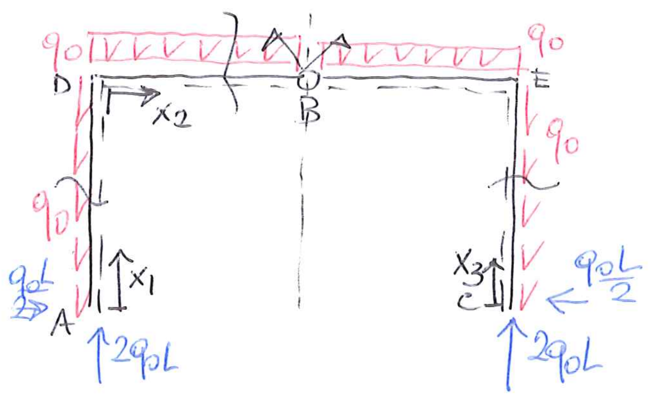
EQ. AUSILIARIA: $M_{z(B)}^{(2)} = 0 \quad -q_0L \cdot \frac{L}{2} - q_0L \cdot L - H_C \cdot L + V_C \cdot L = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_A = q_0\frac{L}{2} \\ V_A = 2q_0L \\ V_C = 2q_0L \\ H_C = \frac{q_0L}{2} \end{cases}$$

PERTANTO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO È IL SEGUENTE:



SI VERIFICA AGEVOLMENTE CHE LE CONDIZIONI GRAFICHE DI EQUILIBRIO SONO SODDISFATTE: IN PARTICOLARE LE REAZIONI ORIZZONTALI HANNO IL COMPITO DI NEUTRALIZZARE LE COPPIE DI VALORE $\frac{q_0L}{2}$ CHE TENDONO A DIVARICARE LE 2 TRAVI SFRUTTANDO L'ARTICOLAZIONE PRESENTE IN (B)



OCCORRE EFFETTUARE 3 DIVERSE SEZIONI PER DETERMINARE LE AZIONI INTERNE SUI 3 TRATTI:

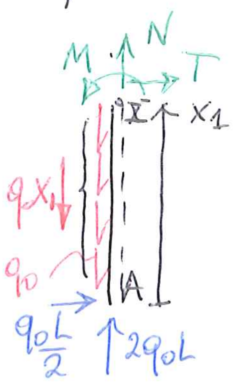
$A \rightarrow D$: $0 < x_1 < L$

$D \rightarrow E$: $0 < x_2 < 2L$

$C \rightarrow E$: $0 < x_3 < L$

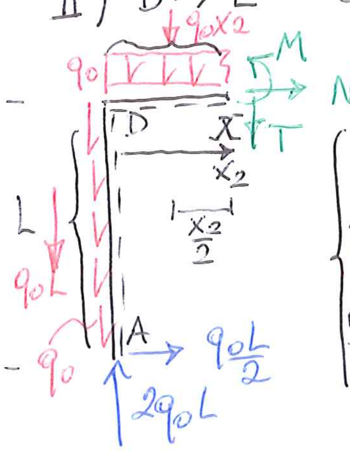
SI OSSERVI NUOVAMENTE CHE IL VINCOLO IN (B) È UN VINCOLO INTERNO: LA STRUTTURA NON RICEVE IN QUEL PUNTO NESSUNA REAZIONE ESTERNA: NON È NECESSARIO CONSIDERARE SEPARATAMENTE DB E BE

I) $A \to D \qquad 0 < x_1 < L$



$$\begin{cases} \uparrow R_{//} = 0 & 2q_0L - q_0x_1 + N(x_1) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 & q_0\frac{L}{2} + T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & q_0\frac{L}{2}x_1 + M(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} N(x_1) &= -q_0\left[2L - x_1\right] \\ T(x_1) &= -q_0\frac{L}{2} \\ M(x_1) &= -q_0\frac{L}{2}x_1 \end{aligned}}$$

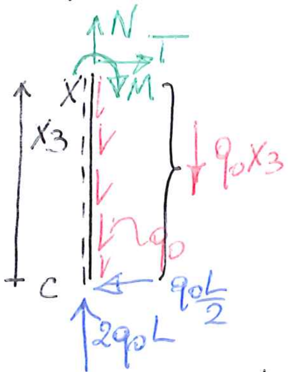
II) $D \to E \qquad 0 < x_2 < 2L$



$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & q_0\frac{L}{2} + N(x_2) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & 2q_0L - q_0L - q_0x_2 - T(x_2) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & q_0\frac{L}{2}\cdot L - \underset{+q_0Lx_2}{2q_0Lx_2} + q_0x_2\frac{x_2}{2} + M(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} N(x_2) &= -q_0\frac{L}{2} \\ T(x_2) &= q_0\left[L - x_2\right] \\ M(x_2) &= -\frac{q_0}{2}\left[L - x_2\right]^2 \end{aligned}}$$

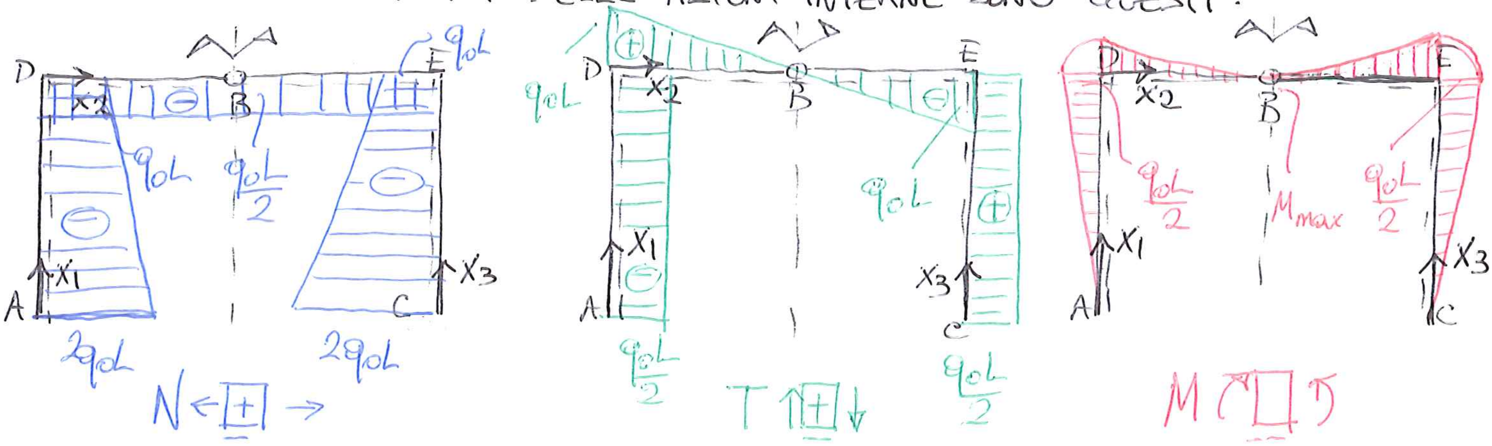
$$M(x_2) = -q_0\frac{L^2}{2} + q_0Lx_2 - q_0\frac{x_2^2}{2} = -\frac{q_0}{2}\left[L - x_2\right]^2$$

III) $C \to E \qquad 0 < x_3 < L$



$$\begin{cases} \uparrow R_{//} = 0 & 2q_0L - q_0x_3 + N(x_3) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 & -q_0\frac{L}{2} + T(x_3) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & -q_0\frac{L}{2}x_3 - M(x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} N(x_3) &= -q_0\left[2L - x_3\right] \\ T(x_3) &= +\frac{q_0L}{2} \\ M(x_3) &= -q_0\frac{L}{2}x_3 \end{aligned}}$$

I DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE SONO QUESTI:



SI OSSERVA CHE ANCHE IN QUESTO CASO (STRUTTURA SIMMETRICA PER GEOMETRIA E VINCOLI, CARICATA IN MODO SIMMETRICO) SI RITROVA IL RISULTATO NOTO: I DIAGRAMMI DI N E M SONO SIMMETRICI, QUELLO DI T È ANTISIMMETRICO.

SI PASSA A VERIFICARE LE ESPRESSIONI DELLE AZIONI INTERNE SULLA BASE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA. AL PROPOSITO SI OSSERVA, SULLA BASE DELLE CONVENZIONI DI SEGNO UTILIZZATE PER OTTENERE LE [1''] - [3''] CHE PER I DIVERSI TRATTI RISULTA:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -p(x) \quad [1''] \\ \frac{dT}{dx} &= -q(x) \quad [2''] \\ \frac{dM}{dx} &= T(x) - m(x) \quad [3''] \end{aligned}}$$

I) $p(x) = -q_0$; $q(x) = 0$; $m(x) = 0$

II) $p(x) = 0$; $q(x) = +q_0$; $m(x) = 0$

III) $p(x) = +q_0$; $q(x) = 0$; $m(x) = 0$.

SI PASSA ALLA VERIFICA:

I) $N(x_1) = -2q_0L + q_0x_1 \Rightarrow \frac{dN}{dx_1} = +q_0 \Rightarrow \frac{dN}{dx_1} = -p(x_1)$ ✓

$T(x_1) = -\frac{q_0L}{2} \Rightarrow \frac{dT}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx_1} = 0$ ✓

$M(x_1) = -\frac{q_0L}{2}x_1 \Rightarrow \frac{dM}{dx_1} = -\frac{q_0L}{2} \Rightarrow \frac{dM}{dx_1} = T(x_1)$ ✓

II) $N(x_2) = -\frac{q_0L}{2} \Rightarrow \frac{dN}{dx_2} = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx_2} = 0$ ✓

$T(x_2) = q_0L - q_0x_2 \Rightarrow \frac{dT}{dx_2} = -q_0 \Rightarrow \frac{dT}{dx_2} = -q(x_2)$ ✓

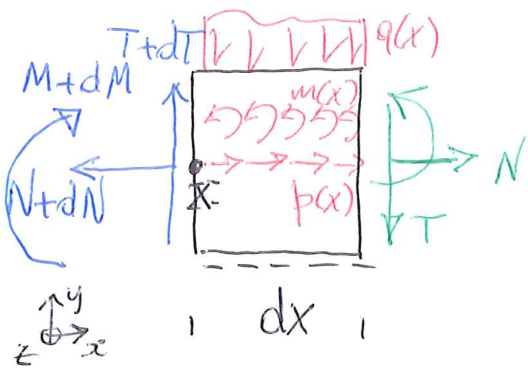
$M(x_2) = -q_0L^2 + q_0Lx_2 - q_0\frac{x_2^2}{2} \Rightarrow \frac{dM}{dx_2} = q_0L - q_0x_2 \Rightarrow \frac{dM}{dx_2} = T(x_2)$ ✓

III) $N(x_3) = -2q_0L + q_0x_3 \Rightarrow \frac{dN}{dx_3} = +q_0 \Rightarrow \frac{dN}{dx_3} = +p(x_3)$? ✓ [1*'']

$T(x_3) = \frac{q_0L}{2} \Rightarrow \frac{dT}{dx_3} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx_3} = 0$ ✓

$M(x_3) = -\frac{q_0L}{2}x_3 \Rightarrow \frac{dM}{dx_3} = -\frac{q_0L}{2} \Rightarrow \frac{dM}{dx_3} = -T(x_3)$? ✓ [3*'']

SI OSSERVA CHE LE VERIFICHE SUL TRATTO III) VALGONO IN VALORE ASSOLUTO, MA NON IN SEGNO. BISOGNA PERÒ CONSIDERARE CHE SU QUESTO TRATTO LA TRAVE È PERCORSA IN "VERSO" OPPOSTO RISPETTO AI CASI PRECEDENTI. PER CHIARIRE QUESTO ASPETTO SI CONSIDERI IL CONCIO ELEMENTARE, CON LE AZIONI CHE SI INCREMENTANO SULLA FACCIA DI DESTRA, MANTENENDO PERÒ LE STESSE CONVENZIONI PER IL VERSO POSITIVO DEI CARICHI DISTRIBUITI:



SI HA IN QUESTO CASO

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad -[\cancel{N}+dN] + p(x)dx + \cancel{N} = 0 & [1^*] \\ \uparrow R_y = 0 \quad \cancel{T}+dT - q(x)dx - \cancel{T} = 0 & [2^*] \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad -[\cancel{M}+dM] + m(x)dx - q(x)dx\frac{dx}{2} - T\cdot dx + \cancel{M} = 0 & [3^*] \end{cases}$$

SEGUE DI QUI:

$$dN = p(x)\,dx \qquad [1^{*\prime}]$$

$$dT = q(x)\,dx \qquad [2^{*\prime}]$$

$$dM = -T\,dx + m(x)\,dx \qquad [3^{*\prime}]$$

E LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA DIVENGONO IN QUESTO CASO:

$$\frac{dN}{dx} = +p(x) \qquad [1^{*\prime\prime}]$$

$$\frac{dT}{dx} = +q(x) \qquad [2^{*\prime\prime}]$$

$$\frac{dM}{dx} = -T + m(x) \qquad [3^{*\prime\prime}]$$

E IN BASE A QUESTE I RISULTATI DEL TRATTO III) SONO VERIFICATI.
SI OSSERVI COMUNQUE CHE SE $m(x) = 0$ DERIVANDO RISPETTO A x LA $[3^{*\prime\prime}]$ E SOSTITUENDO LA $[2^{*\prime\prime}]$ SI OTTIENE ANCORA

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x).$$